

Eletromagnetismo I

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2º Semestre 2014

Preparo: Diego Oliveira

Aula 16

Campo Magnético na Matéria - Continuação

Na aula passada definimos o vetor Magnetização de um meio material como

$$\vec{M} = n \vec{m}$$

onde n é a densidade volumétrica de átomos com momento magnético elementar \vec{m} . Se o meio tiver diferentes tipos de átomos, ou de agrupamentos de átomos, com diferentes momentos magnéticos \vec{m}_i , o vetor magnetização fica definido como

$$\vec{M} = \sum_i n_i \vec{m}_i$$

onde n_i é a densidade de átomos de espécie i .

Usando a expressão do potencial vetor para um dipolo magnético elementar, vimos que o potencial vetor pode ser expresso como

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'$$

de forma que o efeito dos dipolos magnéticos de um meio podem ser expressos como devido a duas fontes.

Densidade superficial de correntes de magnetização: $\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n}$.

Densidade volumétrica de corrente de magnetização: $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$.

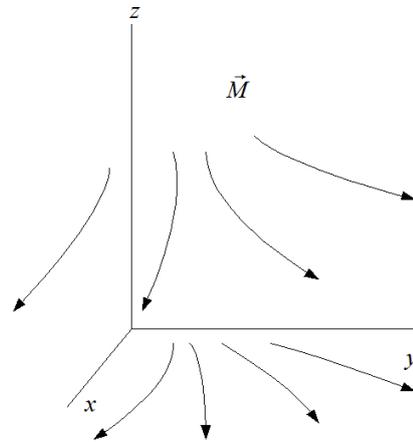
No livro texto em inglês, no lugar do subscripto M temos b que significa “bound”, ou

seja, ligado em português; as correntes de magnetização são devidas ao movimento das cargas ligadas nos átomos.

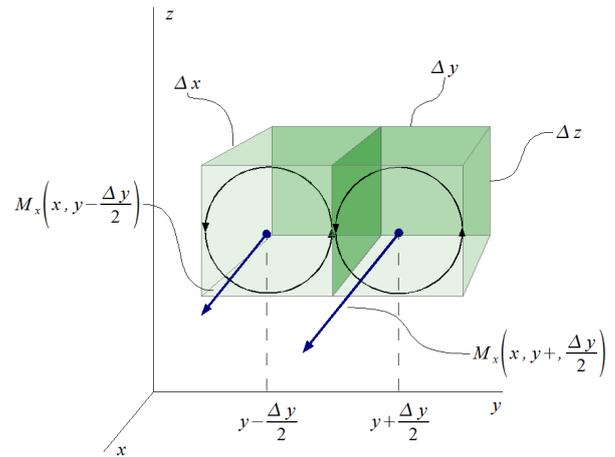
Vamos iniciar a aula de hoje considerando o modelo físico para o aparecimento da densidade volumétrica da corrente de magnetização quando \vec{M} não é uniforme. Para isto, vamos supor que num determinado meio magnetizado o vetor magnetização seja dado por:

$$\vec{M} = M_x(x, y)\hat{e}_x + M_y(x, y)\hat{e}_y$$

isto é, a magnetização varia no plano xy , como esquematizado ao lado.



Para determinar qual é o efeito da variação espacial em \vec{M} , vamos considerar dois volumes elementares iguais e adjacentes dados por $\Delta x \Delta y \Delta z$, como ilustrado na figura. Suponhamos, sem perda de generalidade, que M_x aumenta com y . Portanto, na interface dos cubos, a corrente associada à magnetização $M_x(x, y + \Delta y/2)$ é maior que a corrente associada a $M_x(x, y - \Delta y/2)$.



Dado que o momento magnético é corrente vezes área, tais correntes são

$$I_{cima} = \frac{m_x(x, y - \Delta y/2)}{\Delta y \Delta z} = \frac{\Delta x \cancel{\Delta y} \Delta z M_x(x, y - \Delta y/2)}{\cancel{\Delta y} \Delta z} = \Delta x M_x(x, y - \Delta y/2)$$

$$I_{baixo} = \frac{m_x(x, y + \Delta y/2)}{\Delta y \Delta z} = \frac{\Delta x \cancel{\Delta y} \Delta z M_x(x, y + \Delta y/2)}{\cancel{\Delta y} \Delta z} = \Delta x M_x(x, y + \Delta y/2)$$

