Referência bibliográfica do texto:

GÓMEZ-GRANELL, Carmen. A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado.TEBEROSKY, A. e TOLCHINSKI, L (Organizadoras). **Além da Alfabetização: a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática.** Tradução Stela Oliveira. São Paulo: Editora Ática, 1997.

11

A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado

Carmen Gómez-Granell

Os matemáticos são uma espécie de franceses. Sempre que lhes dizemos algo, eles traduzem para a sua própria língua e imediatamente convertem em algo completamente diferente.

Goethe

Saber matemática é uma necessidade imperativa numa sociedade a cada dia mais complexa e tecnológica, em que se torna difícil encontrar setores em que esta disciplina não esteja presente. Atualmente, a maioria das ciências, inclusive as ciências humanas e sociais, como a psicologia, a sociologia ou a economia, tem um caráter cada vez mais matemático. Os comportamentos sociais, a ecologia, a economia, etc. se explicam através de modelos matemáticos. Análises estatísticas e cálculos de probabilidade são elementos essenciais para tomar decisões políticas, sociais ou econômicas e até mesmo pessoais.

Em função disso, seria lógico esperar um incremento generalizado da cultura matemática entre a população. No entanto, não é o que parece. Alguns estudos recentes, como o realizado por Lapointe, Mead e Philips (1989), comparando o rendimento de alunos de treze anos de diferentes países (Coréia, Espanha, EUA, Irlanda, Grã-Bretanha e Canadá) numa prova objetiva de matemática, mostram que em muitos desses países 40 a 50% dos alunos não alcançam o mínimo do conhecimento matemático necessário ao finalizar a escolaridade obrigatória. Em geral, existe uma preocupação crescente nos países ocidentais pelo fato de que a maioria das pessoas não alcança o nível de "alfabetização funcional" mínimo para desenvolver-se numa sociedade moderna.

O paradoxo parece estabelecido: a matemática, um dos conhecimentos mais valorizados e necessários nas sociedades modernas altamente "tecnologizadas" é, ao mesmo tempo, dos mais inacessíveis para a maioria da população, confirmando-se assim como um importante filtro seletivo do sistema educacional.

No informe Cockcroft, publicado em 1982 como resultado de pesquisa realizada por uma ampla comissão de especialistas e cujo objetivo é analisar a problemática do ensino da matemática na Inglaterra e no País de Gales, afirma-se que "a matemática é uma matéria difícil de ensinar e de aprender".

Não é arriscado pensar que tal afirmação é compartilhada por um grande número de professores, alunos, pais e cidadãos em geral. A maioria das pessoas acha a matemática "difícil e chata" e se sente insegura de sua capacidade de resolver mesmo problemas fáceis ou simples cálculos. Como afirma Paulos num interessante livro chamado *El hombre anumérico* (1990), o "a-numerismo", ou incapacidade de manejar comodamente os conceitos fundamentais de número e de acaso, atormenta muitos cidadãos que, no mais, podem ser perfeitamente instruídos... de modo que é freqüente ouvir expressões como: "Matemática não dá pra mim"; "Eu sou das letras, não entendo de números", etc. Para ilustrar essa afirmação Paulos conta uma história engraçada: quando assistia às notícias na televisão com um grupo de pessoas consideradas "instruídas", o serviço meteorológico informou que a probabilidade de chover no sábado era de cinqüenta por cento e que no domingo era também de cinqüenta por cento e que, portanto, a probabilidade de chuva no fim de semana era de cem por cento. O que mais surpreendeu Paulos não foi tanto a falta de cultura matemática do serviço meteorológico, mas o fato de nenhum dos ouvintes reagir à informação oferecida.

A matemática aparece como algo denso e enigmático até mesmo para pessoas cultas e instruídas, e não é difícil encontrar na literatura comentários de diversos autores relembrando a sua insatisfatória experiência com a aprendizagem da matemática. Marguerite Yourcenar, por exemplo, afirma em sua biografia: "A aritmética não era o meu forte, para mim parecia que os problemas não tinham nenhum sentido: quantas frutas se obtêm quando enchemos um cesto com três quartos de maçãs, um oitavo de

pêssegos e dois sextos de outra coisa? Eu não via o problema; perguntava-me por que teriam enchido um cesto daquela forma; não encontrava, assim, uma solução". Não menos curiosa é a descrição que nos oferece o escritor Philipp Roth (1970) dos problemas que seu pai lhe propunha quando era criança: "Um vendedor de roupas que queria se livrar de um casaco que já saíra de moda baixou o preço de $30 para $24. Como não conseguiu vendê-lo, voltou a baixar para $19,20. Não conseguindo encontrar comprador, baixou mais o preço e dessa vez conseguiu vendê-lo... Bem, Natham, por quanto ele vendeu para que o último preço fosse coerente com os anteriores?". Ou ainda: "Um lenhador tem seis pedaços de corrente, cada um com quatro elos. Se para abrir um elo custa...", e assim sucessivamente. "No dia seguinte, enquanto minha mãe assobiava e lavava as camisas de meu pai, eu sonhei acordado com o vendedor de roupa e o lenhador. Para quem o comerciante teria vendido o abrigo? Teria sido convidado para um baile à fantasia? Quem o teria convidado? Meu pai ficava arrasado vendo-me completamente entregue às fantasias e a detalhes sem importância — como geografia, personalidade e intenção —, em vez de à serena beleza da solução aritmética. Acreditava que eu não era inteligente; e tinha razão."

Quantos pais já não terão pensado que seu filho, por não ir bem em matemática, não é suficientemente inteligente? Quantos não se sentem inseguros ao interpretar uma estatística, ao precisar fazer cálculos para pedir um empréstimo no banco, ou ao preencher uma declaração de renda?

A linguagem matemática: "abstrato" é sinônimo de "incompreensível"?

Uma explicação para esse fenômeno estaria baseada no fato de que a natureza do conhecimento matemático é diferente, em muitos aspectos, dos outros tipos de conhecimento. Em primeiro lugar, a matemática tem um caráter de abstração muito maior que qualquer outro conteúdo. Embora existam numerosos conceitos abstratos em qualquer ciência, a diferença é que os conceitos e teoremas matemáticos não se definem por indução, mas por dedução. Isto é, o teorema de Pitágoras, por exemplo, não é verdadeiro por se aplicar a uma série de casos, mas por poder ser demonstrado mediante um método lógico-dedutivo de validação interna. Como se sabe, alguns conceitos matemáticos, como os números imaginários, por exemplo, foram definidos e demonstrados muito antes de ser encontrada alguma aplicação concreta para eles.

Por outro lado, o conhecimento matemático é profundamente dependente de uma linguagem específica, de caráter formal, que difere muito das linguagens naturais. A característica dessa linguagem é tentar abstrair o essencial das relações matemáticas, eliminando qualquer referência ao contexto ou à situação, ao ponto de na linguagem algébrica — considerada como a autêntica linguagem da matemática —, os números, em si mesmos abstratos, serem substituídos por letras, que têm um caráter muito mais genérico ($a \cdot b = c$ pode referir-se a diferentes expressões numéricas: $3 \times 4 = 12$; $140 \times 7 = 980$; $345 \times 2 = 690$; etc.).

Esse fato confere à linguagem matemática potência extraordinária e alto grau de generalização e, simultaneamente, converte-a num poderoso instrumento de inferência e criação de novo conhecimento.

