

## A INVENÇÃO DA BASE

A partir do momento em que o homem teve acesso à abstração dos números e aprendeu a distinção sutil entre o número cardinal e o número ordinal, ele retomou seus antigos “instrumentos” (pedras, conchas, pauzinhos, terços de contas, bastões entalhados, nós de cordas etc.). Mas desta vez passou a considerá-los sob o ângulo da contagem. De simples instrumentos materiais eles tornaram-se, assim, verdadeiros *símbolos numéricos*, bem mais cômodos para assimilar, guardar, diferenciar ou combinar números inteiros.

Em seguida, ele aprendeu a conceber conjuntos cada vez mais extensos, esbarrando então em novas dificuldades: evidentemente para representar números maiores não podemos multiplicar indefinidamente pedras, pauzinhos, entalhês ou nós em cordas. Assim, também o número de dedos da mão ou das partes do corpo não são extensíveis segundo nossa vontade. Do mesmo modo, não podemos repetir uma mesma palavra de maneira ilimitada, nem criar novos nomes de número ou novos símbolos ao infinito. Basta pensar nos nomes que teríamos de aprender de cor, ou nos símbolos que teríamos de desenvolver para exprimir simplesmente a quantidade de centavos igual ao valor de uma nota de quinhentos francos!

Foi então que o ser humano se defrontou com um problema aparentemente impossível de ser resolvido: *como designar* (con-

cretamente, oralmente ou, mais tarde, por escrito) *números elevados com o mínimo de símbolos possível?*

## DEZ, A BASE MAIS COMUM

Em certas regiões da África ocidental, há relativamente pouco tempo, os pastores tinham um costume bastante prático para avaliar um rebanho. Eles faziam os animais passarem em fila, um a um. Após a passagem do primeiro enfiavam uma concha num fio de lã branca, após o segundo uma outra concha, e assim por diante até dez. Nesse momento desmanchava-se o colar e se introduzia uma concha numa lã azul, associada às dezenas. E se recomeçava a enfiar conchas na lã branca até a passagem do vigésimo animal, quando se introduzia uma segunda concha no fio azul. Quando este tinha, por sua vez, dez conchas, e cem animais haviam sido contados, desfazia-se o colar das dezenas e enfiava-se uma concha numa lã vermelha, reservada desta vez para as centenas. E assim por diante até o término da contagem dos animais. Para duzentos e cinqüenta e oito animais, por exemplo, haveria oitô conchas de lã branca, cinco azuis e duas vermelhas.

Não vamos pensar com isso que esses pastores raciocinavam como “primitivos”. Nós ainda contamos segundo o mesmo princípio que eles, só que com símbolos diferentes. A idéia básica deste procedimento reside de fato na predominância do agrupamento por *dezenas* (ou “feixes” de dez unidades), por *centenas* (ou dezenas de dezenas) etc. Nesta técnica concreta, cada concha da lã branca vale por uma unidade simples, enquanto cada concha da segunda ou da terceira lã marca um agrupamento de dez ou de cem unidades. Na linguagem dos matemáticos, isto se chama “empregar a base dez”.

Nas línguas indo-européias, semíticas ou mongólicas, os nomes dos números são geralmente construídos sobre uma base decimal. Tomemos o exemplo da numeração oral chinesa, que não comporta nenhuma anomalia. A cada número inferior ou igual a 10 corresponde um nome individual:

yī	èr	sān	sì	wǔ	liù	qī	bā	jiǔ	shí
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Os nove primeiros são as “unidades da primeira ordem decimal”, e o último constitui a “base” do sistema, que marca uma “unidade da segunda ordem”.