Logo, a corrente aparente na direção vertical, direção z , devido à variação de M_x com

y é dada por

$$\begin{aligned}\Delta I_{z;x} = I_{cima} - I_{baixo} &= [M_x(x, y - \Delta y/2) - M_x(x, y + \Delta y/2)]\Delta x \\ &= \left[\frac{M_x(x, y - \Delta y/2) - M_x(x, y + \Delta y/2)}{\Delta y} \right] \Delta x \Delta y\end{aligned}$$

no limite em que $\Delta y \rightarrow 0$

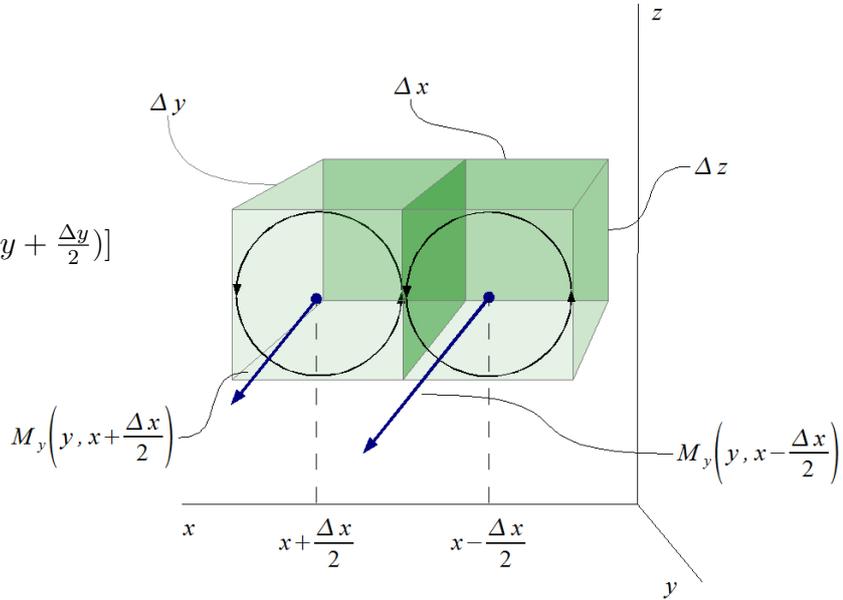
$$\therefore \frac{\Delta I_{z;x}}{\Delta x \Delta y} = -\frac{\partial M_x}{\partial y} = j_{z;x}$$

A notação $\phi_{x_i;x_j}$ indica que a parte da quantidade ϕ na direção x_i tem origem na direção x_j . Por exemplo, no nosso caso, uma parte da corrente na direção z tem como origem o comportamento da magnetização na direção x .

A variação com M_y com x terá um efeito semelhante, como é indicado na figura. A corrente aparente para cima devido a esta variação será

$$\Delta I_{vert;y} = \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta z} [M_x(x, y - \frac{\Delta y}{2}) - M_x(x, y + \frac{\Delta y}{2})]$$

$$\frac{\Delta I_{vert;y}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial M_y}{\partial x}$$



Então a densidade volumétrica de corrente aparente, ou corrente de magnetização, devido à variação espacial de $\vec{M}(x, y)$, na direção z será

$$j_{Mz} = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}$$

Naturalmente, em um caso em que \vec{M} tenha três componentes, todas variando espacialmente, teremos

$$\vec{j}_M = \nabla \times \vec{M}$$

O Vetor Intensidade de Campo Magnético \vec{H}

Naturalmente podemos ter meios que, além de magnetizados, são também condutores, como é o caso do ferro, por exemplo. Vamos então representar as correntes reais, isto é, devido ao movimento efetivo de portadores de carga no meio, pela densidade de corrente e condução \vec{j}_c . O campo magnético no meio será devido então às corrente de condução e às correntes de magnetização, de forma que a Lei de Ampère fica

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{j}_c + \vec{j}_M)$$

Mas $\vec{j}_M = \nabla \times \vec{M}$, de forma que

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\vec{j}_c + \mu_0\nabla \times \vec{M} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j}_c$$

Portanto a grandeza vetorial $\vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$ tem como fonte de circulação somente as correntes de condução reais no meio; esta grandeza recebe o nome de

Vetor Intensidade de Campo Magnético: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}; \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_c$

A expressão integral para o vetor intensidade de campo magnético é obtida pela aplicação direta do Teorema de Stokes, como para o campo \vec{B} , de forma que

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_c$$

onde I_c representa a corrente total de condução através da área englobada pelo circuito \mathcal{C} .