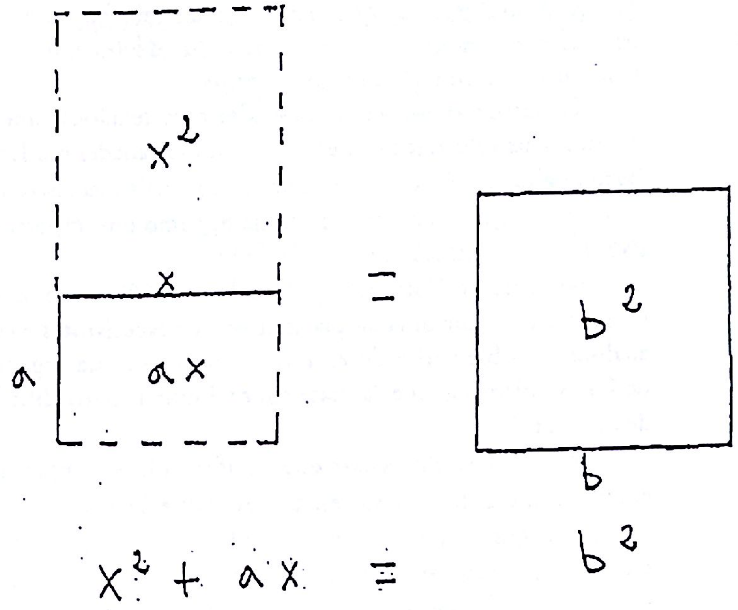
A linguagem matemática envolve a "tradução" da linguagem natural para uma linguagem universal formalizada, permitindo a abstração do essencial das relações matemáticas envolvidas, bem como o aumento do rigor gerado pelo estrito significado dos termos. Na linguagem natural, o sentido das palavras é muito mais vago e impreciso; termos como comprido, estreito, largo, pequeno, grande, muito, etc., que fazem parte da linguagem natural para expressar magnitudes, não se aplicam numa linguagem formalizada. Ao converter os conceitos matemáticos em objetos mais facilmente manipuláveis e calculáveis, tornam-se possíveis determinadas inferências que de outro modo não o seriam. A história da matemática está repleta de exemplos que mostram como a elaboração de linguagens mais complexas exigia a formulação de linguagens mais abstratas que, por sua vez, possibilitaram novos cálculos e inferências.

No exemplo a seguir, citado por Alexandrov, Kolmogorov e Laurentiev (1973), podemos observar a diferença existente entre duas formulações equivalentes de uma equação quadrada, mas pertencentes a momentos históricos distintos:

Formulação atual: "Resolver a equação $x^2 + ax = b^2$, onde *a* é um segmento dado e *b* é o lado de um quadrado".

Formulação da época grega: "Encontrar um segmento tal que, se ao quadrado construído sobre ele se somar um retângulo construído sobre o mesmo segmento, e sobre um segmento dado *a*, obtemos um retângulo de área igual à de um quadrado dado". A ilustração a seguir pode ajudar a entender ambas as formulações:

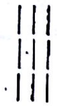
Figura 1:



É evidente que se a segunda formulação pode ser entendida praticamente por qualquer pessoa instruída, sobretudo se houver a ajuda de um desenho, a primeira envolve um nível de abstração e convencionalização muito superior, e sua compreensão, o conhecimento de determinadas regras de funcionamento da linguagem algébrica. Por outro lado, também é evidente que a primeira formulação facilita bastante o cálculo que, para a segunda, exigiria parágrafos enormes e monótonos.

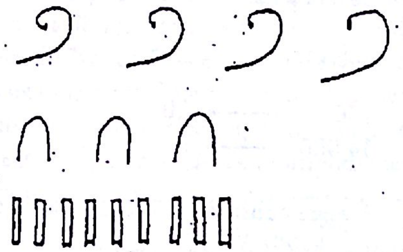
É exatamente esse nível de formalização da linguagem matemática o que possibilita a sua função principal, isto é, converter os conceitos matemáticos em objetos mais facilmente manipuláveis e calculáveis, possibilitando assim determinadas inferências que de outro modo seriam impossíveis.

Outro exemplo interessante dessa característica está representado pela invenção do Sistema de Numeração Decimal. Como sabemos, os primeiros sistemas de numeração constatados (Guitel, 1975; Ifrah, 1981), como o dos sumérios, egípcios, gregos, romanos e outros tinham caráter aditivo. Esses sistemas se denominam aditivos porque neles se atribui um sinal especial para as unidades e para cada potência da base (enquanto os egípcios utilizavam a base dez, os sumérios, por exemplo, utilizavam a base dez e sessenta); cada um desses sinais é repetido quantas vezes for necessário, sem que se combinem entre si segundo um código. No sistema de numeração egípcia, por exemplo; o número 1 se escreve |. Para escrever o número 9 repete-se este sinal nove vezes:



Para escrever o número 439, o sinal correspondente a 100 é repetido quatro vezes, o sinal correspondente a 10, três vezes e o sinal correspondente a 1, nove vezes:

Figura 2:



É fácil imaginar como se tornava longo e trabalhoso qualquer cálculo com esses sistemas aditivos. Alguns povos deram um passo importante ao elaborar sistemas de numeração denominados "híbridos", que combinam o princípio aditivo com o multiplicativo, pois os coeficientes do sistema se multiplicam pelas potências da base. Assim, por exemplo, os antigos chineses representariam o número 439 sob a forma: (4 x 100) + (3 x 10) + 9.

Observe-se que, tanto nos sistemas aditivos como nos multiplicativos ou "híbridos", a posição ou o lugar em que se escrevem os algarismos não tem nenhuma relevância. A grande contribuição do Sistema de Numeração Decimal com o qual trabalhamos consiste, precisamente, em conjugar o princípio da base e da combinação dos princípios aditivos e multiplicativos com outro aspecto essencial: a atribuição de um caráter dinâmico e variável a cada um dos dígitos da base, que podem ser combinados entre si adotando um valor ou outro de acordo com *a posição* que ocupam. A explicitação da multiplicação do coeficiente pela potência da base [$222 = (2 \times 10^2) + (2 \times 10) + 2$], presente nos sistemas "híbridos", é substituída por um código de posição; o valor de "2" (duas unidades, duas dezenas, duas centenas) depende do lugar que o número ocupa.

A invenção e difusão do Sistema de Numeração Decimal constitui uma contribuição extraordinária que poderíamos comparar, sem nenhum exagero, à suposta modernização produzida pelas calculadoras e pelos computadores, porque facilitou o cálculo e, conseqüentemente, permitiu a evolução da matemática.

Se abordo esses aspectos é porque, a meu ver, o fato de a linguagem formal ser algo tão essencial e constitutivo do conhecimento matemático justifica que, tradicionalmente, o ensino da matemática tivesse como objetivo fundamental o ensino dessa mesma linguagem. Nesse ponto, poderíamos perguntar:

a) A matemática é apenas uma linguagem? Ou melhor: em que sentido é linguagem?; a matemática como uma linguagem formal e autônoma implica a necessidade de algum significado que não seja formal, algum vínculo com a realidade?

b) A maioria das pessoas carece realmente da capacidade de abstração necessária para dominar linguagens formais? Ou o processo de ensino adotado é inadequado?

A questão se a matemática é ou não uma linguagem, mais precisamente, se é *unicamente* uma linguagem, tem sido objeto de inúmeros debates e controvérsias. Embora o objetivo deste artigo não seja se aprofundar no debate de caráter epistemológico, poderíamos afirmar, *grosso modo*, que a polêmica se estabelece entre aqueles que têm uma concepção muito restritiva da linguagem matemática, priorizando, assim, sua função formal, e outros para os quais qualquer expressão formal tem um significado referencial a ser levado em conta. Os primeiros defendem uma concepção formalista da matemática, segundo a qual a matemática consistiria na manipulação de sinais escritos de acordo com determinadas regras. Os segundos, sem negar a função constitutiva que a linguagem formal tem no pensamento matemático, opinam que sempre é possível atribuir um significado aos símbolos que se manipula.

