4300303 1 Eletromagnetismo I
Segundo Semestre 2014

Segundo Estudo Dirigido

Vamos iniciar este estudo dirigido considerando a Força de Lorentz,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \,,$$

que atua sobre uma carga em movimento em um campo elétrico $\vec{E}$ e um campo magnético $\vec{B}$. Esta força é estudada no Curso Física III e, quando discutimos o campo magnético pulamos esta parte no início do quinto capítulo de livro texto.

1. Considere uma carga q com velocidade $\vec{v}$ em movimento em uma região do espaço com campo magnético constante

$$\vec{B} = B\hat{e}_z.$$

Neste caso, a equação de movimento da carga fica

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

a) Multiplique esta equação escalarmente por $\vec{v}$ e mostre que a energia cinética da carga tem que se conservar, isto é,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \text{constante}.$$

b) Mostre que, em termos das componentes da velocidade, a equação do movimento corresponde às três seguintes

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m}v_y; \; \frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{m}v_x; \; \frac{dv_z}{dt} = 0.$$

Explique por que a grandeza qB/m tem que ter dimensão de frequência e defina a frequência ciclotrônica

$$\Omega = \frac{qB}{m}.$$

Naturalmente a solução para v_z é simples,

$$v_z = v_{//} = constante,$$

onde $v_{/}$ é a componente da velocidade paralela à $\vec{B}$.

c) Derive uma vez mais as equações para v_x e v_y e mostre que ambas podem ser escritas como

$$\frac{d^2v_i}{dt^2} = -\Omega^2 v_i; \;\; i = x, y.$$

Considerando que a energia da carga se conserva e que a componente paralela a $\vec{B}$ é constante, temos que

$$v_x^2 + v_y^2 = v_\perp^2 = v^2 - v_\parallel^2 = constante,$$

onde $v_\perp$ é o módulo da velocidade da carga perpendicular ao campo magnético. Mostre então que, se tomarmos como condições iniciais

$$v_x(0) = v_\perp; \;\; v_y(0) = 0,$$

As soluções da equação de movimento são

$$v_x(t) = v_\perp \cos(\Omega t); \; v_y(t) = v_\perp \sin(\Omega t); \; v_z = v_\parallel.$$

d) Usando $d\vec{r}/dt = \vec{v}$, mostre que o movimento da carga é descrito por

$$x(t) = \frac{v_\perp}{\Omega}\sin(\Omega t); \; y(t) = \frac{v_\perp}{\Omega}\cos(\Omega t); z(t) = v_\parallel t,$$

e que este movimento corresponde a um movimento circular, se $v_\parallel = 0$, com o <u>raio de giração ciclotrônico</u>

$$\rho_c = \frac{v_\perp}{\Omega},$$

e a um movimento helicoidal se $v_\parallel \neq 0$.

2. Considere agora uma situação em que, além do campo magnético haja também um campo elétrico $\vec{E}$ perpendicular a $\vec{B}$, de forma que a equação de movimento da carga fica

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}.$$

a) Mostre que esta equação pode ser resolvida fazendo a hipótese que

$$\vec{v} = \vec{v}_c(t) + \vec{v}_D,$$

onde $\vec{v}_D = constante$, de forma que

$$m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = q\vec{v}_c \times \vec{B}\,; \;\; q\big(\vec{E} + \vec{v}_D \times \vec{B}\big) = 0.$$

A primeira equação corresponde à do movimento ciclotrônico, que resolvemos no primeiro problema. Vamos agora resolver a equação para $\vec{v}_D$,

$$\vec{E} = -\vec{v}_D \times \vec{B}.$$

b) Pós multiplique vetorialmente esta equação por $\vec{B}$ e, utilizando a identidade vetorial

$$\vec{A} \times \big(\vec{B} \times \vec{C}\big) = \big(\vec{A} \cdot \vec{C}\big)\vec{B} - \big(\vec{A} \cdot \vec{B}\big)\vec{C},$$

mostre que

$$\vec{v}_D = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}.$$

Isto significa que, na presença de um campo perpendicular a $\vec{B}$, além do movimento ciclotrônico, a carga adquire uma velocidade constante na direção perpendicular a $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Após este estudo dirigido, veja o detalhe deste movimento no Exemplo 5.2 do livro texto.

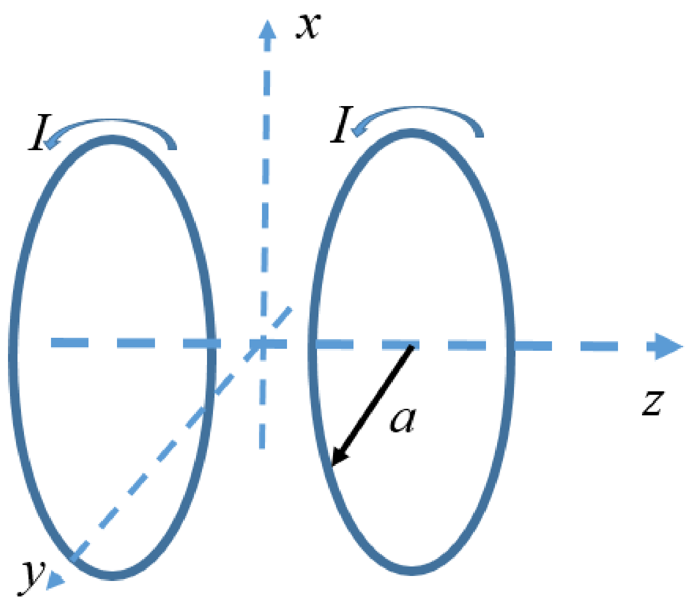
-----/-----/-----

Nesta segunda parte do estudo dirigido, vamos solucionar o problema 5.46 do livro texto, que tem bastante importância prática e permite explorar alguns resultados que obtivemos. Em aula, vimos que o campo de uma espira circular de corrente, próximo ao seu eixo, é dado por

$$\vec{B}(r,z) = B_r \hat{e}_r + B_z \hat{e}_z;$$

$$B_r \approx \frac{3\mu_0 I}{4} \frac{a^2 r z}{(a^2+z^2)^{5/2}} \; ; \; B_z \approx \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

onde a é o raio da espira. Considere agora duas espiras circulares paralelas, centradas no mesmo eixo, sendo ambas de raio a e transportando a mesma corrente I no mesmo sentido, como mostra a figura.



a) Escolhendo a origem do eixo z no ponto médio entre as espiras, mostre que a expressão para a componente z do campo devido às espiras é dada por

$$B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2}\left[\frac{1}{\left[a^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[a^2 + \left(z + \frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}}\right].$$

b) A partir desta expressão, mostre que

$$\frac{dB_z}{dz} = 0; z = 0.$$

c) Calcule a derivada segunda de B_z em $z = 0$ e determine a relação entre a e d para que ela seja nula no mesmo ponto.

d) Mostre que, neste caso, o valor desta componente do campo no ponto médio entre as espiras é dado por

$$B_z(0) = \frac{8\mu_0 I}{5\sqrt{5}a}.$$

Esta é a chamada Bobina de Helmholtz, muito utilizada no laboratório para produzir um campo com valor bem determinado em uma região razoavelmente extensa.

e) Mostre que, para a Bobina de Helmholtz, a componente radial do campo no em torno do ponto medo entre as bobinas é dada por

$$B_r(r,z) = \frac{3\mu_0 I}{4} r a^2 \left[\frac{z - \frac{d}{2}}{\left[a^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2\right]^{5/2}} + \frac{z + \frac{d}{2}}{\left[a^2 + \left(z + \frac{d}{2}\right)^2\right]^{5/2}}\right].$$