Para designar um número superior a 10, agrupam-se as unidades por feixes de dez:

11	<i>shí-yī</i> (“dez-um”)	20	<i>èr-shí</i> (“dois-dez”)
12	<i>shí-èr</i> (“dez-dois”)	30	<i>sān-shí</i> (“três-dez”)
13	<i>shí-sān</i> (“dez-três”)	40	<i>sì-shí</i> (“quatro-dez”)

Se o número das dezenas é superior ou igual a dez, são então agrupadas por sua vez em feixes de dez e se obtêm as centenas (ou “unidades da terceira ordem”):

100	<i>bǎi</i>
200	<i>èr-bǎi</i> (“dois-cem”)
300	<i>sān-bǎi</i> (“três-cem”)

Agrupando-se as centenas em feixes de dez, obtêm-se os milhares (ou “unidades da quarta ordem”):

1.000	<i>qiān</i>
2.000	<i>èr-qiān</i> (“dois-mil”)
3.000	<i>san-qiān</i> (“três-mil”)

Vêm em seguida as dezenas de milhar ou “unidades da quinta ordem” (10.000 é *wàn* em chinês), e assim por diante.

Conseqüentemente, os nomes dos números intermediários são compostos a partir dos precedentes, segundo potências decrescentes de dez:

53.781:	<i>wǔ wàn</i>	(“cinco-dez mil,
	<i>sān qiān</i>	três-mil,
	<i>qī bǎi</i>	sete-cem,
	<i>jiǔ shí yī</i>	oito-dez, um”)

Nossa numeração escrita atual repousa sobre a base dez, mas usa os dez seguintes símbolos gráficos (aos quais se denomina correntemente “algarismos arábicos”):

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Os nove primeiros representam as unidades da primeira ordem e o décimo, o conceito de “zero”. A base dez, que é o primeiro número representado por meio de dois algarismos, se escreve 10 (o que significa “*uma* dezena e *zero* unidades”). Em seguida, os números de 1 a 99 são representados combinando-se sucessivamente dois de seus dez algarismos:

- 11 (“*uma* dezena e *uma* unidade”)
- 12 (“*uma* dezena e *duas* unidades”)

.....

- 20 (“*duas* dezenas e *zero* unidades”)
- 30 (“*três* dezenas e *zero* unidades”)

.....

- 99 (“*nove* dezenas e *nove* unidades”)

A centena, que é igual ao quadrado da base dez, se escreve 100 (“*uma* centena, *zero* dezenas e *zero* unidades”), sendo o menor número representado por três algarismos. Os números de 110 a 999 são designados combinando-se sucessivamente três dos dez algarismos fundamentais:

- 101 (“*uma* centena, *zero* dezenas e *uma* unidade”)
- 358 (“*três* centenas, *cinco* dezenas e *oito* unidades”) etc.

Vem em seguida o milhar, que é igual ao cubo da base, e se escreve 1.000 (“*um* milhar, *zero* centenas, *zero* dezenas e *zero* unidades”), depois a dezena de milhar, que se escreve 10.000, e assim por diante.

A base dez foi e permanece sendo, sem dúvida, a mais comum no curso da história, e sua adoção é hoje quase universal. Seria por causa de suas vantagens práticas ou matemáticas? Certamente que não.

A base dez apresenta, evidentemente, uma vantagem nítida sobre bases tão grandes quanto a trigesimal ou a sexagesimal, por exemplo, pois corresponde a uma ordem de grandeza satisfatória para a memória humana: os nomes de números ou os símbolos de base por ela exigidos são na verdade poucos numerosos, sendo que uma tabela de adição ou de multiplicação pode ser facilmente aprendida de cor. Do mesmo modo, ela é superior a bases pequenas, como dois ou três, pois permite evitar um es-

forço considerável de representação: enquanto em nossa numeração o número 2.452 é escrito apenas com quatro algarismos, num sistema de base dois ele se exprimiria por meio de doze algarismos (100110010000), desde que este sistema só possui dois algarismos: 1 e 0.