Na verdade, essa polêmica não é trivial e traz conseqüências importantes para o ensino da matemática. Tomemos, por exemplo, a expressão (a . b) = (b . a), que se refere à lei da comutatividade da multiplicação. Se transitamos no nível algébrico ou no nível numérico (4 x 5 = 5 x 4; 3 x 6 = 6 x 3, etc.) a regra se confirma. No entanto, se nos detemos numa situação específica, com um determinado significado semântico, a regra deixa de ser cumprida: a expressão "4 caramelos custam 6 pesetas cada um" não é equivalente à expressão "6 caramelos custam 4 pesetas cada um".

Do mesmo modo, a expressão matemática a : b = c remete a uma operação de divisão. No entanto, do ponto de vista semântico é possível distinguir dois tipos de situações de divisão:

a) Divisão como repartição. Neste tipo de divisão um "total" (dividendo) é dividido em um determinado número de partes (divisor) e a incógnita (quociente) corresponde ao número de elementos de cada parte. Ex.: "No dia do seu aniversário Alberto tinha 48 caramelos e queria reparti-los entre 6 amigos. Quantos caramelos cada amigo deveria receber?".

b) Divisão-partição. Neste tipo de divisão, um "todo" (dividendo) é dividido em partes equivalentes de "n" elementos (divisor) e a incógnita (quociente) corresponde ao número de partições realizadas. Ex.: "Maria tem 27 pesetas e quer comprar guloseimas. Quantas poderá comprar se cada uma vale 3 pesetas?"

De forma idêntica, além da divisão, poderíamos distinguir situações de soma, subtração ou multiplicação que respondem a uma mesma expressão matemática cuja estrutura semântica, no entanto, é muito distinta, tal como já foi demonstrado por diversos autores (Riley, Greeno e Heller, 1983; Vergnaud, 1981; Carpenter, Moser e Romberg, 1982; Gómez-Granell, 1988).

Poderíamos dizer, resumindo, que os símbolos matemáticos possuem dois significados. Um deles, estritamente formal, que obedece a regras internas do próprio sistema e se caracteriza pela sua autonomia do real, pois a validade das suas declarações não está determinada pelo exterior (contrastação empírica). E o outro significado, que poderíamos chamar de "referencial", que permite associar os símbolos matemáticos às situações reais e torná-los úteis para, entre outras coisas, resolver problemas. Isto é, o problema reside no fato de que, embora as expressões matemáticas façam, por um lado, referência a situações em que aparecem relações quantitativas — portanto, podendo ser matematizadas —, por outro, para que tais expressões pertençam ao domínio da matemática devem ser totalmente autônomas em relação aos contextos e situações específicas de referência. Esse aparente paradoxo tem levado a duas tendências distintas dentro do ensino de matemática.

Predominância dos aspectos sintáticos no ensino da matemática

As concepções formalistas a que nos referimos anteriormente foram, no passado, predominantes entre os matemáticos e influenciaram o ensino da matemática de tal modo que este se baseou muito mais na manipulação sintática de símbolos e regras do que no significado dos mesmos.

Partindo, por exemplo, de uma perspectiva puramente sintática, o algoritmo, para encontrar o tanto por cento de uma quantidade, apóia-se na lei dos "produtos cruzados" para demonstrar a equivalência das duas razões:

se (a . d) = (b . c)

Vejamos o seguinte problema:

"João foi a uma loja e comprou roupas no valor de 34 000 pesetas. Como era uma liquidação houve um desconto de 20%. Quanto ele deverá pagar?".

Solução:

100 ——— 20
34 000 ——— x   x =

A regra consiste em multiplicar entre si as duas quantidades dos extremos e dividir o resultado por 100. Em muitas ocasiões comprovamos que nenhum aluno/a, e nem a maioria dos professores, compreende a lógica de tal algoritmo e muito menos a da regra dos "produtos cruzados". Poderíamos dizer o mesmo de muitas outras regras, como somar ou subtrair com reserva, somar ou multiplicar frações com diferentes denominadores, simplificar frações, dividir por um número decimal, eliminar parênteses, etc., que o professor ensina com frases como estas: "quando são dezenas, vai um; quando são centenas, vão dois; cruza e multiplica; muda a vírgula de lugar; se multiplicar em cima multiplica também embaixo; etc.".

Vários trabalhos demonstraram que boa parte dos erros que os alunos cometem deve-se ao fato de terem aprendido a manipular símbolos de acordo com determinadas regras, sem se deterem no significado dos mesmos.

Um exemplo citado por Resnick, Cauxinille-Marmeche, Mathiei (1987) ilustra muito bem esse problema. Uma menina de nove anos conhece o algoritmo da subtração com reserva. Quando lhe propuseram que solucionasse estas duas operações, 36 – 27 e 27 – 36, a criança aplicou a mesma regra para ambos os casos: sempre subtraindo o número menor do maior. Quando lhe perguntaram por que, a menina afirmou que a professora tinha ensinado que sempre se deve diminuir colocando o número maior em cima. É evidente, como bem afirma Resnick, que a criança aplica a regra que lhe foi ensinada, mas não é capaz de conectar a regra nem com seu conhecimento procedimental para resolver subtrações com reserva e nem, é claro, com o seu conhecimento conceitual do valor posicional e a lógica da subtração.

Outro erro típico consiste, por exemplo, em somar quantidades sem considerar o procedimento de "vai um":

$$\begin{array}{r} 24 \\ +\,48 \\ \hline 612 \end{array}$$

É evidente que qualquer aluno de oito anos sabe, de cabeça, que o resultado de 24 + 48 não pode ser 612. No entanto, sem se ater ao significado, ele respeita a aplicação do procedimento que domina — somar sem utilizar a técnica do "vai um" — e o aplica fazendo a extrapolação ou supergeneralização de uma regra. Esse fenômeno da supergeneralização ou extrapolação é muito freqüente também quando os alunos começam a estudar álgebra. Por exemplo, a operação de multiplicar se expressa algebricamente pela justaposição de símbolos: a x b ——— ab; visto que em aritmética a justaposição de símbolos tem um significado distinto (4 1/2 não significa 4 x 1/2, nem 34 significa 3 x 4), os alunos que começam com álgebra tendem a interpretar que, se a = 5 e b = 6, então ab = 56, em vez de 30. Ou ainda aplicam a regra da eliminação do sinal + de aritmética (4 + 0,5 = 4,5) à álgebra: 3a + 5b ——— 8ab (Hart, 1981).

Os professores se desesperam com essas respostas "ilógicas" e dirigem aos alunos frases como: "Você não vê que isto não pode ser? Não tem lógica, preste mais atenção", etc. No entanto, muitas vezes não estamos conscientes de que, se o ensino foi baseado muito mais na aplicação de regras que na compreensão do significado; talvez o "ilógico" fosse os alunos se interessarem por tais significados. Como afirma D. Pimm (1990), "minha hipótese de que o significado orientava a opção correta parecia algo totalmente novo para os estudantes que achavam que a matemática consistia na formulação e manipulação de cadeias de símbolos segundo diversas regras".