Neste ponto talvez seja ilustrativo fazer uma comparação entre as descrições da eletrostática e da magnetostática na matéria

Eletrostática

Vetor polarização $\vec{P} = n\vec{p}$

n : densidade de dipolos elétricos

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma_p dS'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho d\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}; \quad \rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_\ell; \quad \oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} dS = q_\ell$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi(\vec{E}) \vec{E}$$

Magnetostática

Vetor magnetização $\vec{M} = n\vec{m}$

n : densidade de dipolos magnéticos

$$\vec{m} = IS\hat{n}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}_M dS'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_M d\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n}; \quad \vec{j}_M = \nabla \times \vec{M}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_c; \quad \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_c$$

?

Antes de ver as relações entre \vec{H} e \vec{B} , vamos fazer alguns problemas para fixar os conceitos.

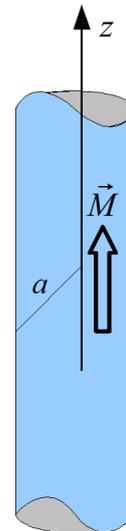
Ex1:(Correspondente ao Ex 6.2 do livro texto, um pouco modificado)

Considere uma barra cilíndrica condutora, com magnetização constante $\vec{M} = M\hat{e}_z$, transportando uma densidade de corrente

$$\vec{j} = j_0 \left(1 - \frac{r}{a}\right) \hat{e}_z$$

Calcule \vec{H} e \vec{B} dentro e fora da barra, considerando que seu comprimento é muito maior que seu diâmetro.

Como a barra pode ser considerada infinita e tem simetria cilíndrica, podemos utilizar diretamente a Lei de Ampère para calcular o campo, mas agora aplicada ao



campo \vec{H} .

1) Dentro do Cilindro:

Consideremos um percurso circular de raio r dentro do cilindro. Aplicando a Lei de Ampère e considerando que \vec{H} deve estar na direção θ e depender somente de r , temos

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r H_\theta = \int \vec{j} \cdot \hat{n} dS'; \quad dS' = r' dr' d\theta'$$

$$\therefore H_\theta = \frac{1}{2\pi r} j_0 \int_0^{2\pi} d\theta' \int_0^r r' \left(1 - \frac{r'}{a}\right) dr' = \frac{1}{r} j_0 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3a} \right]$$

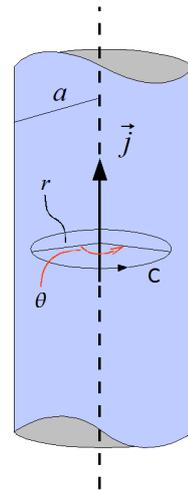
$$\therefore \boxed{\vec{H} = \frac{j_0 r}{2} \left(1 - \frac{2r}{3a}\right) \hat{e}_\theta}; \quad \boxed{\vec{B} = \mu_0 \left[\frac{j_0 r}{2} \left(1 - \frac{2r}{3a}\right) \hat{e}_\theta + M \hat{e}_z \right]}$$

2) Fora do Cilindro

Neste caso temos que considerar o percurso circular de raio $r > a$, de forma que a integral sobre a corrente só se estende até $r' = a$;

$$H_\theta = \frac{1}{2\pi r} j_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r' \left(1 - \frac{r'}{a}\right) dr' = \frac{j_0}{r} \left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3} \right]$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{j_0 a}{6r} \hat{e}_\theta; \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (\vec{M} = 0)}$$



Problema 6.12 (livro texto)

Considere uma barra cilíndrica infinita, com magnetização

$$\vec{M} = kr\hat{e}_z$$

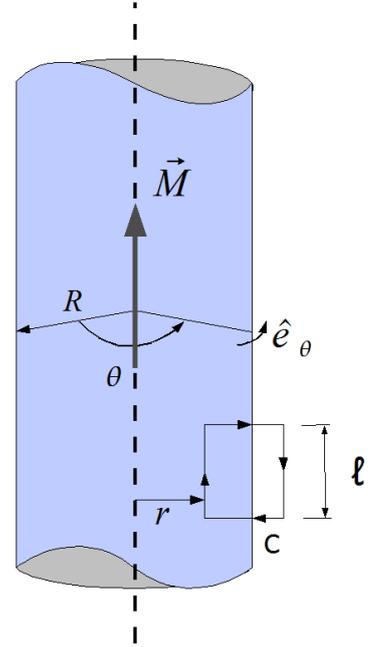
Calcular \vec{H} e \vec{B}

a) $\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n} = kR\hat{e}_z \times \hat{e}_r \quad \therefore \vec{K}_M = kR\hat{e}_\theta$

b) $\vec{j}_M = \nabla \times \vec{M} = (\hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r}) \times (k\hat{e}_z) = -k\hat{e}_\theta$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_c = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

$$\therefore \vec{B}_d = \mu_0 kr\hat{e}_z$$



Será que esta resultado seria obtido também aplicando a Lei de Ampère? Como no caso do solenoide infinito, considerando o circuito retangular C atravessando a barra, indicado na figura. Como as correntes de magnetização são também fontes de \vec{B} , temos

