Eletromagnetismo I

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2º Semestre 2014

Preparo: Diego Oliveira

Aula 17

Uso de um "Potencial Magnético" para cálculo do campo

Este assunto é tratado através dos problemas 6.15 e 6.18, do livro texto. Mas vamos discutí-lo com maior cuidado aqui.

O campo magnético $\vec{B}$ é relacionado com os campos $\vec{H}$ e $\vec{M}$ através da relação

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

e

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_c$$

onde $\vec{j}_c$ é a corrente de condução devido ao fluxo de portadores de carga. Se estivermos em meio onde $\vec{j}_c = 0$, então

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{H} = -\nabla W$$

onde W pode ser considerado um "potencial magnético" auxiliar. Mas como

$$\nabla \cdot \vec{B} = \mu_0(\nabla \cdot \vec{H} + \nabla \cdot \vec{M}) = 0,$$

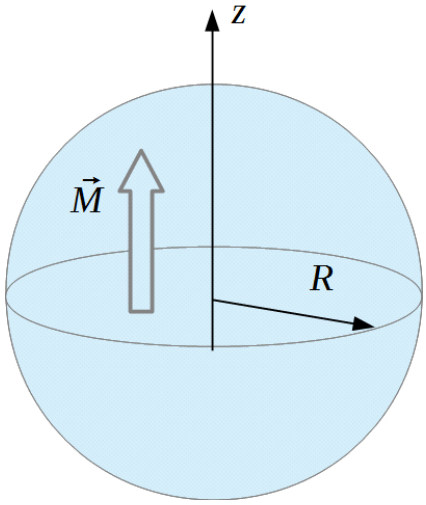
temos que

$$-\nabla \cdot (\nabla W) + \nabla \cdot \vec{M} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\nabla^2 W = \nabla \cdot \vec{M}}$$

ou seja, o potencial magnético satisfaz uma equação de Poisson em que $\nabla \cdot \vec{M}$ o papel de fonte.

Vamos usar este formalismo para calcular o campo produzido por uma esfera uniforme magnetizada, como propõe o problema 6.15 (correspondente ao Exemplo 6.1).

Consideremos uma esfera uniformemente magnetizada, $\vec{M} = M\hat{e}_z$, de raio R. Calcular o campo dentro e fora dela.



Como $\vec{M}$ é constante dentro da esfera e nulo fora dela,

$$\nabla \cdot \vec{M} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \nabla^2 W = 0$$

No entanto $\vec{M}$ é descontinuo em $r = R$, de forma que as regiões dentro e fora da esfera são distintas e as condições apropriadas devem ser utilizadas para conectar os dentro e fora, como viemos.

Naturalmente resolvermos a Equação de Laplace $\nabla^2 W = 0$ em coordenadas esféricas, como fizemos na Eletrostática para uma esfera dielétrica. Notando que $\partial/\partial\varphi = 0$, por simetria, temos

$$\nabla^2 W = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial W}{\partial r}\right) + \frac{1}{sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta \frac{\partial W}{\partial \theta}\right) = 0,$$

cuja solução é

$$W(r,\theta) = A_0 + \frac{B_0}{r} - \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2}\right) cos\theta + \ldots$$

Esta solução tem que valer dentro e fora da esfera. Escrevemos então

$$\underline{\text{dentro}} \qquad W_d = A_0^d + \frac{B_0^d}{r} + \left(A_1^d r + \frac{B_1^d}{r^2}\right) cos\theta + \ldots$$

$$\underline{\text{fora}} \qquad W_f = A_0^f + \frac{B_0^f}{r} + \left(A_1^f r + \frac{B_1^f}{r^2}\right) cos\theta + \ldots$$

onde as constantes ter que ser determinadas pelas condições de contorno apropriadas.

O campo $\vec{H}$, por outro lado, é dado por

$$\vec{H} = \frac{\partial W}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \theta}\hat{e}_\theta$$

Então, <u>fora</u> da esfera temos

$$\vec{H}_f = \left[-\frac{B_0^f}{r^2} + \left(A_1^f - \frac{2B_1^f}{r^3}\right) cos\theta + \ldots\right]\hat{e}_r - \frac{1}{r}\left[\left(A_1^f r + \frac{B_1^f}{r^2}\right) sen\theta + \ldots\right]\hat{e}_\theta$$

Quanto $r \to \infty$, obtemos

$$\vec{H}_f = A_1^f cos\theta\hat{e}_r - A_1^f sen\theta\hat{e}_\theta = A_1^f(cos\theta\hat{e}_r - sen\theta\hat{e}_\theta) = A_1^f\hat{e}_z$$

ou seja, obtemos um campo $\vec{H}$ constante no infinito. Isto não é possível pois a fonte do campo, a esfera magnetizada, é finita. Estão somos obrigados a impor $A_1^f = 0$, de forma que o campo externo fica

$$\vec{H}_f = \left[-\frac{B_0^f}{r^2} - \frac{2B_1^f}{r^3}cos\theta + \ldots\right]\hat{e}_r + -\left(\frac{B_1^f}{r^3}sen\theta + \ldots\right)\hat{e}_\theta$$