Mas desse ponto de vista vários outros números teriam resolvido muito bem o problema, e certamente melhor ainda que a dezena. Na verdade, não haveria nenhum inconveniente em mudar de “escala” e em contar segundo uma outra base. Bases como sete, oito, onze, doze ou treze ofereceriam ordens de grandeza tão cômodas para a memória humana quanto a dezena. Quanto às operações aritméticas, nesses sistemas elas poderiam ser executadas segundo técnicas exatamente análogas às que praticamos hoje na base decimal. Mas teríamos de perder este hábito de privilegiar a dezena e suas potências, pois as designações ou os símbolos correspondentes se tornariam inúteis num sistema em que se contaria, por exemplo, por dúzias e potências de 12...

Se tivéssemos um dia de fazer uma reforma completa de nossos sistemas de numeração e de confiar esta tarefa a um grupo de especialistas, assistiríamos provavelmente a uma interminável disputa opondo, como de hábito, o prático ao teórico:

— Nós precisamos é de uma base matemática satisfatória — diria um.

— Nada disto — responderia outro. — Os melhores sistemas são aqueles em que a base comporta um máximo de divisores. E dentre estas bases a dúzia me parece a mais adaptada, levando em conta a limitação da memória humana. Enquanto nossa base dez só tem como divisores o 2 e o 5, a base doze é ao mesmo tempo divisível por 2, 3, 4 e 6. Ora, é justamente aí que se encontra o interesse do sistema *duodecimal*. Pense nos encarregados de cálculos e nos comerciantes, que ficariam muito contentes com este modo de calcular e de contar: eles poderiam deduzir facilmente desta base a metade, o terço, o quarto e até o sexto. E estas frações são tão naturais e de uso tão corrente que sem querer caímos nelas. E isto não é tudo. Pense nas vantagens que poderíamos tirar nos cálculos relativos às divisões do tempo: um ano comportaria em meses um número igual a esta base; um dia valeria em horas o dobro dela; uma hora corresponderia em minutos a cinco vezes esta base; e um minuto va-

leria o mesmo tanto em segundos. Imagine a facilidade para os geômetras, que mediriam arcos e ângulos em graus iguais a cinco vezes a base em minutos, e em minutos iguais ao mesmo tanto de segundos. A medida do círculo seria igual a trinta vezes a base doze, o que conferiria ao ângulo raso uma medida igual a quinze vezes a base. Pense, enfim, nos astrônomos, que poderiam medir a eclíptica segundo uma divisão em trinta partes iguais à base doze. Sem falar dos astrólogos, que poderiam tranqüilamente calcular seus horóscopos sobre esta base e considerar seus signos do zodíaco em número igual à base desta numeração.

— Você está enganado — diria o teórico. — O principal interesse de uma numeração é permitir a seus usuários uma representação simples e sem nenhuma ambigüidade dos números inteiros ou fracionários. É preciso adotar uma numeração baseada num número primo, isto é, numa base divisível apenas por si mesma. Por exemplo, a numeração de base onze apresentaria muito mais vantagens do que as bases dez e doze, pois as frações seriam geralmente *irredutíveis* e teriam apenas uma única representação. Exemplo: o número que representamos no nosso sistema decimal através da notação 0,68 corresponde ao mesmo tempo às frações  $68/100$ ,  $34/50$  e  $17/25$ ; *na nossa numeração de base sete, onze ou igual a um número primo tais ambigüidades desapareceriam completamente*. Imagine as vantagens que tiraríamos dessa reforma!

Não sendo um número primo, e tendo apenas dois divisores, a base decimal não encontraria sequer um defensor entre os membros dessa comissão!

No entanto, seria utópico pensar que ainda poderíamos voltar atrás e procurar mudar agora a base de nossa numeração escrita ou oral. O hábito de contar por dezenas está tão enraizado nas nossas tradições que a escolha desta unidade de contagem se tornou indestrutível. O que se poderia fazer seria a reforma das divisões estranhas e incômodas dos antigos sistemas de pesos e medidas, para adaptá-los definitivamente à numeração decimal. É o que foi feito na época da Revolução Francesa, quando a Convenção Nacional criou o *sistema métrico* e o impôs, em dezembro de 1799, através da Lei de 19 frimário, ano VIII...