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \left[\int_C \vec{j}_M \cdot \hat{n} dS + \int_C \vec{K}_M \cdot d\vec{\ell} \right]$$

$$\therefore \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_0^\ell dz \int_r^R (-k\hat{e}_\theta) \cdot \hat{e}_\theta dr + \mu_0 \int_0^\ell kR\hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\theta dz$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \ell [-kR + kR + kR] = \mu_0 \ell kr$$

Mas como a barra é infinita, B não deve variar com z , de forma que

$$B\ell = \mu_0 \ell kr \quad \therefore \vec{B}_d = \mu_0 kr\hat{e}_z$$

concordando com o resultado anterior.

Susceptibilidade e Permeabilidade Magnética

Em geral, a relação entre \vec{M} e \vec{H} é dada por

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

onde a grandeza χ_m é denotada susceptibilidade magnética e, em casos gerais, pode ser uma função de \vec{H} . Usando esta relação, temos

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H}$$

onde $\mu = \mu_0\mu_r$ ($\mu_r = 1 + \chi_m$) é denominada permeabilidade magnética do meio material.

A relação $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ implica que \vec{M} e \vec{H} são paralelos. Na realidade, isto é só uma boa aproximação para os meios materiais paramagnéticos e diamagnéticos. No entanto, em meios ferromagnéticos \vec{M} e \vec{H} são dificilmente paralelos e $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ pode chegar a ter uma direção completamente oposta a \vec{H} ! Além disso, o valor de μ pode depender não somente de \vec{H} , mas do passado de magnetização do material. Isto será visto em mais detalhe quando discutirmos as propriedades magnéticas dos materiais.

Neste ponto, vale a pena chamar a atenção sobre uma diferença sutil mais importante na descrição dos campos elétricos e magnéticos na matéria. Em eletrostática definimos

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

mas consideramos o vetor polarização proporcional a \vec{E} :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}; \quad \epsilon_r = 1 + \chi$$

Já, na magnetostática, definimos

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

e considerando o vetor \vec{M} proporcional à \vec{H} e não à \vec{B} , que é o campo responsável pelas forças magnéticas.

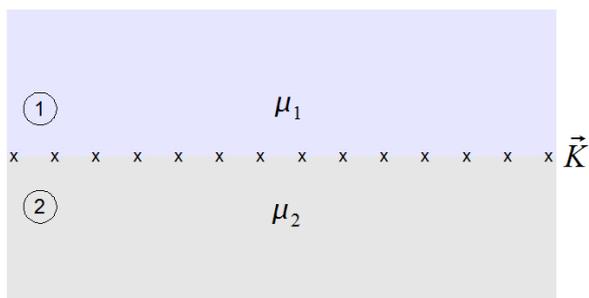
Isto é feito assim porque, na eletrostática, os campos elétricos são produzidos a partir de aplicações de tensões a superfícies condutoras e o campo elétrico pode ser obtido diretamente da distribuição de potencial; ou seja, o campo elétrico pode ser diretamente

medido e, então, determinar a polarização \vec{P} por ele produzida.

Já na magnetostática, o campo magnético é produzido por correntes de condução, das quais \vec{H} pode ser diretamente calculado e a magnetização \vec{M} por ele produzida determinada.

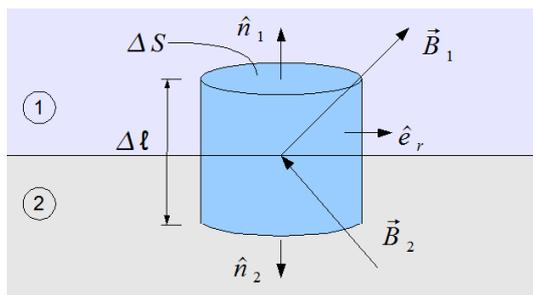
Condições de Contorno para o Campo Magnético

Consideremos a interface entre dois meios com permeabilidades magnéticas distintas e vamos supor que, no caso geral, esteja fluindo uma corrente de condução superficial \vec{K} na superfície da interface.