Por outro lado, <u>dentro</u> da esfera, temos

$$\vec{H}_1 = \left[-\frac{B_0^d}{r^2} + \left(A_1^d - \frac{2B_1^d}{r^3}\right) cos\theta + \ldots\right]\hat{e}_r - \frac{1}{r}\left[\left(A_1^d r + \frac{B_1^d}{r^2}\right) sen\theta + \ldots\right]\hat{e}_\theta$$

Como o campo não pode divergir em $r = 0$, temos que impor

$$B_1^d = 0; \quad i = 0, 1, 2, \ldots;$$

então

$$\vec{H} = A_1^d cos\theta\hat{e}_r - A_1^d sen\theta\hat{e}_\theta = A_1^d\hat{e}_z$$

Condições de Contorno

Na superfície da esfera, que não tem corrente superficial de condução, os campos devem satisfazer as condições de contorno

$$B_{n_d} = B_{n_f} \qquad \Rightarrow \qquad B_{r_d} = B_{r_f}; \quad H_{t_d} = H_{t_f} \qquad \Rightarrow \qquad H_{\theta_d} = H_{\theta_f}$$

Vamos primeiro aplicar a condição de continuidade da componente tangencial de $\vec{H}$:

$$r = R \qquad \Rightarrow \qquad -A_1^d sen\theta = -\frac{B_1^f}{R^3} sen\theta \qquad \therefore A_1^d = \frac{B_1^f}{R^3}$$

Para aplicar a condição de continuidade da componente normal de $\vec{B}$, temos que considerar

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}); \qquad \vec{M} = M\hat{e}_z = M(cos\theta\hat{e}_r - sen\theta\hat{e}_\theta)$$

Então

$$\mu_0(A_1^d cos\theta + M cos\theta) = \mu_0 \left[-\frac{B_0^f}{R^2} - \frac{2B_1^f}{R^3} cos\theta \right]$$

portanto

$$B_0^f = 0; \qquad A_1^d + M = -\tfrac{2B_1^f}{R^3}$$

$$\therefore A_1^d + M = -2A_1^d \qquad \therefore A_1^d = -\tfrac{M}{3}; \quad B_1^f = -\tfrac{M}{3}R^3$$

Assim os campos ficam

$$\underline{\text{Dentro}}: \qquad \vec{H}_d = -\tfrac{1}{3}\vec{M}; \qquad \vec{B}_d = \mu_0\left(-\tfrac{M}{3} + \vec{M}\right) \qquad \therefore \vec{B}_d = \tfrac{2\mu_0}{3}\vec{M}$$

$$\underline{\text{Fora}}: \qquad \vec{H}_f = \tfrac{M}{3}\tfrac{R^3}{r^3}(2cos\theta\hat{e}_r + sen\theta\hat{e}_\theta); \qquad \vec{B}_f = \mu_0\vec{H}_f$$

que é o campo de um <u>dipolo</u>.

Recomendamos aos alunos usarem o mesmo procedimento para resolver o problema 6.18. A única diferença com o que vimos é que, no campo fora da esfera, temos que agora impor

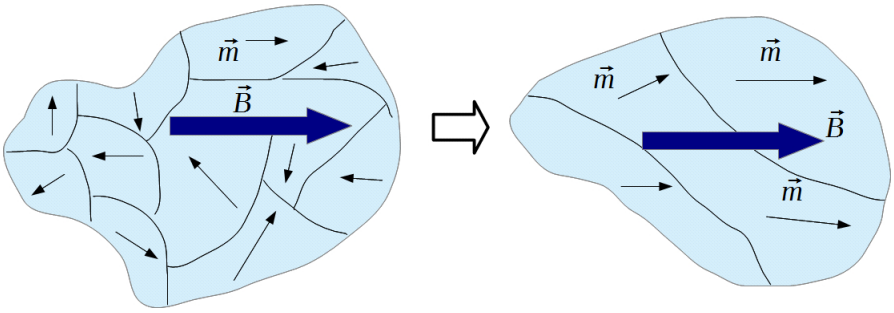
$$r \to \infty \qquad \Rightarrow \qquad \vec{H}_f = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}_0 = \frac{B_0}{\mu_0}\hat{e}_z = \frac{B_0}{\mu_0}(cos\theta\hat{e}_r - sen\theta\hat{e}\theta)$$

Ferromagnetismo

Nos materiais ferromagnéticos há uma tendência dos momentos magnéticos dipolares associados com os spins dos elétrons adquirirem a mesma direção de seus vizinhos próximos. Este é um efeito que só pode ser descrito quantitativamente.

Este alinhamento ocorre em pequenas porções do material, denominados domínios, cada um contendo bilhões de dipolos, todos alinhados em uma dada direção. No entanto, o alinhamento resultante varia de um domínio para outro (Fig 6.26 do livro texto), de forma aleatória. Isso faz com que um pedaço de ferro comum, por exemplo, não seja magnetizado.