Mas, afinal, de onde vem a base dez?

Alguns autores iluminados quiseram ver nela uma intervenção da providência:

“O número 10” — afirmava um deles — “é o mais perfeito de todos(!). Foi de acordo com esta idéia que se estabeleceram as divisões e as formas das extremidades de nossas mãos e pés. . . E é a justo título e conforme a natureza divina que, sem premeditação, nos juntamos aos homens de todos os países para contar segundo esse número perfeito”.

Curiosa maneira de erigir como harmonia preestabelecida um fato devido simplesmente à evolução fisiológica dos mamíferos! O que não deixa de evocar esta célebre reflexão de Joseph Prudhomme: “Meu filho, admire a sabedoria divina que fez os rios passarem sempre no meio das cidades!”

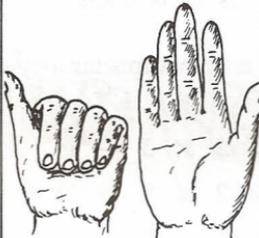
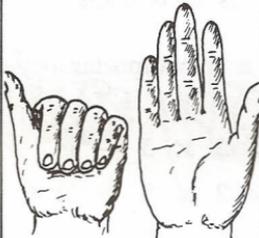
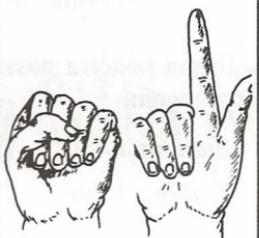
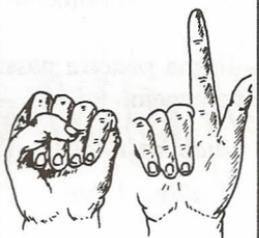
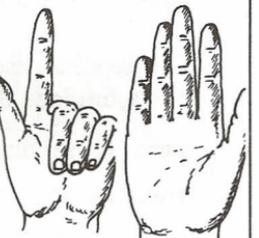
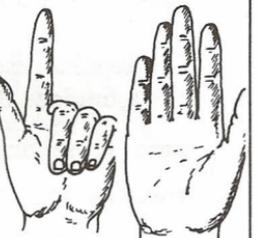
De fato, como a humanidade aprendeu a contar nos dez dedos da mão, esta preferência quase geral pelos grupos de dez foi comandada por este “acidente da natureza” que é a anatomia das nossas duas mãos.

Para nos convenceremos, basta imaginar, por exemplo, um clã que, por motivos religiosos, esteja submetido temporariamente à proibição de falar. Chega a hora de contar um rebanho de bisões. Quando passa o primeiro animal, um primeiro homem levanta um dedo; depois ergue outro, quando passa o segundo, e assim até o décimo bisão. Neste momento, um segundo homem, com os olhos constantemente fixos nas mãos do outro, levanta seu primeiro dedo quando seu colega baixa os dele. A primeira dezena está recenseada. Quando passa o décimo primeiro animal, o primeiro homem (o das unidades) levanta de novo seu primeiro dedo; ao décimo segundo, um outro, assim procedendo até a passagem do vigésimo animal.

O homem das dezenas mantém seu primeiro dedo levantado até o momento em que o décimo dedo de seu colega por sua vez se levanta. Então ele levanta seu segundo dedo, enquanto o primeiro homem baixa de novo os dele.

À passagem do centésimo bisão, um terceiro homem entra em cena e levanta seu primeiro dedo no momento em que os dois outros baixam os deles: seus dedos marcarão então do mesmo modo as centenas. Com a passagem do 627.º animal, o homem das unidades terá sete dedos levantados; o das dezenas, dois; e o das centenas, seis.