Nas tendências de ensino predominantemente sintáticas, parece que as pessoas se esqueceram ou não querem aceitar que, como bem diz Rotman (1980), "em toda expressão matemática é necessário reconhecer um significado formal intrínseco — no qual uns símbolos fazem referência a outros dentro de um código específico —, e um significado pragmático — que permite a tradução para sistemas de signos não matemáticos (linguagem natural, imagens e representações icônicas, ações, etc.) —, e associar tais expressões ao seu significado referencial".

Predominância dos aspectos conceituais e semânticos no ensino de matemática

Como alternativa para tais tradições sintáticas, aparecem tendências que vêm sendo denominadas como conceituais ou, mais recentemente, como semânticas. Embora se encontrem opções muito distintas dentro dessa corrente, que vão desde as propostas didáticas baseadas nas teorias de Piaget ou Bruner até os atuais estudos sobre a construção de conceitos matemáticos (Vergnaud, Brousseau, Carpenter, Gelman, etc.), ou a resolução de problemas (Hiebert, Riley, Greeno, etc.), optamos por colocá-las sob a mesma epígrafe porque todas possuem duas características comuns, a saber:

Em primeiro lugar, todas as perspectivas se caracterizam por dar prioridade ao estudo dos aspectos conceituais da matemática. O importante é que os alunos entendam ou construam o significado dos conceitos matemáticos. Isto é, trata-se de entender o significado das operações básicas (soma, subtração, multiplicação e divisão), do número fracionário ou decimal, da proporcionalidade, das relações geométricas, das transformações algébricas, etc. Tanto nos trabalhos realizados com a aquisição de conceitos como nos de resolução de problemas admite-se que as crianças manifestam, desde idades muito precoces, procedimentos e formas próprias de raciocínio, de caráter não formal — portanto, diferentes daqueles que a matemática propõe e ensina na escola —, que lhes permite ir construindo progressivamente os significados matemáticos.

Partindo desse ponto de vista, o ensino da matemática deveria potencializar o uso de procedimentos dos próprios alunos, mesmo que não sejam de caráter formal e sim intuitivo.

Em segundo lugar, explícita ou implicitamente, dessa perspectiva atribui-se um papel secundário à linguagem, que é considerada mera tradução do conceitual. Em geral se pensa que se os alunos entendem o significado dos conceitos e procedimentos matemáticos, não têm nenhuma dificuldade de dominar a linguagem formal. Essa idéia também está refletida no fato de existirem pouquíssimos trabalhos orientados especificamente para o problema da aquisição da linguagem matemática. Os mais relevantes talvez sejam uma série de pesquisas (Sastre e Moreno, 1976-77; Schubauer-Leoni e Perret-Clermont, 1980; Sellarés e Bassedas, 1983; Conne, 1985) que foram realizadas tendo como base os trabalhos de Doise, Mugny e Perret-Clermont (1975) sobre o conflito sociocognitivo.

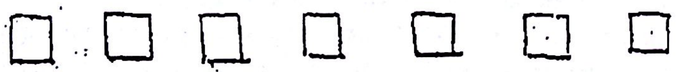
Todos esses trabalhos partem da idéia de que o ensino de matemática é excessivamente verbal e não se baseia suficientemente na manipulação e na ação. Assim, as crianças primeiro devem construir o significado das operações matemáticas fundamentalmente através da manipulação e da ação. Uma vez tendo construído tais significados, os alunos poderão traduzir esse conhecimento em linguagem simbólica a partir de situações em que é necessário transmitir tais conceitos a outras pessoas. Nos trabalhos mencionados, de um modo geral, são apresentadas situações de comunicação referencial nas quais uma ou várias crianças devem representar no papel algumas transformações matemáticas — resoluções de equações simples ($a + b = c$; $a - b = c$; $a \times b = c$; $a : b = c$, etc.) efetuadas praticamente na frente delas —, que deverão ser interpretadas por um colega que não estava presente durante a resolução.

Os resultados destes trabalhos demonstram que, em certos níveis de desenvolvimento, as crianças não recorrem aos algoritmos convencionais para representar tais transformações, mas sim a representações próprias, baseadas fundamentalmente no desenho e na linguagem natural. A partir disso infere-se:

a) Que o desenho é um antecedente natural da escrita simbólica.

b) Que as crianças passam do desenho para os símbolos matemáticos através de um processo de progressiva abstração (do mais parecido com o objeto ao mais abstrato) e convencionalização, fruto do conflito sociocognitivo que se produz quando o receptor da mensagem não a entende. Isto é, suponhamos que para representar 3 + 4 = 7, uma criança fizesse o seguinte desenho:

Figura 3:



Se, como é previsível, o receptor não entende a mensagem, produz no emissor um conflito sociocognitivo que o fará entrar em acordo com o outro e procurar uma representação mais convencional que permita a comunicação. Por exemplo:

Figura 4:

Serão a necessidade de comunicação e a convenção que, com o tempo, farão incorporar o algoritmo da soma.

Essa concepção implica uma série de suposições que, a meu ver, precisam ser revistas:

Em primeiro lugar, a necessidade de comunicação não é o único nem o mais importante fator que determina a procura, em nível histórico, de uma linguagem formal. A função essencial dos símbolos matemáticos é a inferência, portanto, na base da sua invenção está a necessidade de procurar códigos — cada vez mais abstratos e rigorosos — que a tornam possível.

Em segundo lugar, tanto na história do pensamento matemático (ver os exemplos citados previamente) como no nível psicológico há uma forte evidência de que não existe uma dependência direta nem da escrita (Ferreiro e Teberosky, 1984b) nem da notação numérica ou algébrica com relação aos aspectos conceituais, como demonstram os trabalhos de Ferreiro e Teberosky (1984b), Resnick (1989), Gómez-Granell (1988, 1991) ou Tolchinsky-Landsmann e Karmiloff-Smith (1993).

Da mesma forma, também não parece certo que o desenho seja o predecessor natural da escrita, nem que exista uma relação de continuidade entre as expressões icônicas e não-icônicas.

Por um lado, os trabalhos já mencionados de Danzing, Ifrah ou Guitel sobre a história da numeração escrita, colocaram em evidência que tanto na invenção da notação numérica como na progressiva procura de uma linguagem formal ocorre um processo de interação entre as formas icônicas e não-icônicas, entre linguagem natural e formal. Assim, por exemplo, num interessante artigo para demonstrar a origem comum da notação numérica e da escrita, Schmandt-Besserat (1978) explica como aparecem nos documentos mais antigos da escrita suméria, que consistem em pequenas placas de argila, dois tipos de marcas perfeitamente diferenciadas: umas de caráter esquemático, que representavam os algarismos e que provavelmente correspondiam às marcas feitas na argila com as pedrinhas de diferentes formas e tamanhos (*"calculi"*), usadas para representar as quantidades; outras, que podiam ser icônicas ou não, usadas para representar diversos objetos e que provavelmente constituem um antecedente da escrita.

Do mesmo modo, são numerosos os exemplos históricos que demonstram a interação, e não a filiação direta, entre linguagem natural e simbólica. Uma revisão histórica dos livros e tratados matemáticos nos mostra que a presença da linguagem natural para formular certas relações matemáticas foi muito forte até finais do século XIX. Embora o recurso de utilizar as letras na geometria, por exemplo, já fosse utilizado pelos gregos e os árabes para designar pontos, linhas, etc., no século XVII subsistiam explicações de resolução de equações em linguagem natural.