Vamos determinar as condições de contorno que os campos \vec{B} e \vec{H} devem satisfazer na interface, como fizemos para os campos \vec{E} e \vec{D} .

Inicialmente consideremos uma pequena superfície cilíndrica atravessando a interface, como indicado na figura. A lei de Gauss para o campo \vec{B} é



$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0; \quad d\vec{S} = \hat{n}dS$$

Supondo ΔS e Δl bem pequenos, podemos aproximar a integral como ($\hat{n}_2 = -\hat{n}_1$)

$$B_{n_1}\Delta S - B_{n_2}\Delta S + B_{n_1}2\pi r\frac{\Delta l}{2} + B_{n_2}2\pi r\frac{\Delta l}{2} = 0$$

Tomando o limite $\Delta l \rightarrow 0$, obtemos

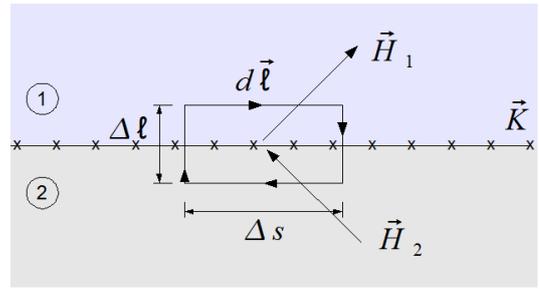
$$\boxed{B_{n_1} = B_{n_2}}$$

ou seja

A componente do campo \vec{B} normal à interface entre dois meios tem que ser contínua

Consideremos agora um circuito retangular atravessando simetricamente a interface, como indicado na figura. Aplicando a Lei de Ampère para o vetor \vec{H} temos

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I$$



onde I é a corrente total que atravessa a área do circuito, ou seja, $I = K\Delta s$. Outra vez, considerando Δl e Δs muito pequenos, podemos aproximar os integrandos como

$$H_{t_1}\Delta S - H_{n_1}\frac{\Delta l}{2} - H_{n_2}\frac{\Delta l}{2} - H_{t_2}\Delta S + H_{n_2}\frac{\Delta l}{2} + H_{n_1}\frac{\Delta l}{2} = K\Delta s$$

onde o subscrito “ t ” indica a componente tangencial a interface e o subscrito “ n ” a componente normal. Tomando o limite $\Delta l \rightarrow 0$, temos

$$\boxed{H_{t_1} - H_{t_2} = K}$$

A componente do campo \vec{H} tangente à interface tem uma descontinuidade dada pela densidade de corrente superficial \vec{K} que flui na interface

O livro texto deriva essas condições em duas seções, 5.4.2 e 6.3.3. No entanto, ele adota uma representação da condição de contorno para \vec{A} que é mais geral

$$\vec{H}_{cima} - \vec{H}_{baixo} = \vec{K} \times \hat{n}$$

onde \vec{n} aponta de “baixo” para “cima” e \vec{K} é o vetor densidade superficial de corrente.

Problema:

O plano $x = 0$ separa dois meios materiais isotrópicos e lineares. A permeabilidade magnética do meio 1 ($x < 0$) é $\mu_1 = 5\mu_0$ e a do meio 2 ($x > 0$) é $\mu_2 = 3\mu_0$. O campo magnético no meio 1 é dado por

$$\vec{B}_1 = \mu_0(-2\hat{e}_x + 3\hat{e}_y - \hat{e}_z) \left(\frac{A}{m}\right)$$

- i) Calcule \vec{H} e \vec{M} no meio 1.
- ii) Calcule \vec{H} , \vec{M} e \vec{B} no meio 2.
- iii) Calcule a densidade de corrente superficial de magnetização na interface entre os meios (a densidade de corrente de condução é nula na interface).

i)

$$\vec{H}_1 = \frac{\vec{B}_1}{\mu_1} = \frac{\mu_0}{5\mu_0}(-2\hat{e}_x + 3\hat{e}_y - \hat{e}_z) \quad \therefore \boxed{\vec{H}_1 = \frac{1}{5}(-2\hat{e}_x + 3\hat{e}_y - \hat{e}_z)}$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \quad \therefore \vec{M}_1 = \frac{\vec{B}_1}{\mu_0} - \vec{H}_1 \quad \therefore \boxed{\vec{M}_1 = \frac{1}{5}(-8\hat{e}_x + 12\hat{e}_y - 4\hat{e}_z)}$$

ii)