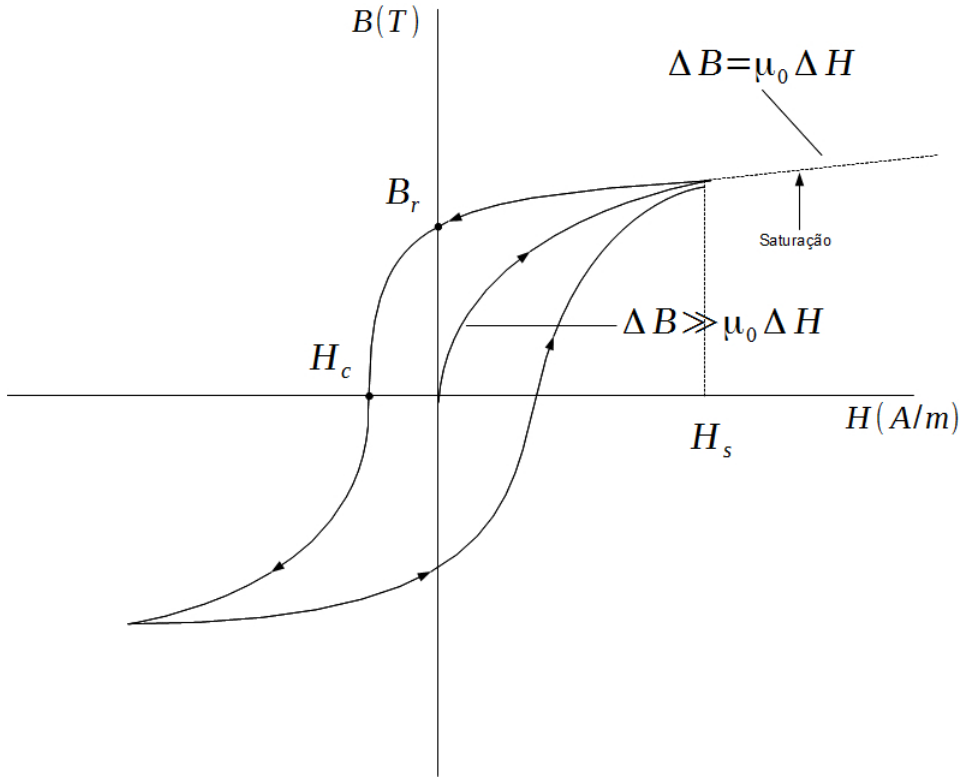
Para magnetizar o material, o colocamos em um campo externo, por exemplo, dentro de uma bobina. A medida que aumentamos o campo externo, surge um torque $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$ em cada momento magnético. Naturalmente este torque será nulo nos domínios que já têm $\vec{M}$ alinhado com $\vec{B}$; mas será não nulo nos outros. Isto faz com que as fronteiras entre domínios se mova, de forma a ampliar os domínios com $\vec{m}$ paralelo a $\vec{B}$, como esquematizado a seguir.



Se o campo for suficientemente intenso, os domínios se alinham e dizemos que o material atingiu a saturação.

Acontece que este processo de movimento das fronteiras entre domínios não é inteiramente reversível. Se o campo externo for reduzido a zero, alguns domínios manterão a orientação com o campo e o material se torna um magneto permanente. Na verdade, mesmo se revertermos o campo externo, a magnetização não se anula totalmente, produzindo a famosa curva de histerese, que é mostrada na figura da página 6.

Quando aumentamos a corrente na bobina de magnetização, portanto aumentamos $\vec{H}$, o campo $\vec{B}$ aumenta muito mais rápido que $\vec{B} = \mu\vec{H}$, porque os domínios com momento magnético paralelo a $\vec{H}$ aumentam, criando uma magnetização permanente $\vec{M}$, de forma



que

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \gg \mu_0\vec{H}$$

Quanto H atinge um valor máximo, denominado campo de saturação, todos os dipolos se alinharam atingindo uma magnetização máxima $\vec{M}_{max}$, de forma que

$$\vec{B} = \mu_0\vec{M}_{max} + \mu_0\vec{H}$$

ou

$$\frac{\Delta B}{\Delta H} = \mu_0$$

já que $\vec{M}_{max}$ é constante. Se agora começarmos a diminuir a corrente da bobina de excitação, os momentos dos diferentes domínios não retornam à sua distribuição aleatória inicial, deixando uma magnetização constante que causa o Campo Permanente B_R.

Se agora invertermos o sentido da corrente na bonina de magnetização, o campo $\vec{B}$ só se anula para um determinado valor do campo H (oposto ao sentido inicial), denominado

Campo Coercivo H_c. Prosseguindo aumentado a corrente no sentido oposto, atingiremos novamente a saturação. Voltando a diminuir a corrente e aumentado novamente no sentido, a curva percorre a trajetória inferior mostrada na figura, não percorrendo a curva de partida.

Esta curva total é denominada Curva de Histerese.