Por outro lado, existem trabalhos no campo da língua escrita (Ferreiro e Teberosky, 1984b), da notação numérica (Tolchinsky e Karmiloff-Smith, 1993) e da simbolização de algoritmos de operações aritméticas (Gómez-Granell, 1988) que demonstram não existir uma relação de subordinação entre o desenho e a escrita ou entre o desenho e a notação numérica. Ou seja, não é certo que as crianças primeiro desenhem e em seguida, por necessidade de abstração e convencionalização, passem a usar letras, números ou símbolos matemáticos. Muito pelo contrário, parece que as crianças, graças à interação com o meio social e cultural, conhecem e usam de forma diferenciada letras, algarismos e desenho. Contudo, em princípio, tal conhecimento é mais de caráter formal que funcional; isto é, as crianças diferenciam as características formais de cada sistema e sabem muito bem o que é uma palavra escrita, um algarismo, um símbolo aritmético ou um desenho, mas isso não quer dizer que tenham um conhecimento mais profundo da semântica interna de cada um deles e de seus usos. No caso concreto da notação numérica, as autoras afirmam que o uso do desenho constitui um recurso usado num nível de desenvolvimento em que se torna necessário explicitar a semântica do sistema para apropriar-se da mesma internamente. Só depois dessa apropriação interna é possível prescindir do significado diferencial do símbolo e ficar somente com o formal. Esses resultados coincidem com os encontrados num trabalho de pesquisa que realizamos (Gómez-Granell, 1988) e do qual descreverei em seguida alguns exemplos.

Para esse trabalho foram entrevistadas crianças de idades entre sete e doze anos. Nas entrevistas, pedia-se às crianças, em primeiro lugar, que manipulando caramelos e dinheiro solucionassem dois problemas simples de multiplicação ("se 1 caramelo custa 6 pesetas, verifique quanto custam 6 caramelos") e de divisão ("se 1 caramelo custa 3 pesetas, quantos caramelos se pode comprar com 18 pesetas"). Em seguida, pedia-se a elas que representassem no papel as transformações realizadas, de modo que a mensagem pudesse ser interpretada por um colega ausente. Os resultados obtidos nos permitiram estabelecer três níveis:

a) No primeiro, as crianças ou usam desenhos para representar certos aspectos da situação (uma loja, as pessoas que compram e vendem os objetos da loja, etc.), ou então usam algarismos isolados para representar as quantidades de pesetas ou caramelos, mas em nenhum caso conseguem expressar a ação ou transformação que os relaciona.

b) No segundo nível, as crianças conseguem representar a transformação realizada mediante dois procedimentos:

1. Uma soma de parcelas iguais. Se, por exemplo, a operação realizada é 4 caramelos a 3 pesetas cada um, as crianças escrevem: 3 + 3 + 3 + 3 = 12.

2. Uma representação figurativa que é uma cópia praticamente exata da transformação realizada em nível prático e que mostra a correspondência múltipla entre caramelos e pesetas:

Figura 5:

Ambos os procedimentos, que algumas vezes aparecem juntos na mesma produção, permitem inferir que a criança está explorando a semântica da operação multiplicativa que se baseia na soma de coleções equivalentes e na correspondência múltipla.

c) Finalmente, no terceiro nível, os sujeitos associam as transformações realizadas com o algoritmo convencional da multiplicação e da divisão.

Numa segunda fase da pesquisa, para aquelas crianças que tinham usado corretamente o algoritmo da multiplicação e da divisão foi pedido que solucionassem por escrito um problema de proporcionalidade. O problema era o seguinte:

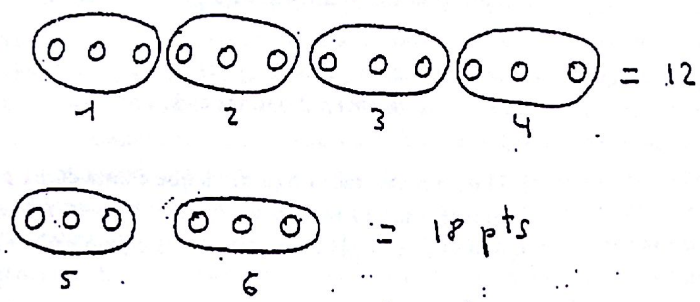
Quatro caramelos custam 12 pesetas. Quanto custarão 6 caramelos do mesmo tipo?

Encontramos três tipos de procedimentos ou estratégias de resolução:

1. Procedimentos aditivos que não respeitam a correspondência múltipla:
A criança escreve: 6 caramelos custarão 14 pesetas.

2. Procedimentos figurativos que procuram estabelecer o preço unitário:

Figura 6:



3. Procedimentos não-figurativos. Uso dos algoritmos de multiplicação e divisão.

Ou seja, muitas crianças que utilizaram corretamente o algoritmo da multiplicação e da divisão nos problemas simples em que estas operações apareciam recorreram ao desenho quando se tratou de aplicá-las num contexto mais complexo, como o da proporcionalidade. Esses dados reforçam, por um lado, a hipótese sobre a função que o desenho cumpre como instrumento para a criança explicitar e representar mentalmente a semântica interna da operação — o jogo de relações a que temos nos referido como significado referencial —, e que o símbolo formal não reflete.

Como já foi dito anteriormente, a linguagem formal caracteriza-se por suprimir o conteúdo semântico e expressar, da maneira mais geral e abstrata possível, o essencial das relações e transformações matemáticas. Este é um longo processo no qual a interação e a dialética entre os aspectos matemáticos e extramatemáticos das diferentes situações assumem um papel fundamental. E é assim porque existe, tanto no nível ontogenético quanto filogenético, uma grande resistência do pensamento humano em abandonar o conteúdo do objeto expressado pela linguagem natural e pelo desenho, para substituí-lo pelo símbolo formal.

A história da álgebra é, por exemplo, uma das maiores demonstrações da resistência do pensamento humano em abandonar "o conteúdo do objeto" expressado mediante linguagem natural, para substituí-lo "pelo símbolo". É interessante observar como, por exemplo, somente no século XV, graças a Franciscus Vieta, resolveu-se um dos problemas mais curiosos da história da álgebra: a utilização de um mesmo tipo de símbolo para representar dois objetos que desempenham, numa mesma equação, diferentes papéis, o da incógnita e o dos valores dados. Na verdade, durante mui-

to tempo ambos os dados foram expressados de forma diferente de modo que o número desconhecido e o dado deviam ser diferenciados porque o valor semântico era diferente (a incógnita, por exemplo, tinha sido denominada "arithmos", "res", etc.). Vieta propôs o uso de um mesmo tipo de símbolo para ambos os conceitos: as letras do alfabeto. Símbolos que, por outro lado, não tinham nada a ver com o significado dos conceitos que representavam. Dessa forma, Vieta propôs que se usassem as primeiras letras do alfabeto: as vogais simbolizariam as incógnitas e, as consoantes, os valores dados. Embora isso logo tenha sido substituído pelo uso das primeiras letras (a, b, c, etc.) para os valores dados e as últimas (x, y, z) para a incógnita, o princípio de Vieta continua sendo válido.

Por outro lado, os dados demonstram também outro aspecto interessante. Já vimos como uma mesma criança pode usar o algoritmo convencional da divisão para resolver um problema familiar e recorrer a desenhos ou esquemas para resolver a mesma operação situada num problema de proporcionalidade cuja estrutura semântica é, portanto, mais complexa. Isto é, o importante não é determinar se os alunos possuem ou não um certo procedimento para resolver uma operação, mas em que condições tal procedimento pode ou não ser atualizado. Na resolução de problemas essas condições são dadas pelo contexto ou pela estrutura semântica do problema e não só pelas operações matemáticas implicadas. Tal e como evidenciam numerosos estudos atualizamos ou não os nossos conhecimentos em função de certas variáveis contextuais, ou o que dá no mesmo, construímos nossos conhecimentos *usando-os* em múltiplos e diferentes contextos.