$$B_{n_1} = B_{n_2} \quad \boxed{\therefore B_{x_2} = -2\mu_0}$$

$$\begin{aligned} H_{t_1} = H_{t_2} & \quad \therefore H_{y_2} = H_{y_1} & H_{y_2} = \frac{3}{5} \\ & \quad \therefore H_{z_2} = H_{z_1} & H_{z_2} = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{B}_2 = \mu_2 \vec{H}_2 & \quad \therefore B_{y_2} = \frac{6}{5}\mu_0 \\ & \quad B_{z_2} = -\frac{2}{5}\mu_0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{B}_2 = \mu_0(-2\hat{e}_x + \frac{6}{5}\hat{e}_y - \frac{2}{5}\hat{e}_z)}$$

$$H_{x_2} = \frac{B_{x_2}}{\mu_0} = -1 \quad \therefore \boxed{\vec{H}_2 = -\hat{e}_x + \frac{3}{5}\hat{e}_y - \frac{1}{5}\hat{e}_z}$$

$$\vec{M}_2 = \frac{B_2}{\mu_0} - \vec{H}_2 \quad \therefore \boxed{\vec{M}_2 = -\hat{e}_x + \frac{3}{5}\hat{e}_y - \frac{1}{5}\hat{e}_z}$$

iii)

$$\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n} \quad \therefore \vec{K}_{M_1} = \vec{M}_1 \times \hat{e}_x = -\frac{4}{5}\hat{e}_y - \frac{12}{5}\hat{e}_z$$

$$\vec{K}_{M_2} = \vec{M}_2 \times (-\hat{e}_x) = \frac{1}{5}\hat{e}_y + \frac{3}{5}\hat{e}_z$$

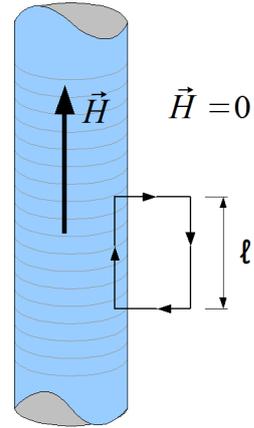
$$\vec{K}_M = \vec{K}_{M_1} + \vec{K}_{M_2} \quad \boxed{\vec{K}_M = -\frac{3}{5}\hat{e}_y - \frac{9}{5}\hat{e}_z}$$

O problema do Solenoide Infinito

Um dos problemas mais conhecidos em magnetostática é calcular o campo magnético dentro de um solenoide infinito. Este problema também é interessante para ver o efeito de materiais magnéticos.

Consideremos um solenoide muito longo ($\ell \gg a$), onde ℓ é o comprimento do solenoide e a o raio. A corrente nas espiras é I e há N espiras por unidade de comprimento.

O argumento utilizado para calcular o campo é primeiro mostrar que o campo fora do solenoide é nulo. Depois aplicamos a lei de Ampère em um circuito para calcular o campo.

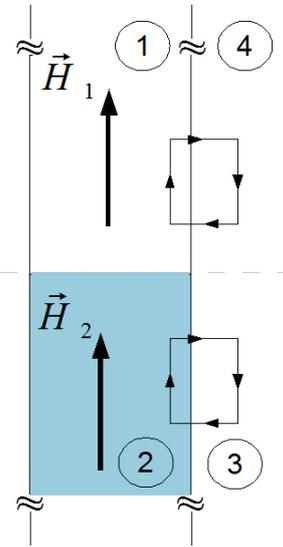


$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{total} \quad \therefore H\ell = N\ell I$$

$$\therefore H = NI$$

O que acontece agora se inserirmos em metade do solenoide um material de permeabilidade magnética $\mu = \mu_0\mu_r$? Consideremos as duas regiões, 1 sem o material e 2 com o material.

Fazendo o mesmo raciocínio que o solenoide é infinito e, portanto, o campo externo deve continuar ser nulo, podemos usar a Lei de Ampère tanto na região 1 como na 2.



$$\text{Região 1: } \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{total} \quad \therefore H_1\ell = N\ell I \quad \therefore H_1 = NI$$

$$\Rightarrow H_1 = H_2$$

$$\text{Região 2: } \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{total} \quad \therefore H_2\ell = N\ell I \quad \therefore H_2 = NI$$

Mas, na interface,

$$B_{n1} = B_{n2} \quad \therefore \mu_0 H_1 = \mu_0 \mu_r H_2 \quad \therefore H_1 = \mu_r H_2 \neq H_1$$

Como resolver este impasse?