A enumeração assim efetuada sem uma só palavra prova, conseqüentemente, que foram mesmo os dez dedos que impuseram ao homem a idéia de grupos por feixes de dez. É por esta razão que a base dez ocupa nas nossas numerações um lugar de certo modo inexpugnável.

AJUDANTE N.º 3		AJUDANTE N.º 2		AJUDANTE N.º 1	
Esquerda	Direita	Esquerda	Direita	Esquerda	Direita
					
6		2		7	
600		20		7	

Se a natureza nos tivesse dado seis dedos para cada mão, a maioria das numerações da história se teria fundado na base doze. Se, ao contrário, a evolução natural deste órgão na linhagem humana tivesse desembocado numa redução do número de dedos de cada mão para quatro, por exemplo (como a rã), nossas tradições de contagem e nossos sistemas de numeração seriam hoje fundados na base oito.

### UMA OUTRA SOLUÇÃO: A BASE CINCO

Mas nem todas as civilizações resolveram do mesmo modo o problema da base. A base dez não foi a única referência do homem através dos tempos. Alguns povos adquiriram o hábito de agrupar os seres e os objetos por feixes de cinco. A língua *api*, das Novas Hébridas, nos dá um exemplo, quando atribui aos cinco primeiros números nomes independentes:

- tai* para 1
- lua* para 2
- tolu* para 3
- vari* para 4
- e *luna* para 5 (literalmente, “a mão”)

Entre 5 e 10, já se trata de nomes compostos:

<i>otai</i>	para 6	(literalmente, “o novo um”)
<i>olua</i>	para 7	(literalmente, “o novo dois”)
<i>otolu</i>	para 8	(literalmente, “o novo três”)
<i>ovari</i>	para 9	(literalmente, “o novo quatro”)
<i>lualuna</i>	para 10	(literalmente, “as duas mãos”)

Em seguida, esta última palavra passa a se comportar como uma nova unidade de contagem:

para 11 se diz:	<i>lualuna i tai</i>	(= $2 \times 5 + 1$ )
para 12 se diz:	<i>lualuna i lua</i>	(= $2 \times 5 + 2$ )
para 15 se diz:	<i>toluluna</i>	(= $3 \times 5$ )
para 16 se diz:	<i>toluluna i tai</i>	(= $3 \times 5 + 1$ )
para 20 se diz:	<i>variluna</i>	(= $4 \times 5$ )
para 24 se diz:	<i>variluna i vari</i>	(= $4 \times 5 + 4$ ) etc.

A origem deste modo de contar é antropomórfica. A base cinco tem de fato sua razão de ser nos povos que aprenderam a contar numa única mão, e a prolongar a série dos números se servindo da outra como referência. É pelo menos o que ilustra a técnica digital acima descrita, da qual encontramos traços em diversas regiões da África e da Oceania e que vários comerciantes indianos da região de Bombaim ainda empregam até hoje para atender às suas necessidades mais correntes.

Contam-se inicialmente as cinco primeiras unidades, estendendo sucessivamente os dedos da mão esquerda. Em seguida, quando se chega ao número 5, dobra-se o polegar direito. Depois se continua a contar até 10, estendendo novamente os dedos da mão esquerda, para dobrar o indicador direito quando as cinco unidades suplementares tiverem sido consideradas. Assim se poderá contar até 25. E, se não bastar, a operação poderá ser prolongada até 30, voltando de novo aos dedos da mão esquerda, agora livre.



## VINTE DEDOS PARA CONTAR

Já outros povos preferiram adotar uma *base vintesimal*: eles se habituaram a agrupar por vintenas e potências de 20 os seres e objetos enumerados. Foi, por exemplo, o caso dos malinké do Alto Senegal e da Guiné, dos yébu e dos ioruba da Nigéria, dos banda da África central, dos tamana do Orinoco (aos pés do planalto das Guianas na Venezuela), dos esquimós da Groenlândia, dos aino da ilha Sakhalin (próximo às costas da Ásia oriental, entre o mar do Japão e o mar de Okhotsk), dos maias e dos astecas da América Central pré-colombiana etc.