Rumo a uma integração das tendências semânticas e sintáticas

As orientações que dão prioridade aos aspectos de caráter sintático apresentam o problema de que os alunos aprendem a manipular símbolos segundo uma série de regras que não entendem. Isso faz com que, para eles, seja muito difícil associar tais símbolos ao seu significado referencial, portanto, usá-los para resolver problemas de forma significativa.

As tendências mais conceituais, por sua vez, apresentam o problema de que a compreensão do significado de uma operação ou de uma transformação mediante o uso de procedimentos intuitivos e situações concretas não garante o acesso aos símbolos abstratos da aritmética e, sobretudo, da álgebra. Ou seja, o conhecimento conceitual não implica absolutamente um conhecimento das regras sintáticas e das convenções de notação próprias do simbolismo matemático.

Tanto na aritmética elementar como na álgebra pode-se encontrar numerosos exemplos disso. O valor relativo dos algarismos, as regras de escrita de números de mais de um algarismo, os algoritmos das operações, a medida de diferentes magnitudes, as operações com parênteses, a simplificação de frações, a procura do mínimo múltiplo comum, a resolução de equações, a resolução de integrais, etc., exigem, além de um conhecimento conceitual, o domínio de uma série de regras e convenções que também é necessário aprender e ensinar. As orientações conceituais têm caído com freqüência num grave erro: acreditar que, como se pode resolver muitas operações e problemas mediante procedimentos intuitivos, ou não é necessário ensinar os procedimentos formais ou então se pode passar de uns procedimentos a outros de forma automática, de modo que na maioria das ocasiões isso faz com que se dê um "salto mortal" entre o conceitual e o simbólico. Paradoxalmente, tornamos a voltar no mesmo problema: os alunos continuam manipulando símbolos sem associá-los ao seu significado referencial porque existe uma dissociação total entre os aspectos semânticos e os sintáticos. O problema fundamental que se coloca é, então, como fazer que os alunos passem dos procedimentos não-formais e intuitivos às expressões simbólicas próprias da linguagem formal, e vice-versa.

A meu ver, saber matemática implica dominar os símbolos formais independentemente das situações específicas e, ao mesmo tempo, poder devolver a tais símbolos o seu significado referencial e então usá-los nas situações e problemas que assim o requeiram. No começo deste artigo perguntei se a matemática era ou não uma linguagem. A resposta poderia ser afirmativa admitindo, em primeiro lugar, que tal como ocorre com qualquer linguagem, o domínio da linguagem matemática implica também um conhecimento de aspectos sintáticos e semânticos. Em segundo lugar, seria preciso admitir que essa linguagem matemática constitui uma forma de discurso específico que, embora guarde estreita relação com a atividade conceitual, mantém a sua própria especificidade como um discurso lingüístico. Portanto, seria necessário que a pesquisa psicológica ou psicopedagógica se orientasse não somente para o estudo das dificuldades conceituais que a aprendizagem da matemática apresenta, mas também para o estudo dos problemas derivados da aprendizagem da formulação na matemática. Finalmente, não se pode esquecer que aprender uma linguagem não é aprender uma série de regras e sim adquirir um grau de competência comunicativa que permita usar tal linguagem adequadamente.

Embora não dispomos de muitos estudos nessa direção, acredito que pode ser interessante oferecer algumas sugestões a serem consideradas ao

promover uma aprendizagem de matemática que procure associar os aspectos sintáticos e os semânticos:

1. Os conceitos e procedimentos matemáticos devem ser ensinados de forma contextualizada.

Em primeiro lugar, é necessário erradicar a idéia de que matemática é algo excessivamente abstrato, difícil e inacessível. Embora seja verdade que podem existir tendências ou estilos cognitivos mais propícios ao raciocínio abstrato, assim como patologias específicas que dificultam o raciocínio matemático, a maior parte das pessoas pode aprender matemática sem nenhuma dificuldade, desde que tal aprendizagem esteja vinculada a contextos e situações que sejam cultural e socialmente significativos. Nos últimos anos, numerosos estudos provenientes do campo da psicologia transcultural, como os realizados por Lave (1988), Scribner (1984) ou Carraher, Carraher e Schielman (1982), têm demonstrado que algumas pessoas, mesmo tendo sido escolarizadas, não eram capazes de resolver certas provas e problemas aritméticos de caráter acadêmico. Essas mesmas pessoas, no entanto, eram muito competentes nas atividades cotidianas e profissionais que requeriam cálculos de caráter abstrato e de dificuldade isomorfa à das provas mencionadas, além de solucionar também problemas mediante procedimentos não-formais, embora eficazes. Esses trabalhos abordam a idéia de que os conhecimentos se constroem *ao serem usados* em contextos sociais e culturalmente organizados e que, como afirmamos anteriormente, atualizamos ou não certos procedimentos em função de aspectos variáveis contextuais.

Outros autores, como Greeno (1991) ou Resnick et alii (1987) levantam também a idéia de que os conhecimentos relativos a diferentes domínios se constroem *ao serem usados* em contextos e situações sociais e comunicativas. Possuir representações de conceitos e procedimentos é tão importante quanto possuir as habilidades e condições necessárias para o seu uso num contexto determinado. James G. Greeno (1991) sugeriu a idéia de considerar os diferentes domínios conceituais como "ambientes" em que as pessoas podem aprender a viver; e a maneira como as pessoas aprendem a viver num ambiente depende, fundamentalmente, das atividades que têm nele. Portanto, se queremos ensinar matemática de uma forma significativa, o primeiro que deveremos conhecer são *os usos e as funções* que o conhecimento matemático cumpre em nossa sociedade e situar a aprendizagem dos conceitos e procedimentos matemáticos no contexto de tais usos e funções. Estas reflexões nos conduzem diretamente à nossa segunda sugestão.

1. Como a aplicação de uma regra desvinculada de qualquer significado, que consiste em que o valor de cada algarismo depende do lugar que ocupa no número.

2. Explicando o princípio multiplicativo em que se apóia e tentando que os alunos associem a regra em questão (o código de posição, que é totalmente arbitrário) a tal princípio. Que o nosso Sistema de Numeração Decimal é regido, entre outras coisas, por um princípio de relatividade do valor dos algarismos em função da posição que ocupam, é um fato convencionalmente estabelecido. Os alunos deverão aceitar e aprender este fato, mas o farão mais facilmente se compreenderem:

a) O princípio multiplicativo segundo o qual 333 = (3 x 100) + (3 x 10) + 3.

b) Que mesmo que explicitemos a base (cem, dez, um), a posição não importa (poderíamos escrever 333 = (3 x 100) + 3 + (3 x 10)); um sistema posicional implica substituir tal explicitação por um *código arbitrário de posição*.

Outro exemplo é o da regra da mudança de sinal em álgebra. Essa regra é: se tirarmos um parêntese que seja precedido de um sinal –, o sinal dentro do parêntese deverá ser mudado [a – (b + c)] = a – b – c. A justificação da regra é clara através da equivalência semântica entre os dois problemas seguintes:

"João tem 30 caramelos. Dá 20 aos amigos, 8 a Luís e 12 a Inácio";
"João tem 30 caramelos. Dá 8 a Luís e depois 12 a Inácio".

Se o primeiro problema pode ser representado através de uma expressão aritmética 30 – (8 + 12), o segundo corresponde à expressão 30 – 8 – 12. Resnick et alii (1987) demonstraram que se muitos alunos são capazes de inventar um problema para a expressão 30 – 8 – 12, são poucos os que conseguem inventar um problema para 30 – (8 + 12). No entanto, esses mesmos alunos podem aplicar corretamente a regra quando é pedido que coloquem parênteses na expressão 30 – 8 – 12. Fica evidente que no processo de ensino a regra não foi relacionada com o conhecimento das transformações aditivas que os alunos possuem.

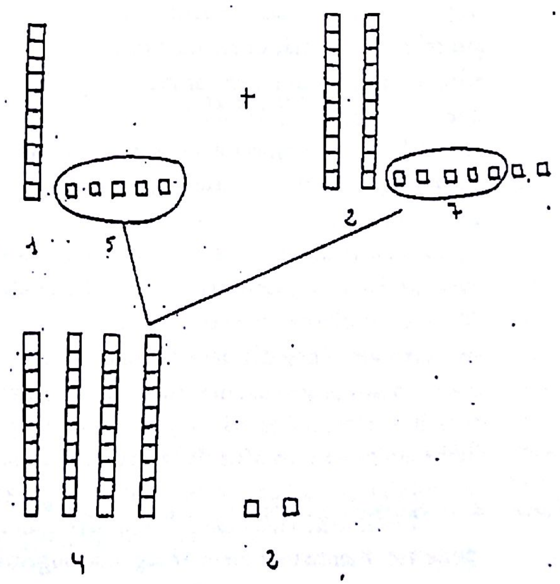
O Grupo Azarquiel (1992) também apresenta um exemplo significativo a esse respeito. À questão sobre para qual valor de *x* vale a igualdade 3x = 12, muitos alunos respondem "nove". A justificativa é a seguinte: "como o 3 que vai junto do *x* não tem nenhum sinal na frente, isso quer dizer que o sinal que ele tem é + (sinal indicador de que o 3 é um número positivo mas que também é o sinal da soma), logo é +3, e como está somando em um lado da igualdade, passa para o outro lado diminuindo, portanto, 3x = 12 se transforma em: x = 12 – 3, que é igual a 9". A explicação desse erro é bem clara: a equação 3x = 12 não foi associada a nenhuma situação com um referente concreto conhecido pelos alunos, o que faz com que eles apliquem uma regra conhecida, formalmente correta e adequada, para outra situação ou problema, mas sem sentido na equação proposta. No entanto, nada mais fácil do que dar sentido referencial a essa equação com um problema simples que todos os alunos conhecem e podem associar com a mesma: "Calcule o número pelo qual deve multiplicar 3 para obter 12".

5. Aplicar modelos concretos.

Esse aspecto, como se poderá observar mais adiante, é imediatamente decorrente do anterior. Para que os alunos associem os símbolos matemáticos ao seu significado referencial não basta fomentar o uso das estratégias pessoais dos alunos. É necessário que o professor proponha *modelos* que permitam entender a semântica da operação ou transformação. Tais modelos podem ser de diversos tipos: manipulativos, verbais, gráficos ou até de caráter simbólico (modelos aritméticos para as regras algébricas).

Vejamos, por exemplo, um modelo que pode ajudar a compreender o algoritmo da soma com a técnica do "vai um":

Figura 7:



2. A resolução de problemas pode ser um instrumento de contextualização.

A resolução de problemas foi habitualmente usada no ensino da matemática como uma forma de aplicar os conhecimentos previamente adquiridos. Isto é, o problema tem sido utilizado para avaliar se os alunos aprenderam um determinado procedimento e se são capazes de aplicá-lo genericamente. O processo habitual de ensino costuma ser ensinar um conceito ou algoritmo e depois expor um problema para comprovar se este foi adquirido ou não.

No entanto, a resolução de problemas pode cumprir uma outra função muito mais importante como instrumento, para propor situações que requeiram uma solução matemática e que permitam o levantamento de questões, a pesquisa, a discussão, a exploração e a especulação, além da contextualização das operações.

3. Os procedimentos próprios, intuitivos ou não-formais são instrumentos para explorar o significado dos conceitos e procedimentos matemáticos.

O uso de procedimentos intuitivos ou estratégias pessoais para resolver cálculos ou problemas é um recurso didático bastante divulgado atualmente nas aulas de matemática, sobretudo nos níveis mais elementares. A idéia que sustenta essa prática é que, utilizando os próprios recursos, os alunos resolvem operações e problemas com mais facilidade que aplicando símbolos abstratos e algoritmos convencionais.

Mesmo que esteja certo, acredito que às vezes a insistência é exagerada nesse aspecto da "facilidade de resolução" — associando-o até com o fato de os alunos "perderem o medo" de matemática — e não na verdadeira função desses procedimentos. Como já foi assinalado, as crianças recorrem ao desenho, aos procedimentos figurativos ou icônicos, à linguagem natural, aos procedimentos intuitivos em geral, porque lhes permitem explicitar mais facilmente a semântica da operação e assim construir uma representação mental interna da mesma. E é nesse sentido que se torna necessário estimular o uso de tais procedimentos. Temos observado nas aulas de matemática que muitas vezes alguns alunos não conseguiam resolver um problema através do uso de algoritmos convencionais, mas resolviam com facilidade se pedíssemos que usassem suas próprias estratégias (esquemas, desenhos, pauzinhos, etc.). O mais importante não era isso, mas sim que depois estavam muito mais capacitados para explicar as relações e transformações pertinentes ao problema.

Contudo, convém não esquecer que nosso objetivo nas aulas de matemática deve ser que os alunos cheguem a usar com rapidez, embora também de modo significativo, tais símbolos e algoritmos. Na maioria das vezes os procedimentos intuitivos que os alunos usam estão tão distanciados das formulações próprias da matemática que é muito difícil associar os dois aspectos. Vejamos um exemplo:

Para resolver uma divisão com dois algarismos no divisor muitos alunos fazem o seguinte:

197 : 32 ——— 32
32
32
96
32
32
32
192

Resultado: 6 e sobram 5.

Tal procedimento (ou realizar sucessivas subtrações: 197 – 32 = 165; 165 – 32 = 133; etc.) de caráter aditivo pode ajudar o aluno a entender a semântica da operação de divisão, mas dificilmente lhe ajudaria a entender a semântica do algoritmo convencional escrito da divisão, que implica, por outro lado, a aplicação de certos princípios próprios do sistema de numeração decimal. Para isso é necessário que o professor faça um esforço constante e consciente para que os alunos associem os aspectos semânticos e sintáticos das operações e transformações matemáticas.

4. É necessário associar os símbolos matemáticos ao seu significado referencial.

Dificilmente encontraremos alguma regra, algum princípio, que não tenha significado referencial. Vejamos alguns exemplos para ilustrar o que estou dizendo:

A notação posicional no Sistema de Numeração Decimal é um desses exemplos. Nas primeiras páginas deste artigo foi explicado que o valor relativo dos algarismos se apoiava no fato de que a explicitação da base, que ocorre nos sistemas de numeração denominados "híbridos", se substitui no nosso sistema de numeração pelo código de posição (324 = (3 x 100) + (2 x 10) + 4). É evidente que a regra do valor posicional pode ser ensinada de duas maneiras:

6. Utilizar e relacionar linguagens diferenciadas.

A associação entre os aspectos sintáticos e semânticos exige também que os alunos usem diferentes linguagens (linguagem natural, esquemas, desenhos, símbolos, etc.) para expressar as transformações matemáticas, que as relacionem entre si e que tenham consciência das regras que fazem a passagem de uma linguagem à outra.

Assim, por exemplo, o modelo concreto que acabamos de representar no item anterior pode ser trabalhado em nível manipulativo e através de desenho, mas é importante que se associe com o algoritmo convencional, relacionando as ações em nível manipulativo com sua expressão verbal, com o desenho e com o próprio algoritmo escrito.

7. Trabalhar os mesmos conceitos e procedimentos em diferentes contextos.

Como já dissemos, a construção dos conceitos e procedimentos matemáticos exige que sejam aplicados e atualizados por intermédio de problemas que respondam a estruturas semânticas diferentes. Vejamos um exemplo: matematicamente, uma função linear responde à expressão $y = f(x)$. No entanto, podemos definir uma série de problemas que, respondendo à mesma equação, têm uma estrutura semântica muito diferente em função das relações que se estabeleçam entre os dados, como se pode observar nos seguintes problemas:

a) Se 4 caramelos custam 12 pesetas, verifique qual o preço de 6 caramelos:

4b ——— 12 pesetas
6b ——— x

b) Com 4 pesetas se pode comprar 12 caramelos. Quantos caramelos se pode comprar com 6 pesetas?

12b ——— 4 pesetas
x ——— 6 pesetas

c) Com 6 pesetas se pode comprar 14 caramelos. Quantos caramelos se pode comprar com 9 pesetas?

14b ——— 6 pesetas
x ——— 9 pesetas

Como se pode observar, a diferença entre o último problema e o anterior é que a relação de divisão entre caramelos e pesetas não é exata.

O fato de um aluno resolver o primeiro problema por operações de multiplicação e divisão não significa que ele possa resolver os outros dois, ou que não recorra ao desenho. De fato, o que é importante é que o mesmo modelo matemático (a função linear) seja trabalhado através de estruturas semânticas diferentes, e que tenhamos consciência do que estamos fazendo para ajudar nossos alunos a reconhecer isomorfismos matemáticos através da diversidade semântica das diferentes situações e contextos.

8. Estimular a abstração progressivamente.

As expressões formais de matemática tendem a expressar as relações entre quantidades, eliminando todas as variáveis da situação. No entanto, as crianças tendem a não dissociar esses dois aspectos, o que significa que "reconhecer isomorfismos matemáticos a partir da diversidade semântica" é algo muito complicado. Para uma criança de sete anos é difícil reconhecer que os problemas, "João tem 6 maçãs e dá 2 a sua irmã. Com quantas ficará?" e "João nasceu em 1952. Quantos anos tem agora que estamos em 1996?", são isomorfos porque ambos são de subtração.

Para conseguir que os alunos reconheçam tais isomorfismos, é necessário não só variar os contextos e as situações, mas também propiciar um processo de reflexão consciente e a explicitação das relações entre as quantidades. Um processo *progressivo* de dissociação entre o conteúdo matemático e extramatemático que leve à abstração e que *não seja* excludente, mas complementar do processo de associação entre o significado referencial e o formal dos símbolos matemáticos que defendemos.

Começamos este artigo com uma frase de Goethe em que ele definia os matemáticos como "estrangeiros". Poderíamos supor então o que Goethe "tinha em mente" ao escrever a frase.

Uma possível interpretação poderia ser que a matemática é comparável a uma língua estrangeira, que tanto pode ser o francês para um alemão ou um espanhol, portanto, tão incompreensível quanto uma língua estrangeira que não se fala. A partir desse ponto de vista podemos considerar, como já propuseram alguns autores, que a aprendizagem da língua seria como aprender uma segunda língua que, à medida que vai sendo dominada, menos "estrangeira" se torna. Autores como D. Pimm (1990) consideram essa possibilidade desde que se adote o enfoque comunicativo presente nas mais recentes propostas de ensino de segunda língua e não os métodos tradicionais. Isto é, um ensino que suponha, como afirma D. Pimm, "uma mudança no centro da atenção, do estudo de um sistema abstrato regido por letras, que ressalta as formas escritas, para a aquisição de competência comunicativa sobre determinados objetos, situações e fenômenos, com a concomitante importância outorgada ao aspecto oral".

Contudo é possível dar uma outra interpretação, de caráter mais amplo, à frase de Goethe. Talvez Goethe acreditasse que os matemáticos, assim como os franceses — ou melhor, o estereótipo que os demais europeus têm dos franceses —, traduzem tudo na sua própria maneira de ver o mundo. E o que é mais importante, uma maneira muito particular de ver o mundo que é "alheia", "estrangeira", "pouco compreensível", para todos os que não são franceses nem matemáticos. Na realidade, acredito que essa segunda interpretação corresponda mais ao que tentei transmitir ao longo deste artigo. Isto é, que a matemática constitui uma maneira determinada e específica de interpretar, de observar a realidade. Que usa uma linguagem específica, *diferente* das linguagens naturais e cuja aquisição não pressupõe a mera "tradução" para a linguagem natural. E que, portanto, aprender matemática significa aprender a observar a realidade matematicamente, entrar na lógica do pensamento e da linguagem matemática, usando as formas e os significados que lhe são próprios. Esse seria o verdadeiro sentido da alfabetização matemática que nos permitiria circular pelos "domínios da matemática" como se estivéssemos em nossa própria casa e não num "país estrangeiro".

Tenho um amigo matemático[1], que há bem pouco tempo comentava comigo o seguinte: "Para um matemático, qualquer problema ou situação são muito mais fáceis de ser manipulados e compreendidos se forem traduzidos para a linguagem algébrica. Isto implica, a meu ver, que quando os professores ensinam matemática, pensam que à sua maneira tudo será mais fácil e compreensível para os alunos. Mas já vimos que não é bem assim. Os filósofos também pensam que a verdadeira formação filosófica só é adquirida lendo os grandes filósofos em alemão. Contudo, nenhum professor pensaria em começar a ensinar filosofia a seus alunos em alemão".

O objetivo e a finalidade do ensino da matemática devem ser que os alunos dominem e usem significativamente sua linguagem e os usos específicos da mesma. Mas para que isso seja alcançado, as formas de ensino e de aproximação tradicionalmente aplicadas a essa linguagem devem ser radicalmente modificadas.

Nota

1 Trata-se do professor Evelio Bedoya, da Universidad del Valle (Colômbia), a quem devo agradecer também pelos seus comentários e sugestões "como matemático" no presente texto.

12 Bibliografia

ADAM, J. M. 1985. Quels types de textes? *Le Français dans le Monde, 192*, p. 39-43.

________. 1992. *Les textes*; types et prototypes. Paris, Nathan.

ALEXANDROV, A. D.; KOLMOGOROV, A. N.; LAURENTIEV, M. A. 1973. *Las matemáticas. Su contenido, método y significado*. Madrid, Alianza Universidad.

BARTHES, R. 1964. *Essais critiques*. Paris, Seuil.

BAUTIER, E. & CHARLOT, B. 1992. Rapport au langage, rapport et savoir. *Le Français d'Aujourd'hui, 99*, p. 18-24.

BAUTIER, R. 1984. Sur le journalisme: des règles d'écriture aux représentations de la communication journalistique. *Études de Linguistique Appliquée, 50*, p. 79-91.

BELLÉS, R. M. et alii. 1993. Cosas que usted no tuvo ocasión de preguntar sobre el aprendizaje y la enseñanza del lenguaje escrito a alumnos con NEE. *CL & E, Comunicación, Lenguaje y Educación, 17*, p. 97-117.

BEREITER, C. & SCARDAMALIA, M. 1987. *The psychology of writen composition*. New Jersey, N. J., Lawrence Erlbaum Associates.