Os astecas contavam do seguinte modo:

1	<i>ce</i>	
2	<i>ome</i>	
3	<i>yey</i>	
4	<i>nauí</i>	
5	<i>chica</i> (ou <i>macuilli</i> )	
6	<i>chica-ce</i>	(= 5 + 1)
7	<i>chic-ome</i>	(= 5 + 2)
8	<i>chicu-ey</i>	(= 5 + 3)
9	<i>chic-nauí</i>	(= 5 + 4)
10	<i>matlactli</i>	
11	<i>matlactli on ce</i>	(= 10 + 1)
12	<i>matlactli on ome</i>	(= 10 + 2)
13	<i>matlactli on yey</i>	(= 10 + 3)
14	<i>matlactli on nauí</i>	(= 10 + 4)
15	<i>caxtulli</i>	
16	<i>caxtulli on ce</i>	(= 15 + 1)
17	<i>caxtulli on ome</i>	(= 15 + 2)
18	<i>caxtulli on yey</i>	(= 15 + 3)
19	<i>caxtulli on nauí</i>	(= 15 + 4)
20	<i>cem poualli</i>	(“uma vintena”)
30	<i>cem poualli on matlactli</i>	(= 1 x 20 + 10)
40	<i>ome poualli</i>	(= 2 x 20)
53	<i>ome poualli on matlactli</i> <i>on yey</i>	(= 1 x 20 + 10 + 3)
100	<i>macuil poualli</i>	(= 5 x 20)
400	<i>cem tzuntli</i>	(“uma quatro centena”)
800	<i>ome tzuntli</i>	(“duas quatro centenas”)
	etc.	

A idéia fundamental deste exemplo nos mostra por que estes povos foram levados a adotar tal base e revela uma origem igualmente antropomórfica deste modo de contar:

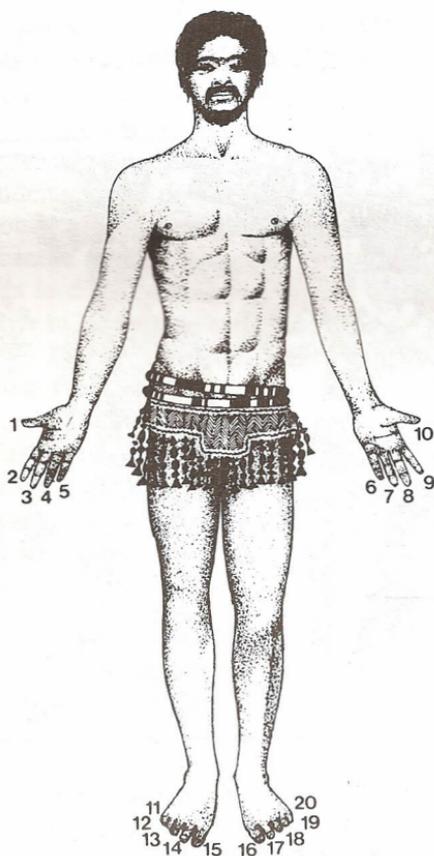
— os cinco primeiros nomes de números da língua asteca podem de fato ser associados aos dedos de uma mão;

— os cinco seguintes aos dedos da outra mão;

— os cinco outros aos dedos de um pé;

— e os últimos cinco aos dedos do outro pé.

Voltemos alguns milênios atrás, em algum lugar do México, por exemplo. Estamos numa tribo de índios cujos descendentes constituirão mais tarde a civilização asteca.



- 1 polegar direito
- 2 indicador direito
- 3 médio direito
- 4 anular direito
- 5 auricular direito

- 6 auricular esquerdo
- 7 anular esquerdo
- 8 médio esquerdo
- 9 indicador esquerdo
- 10 polegar esquerdo

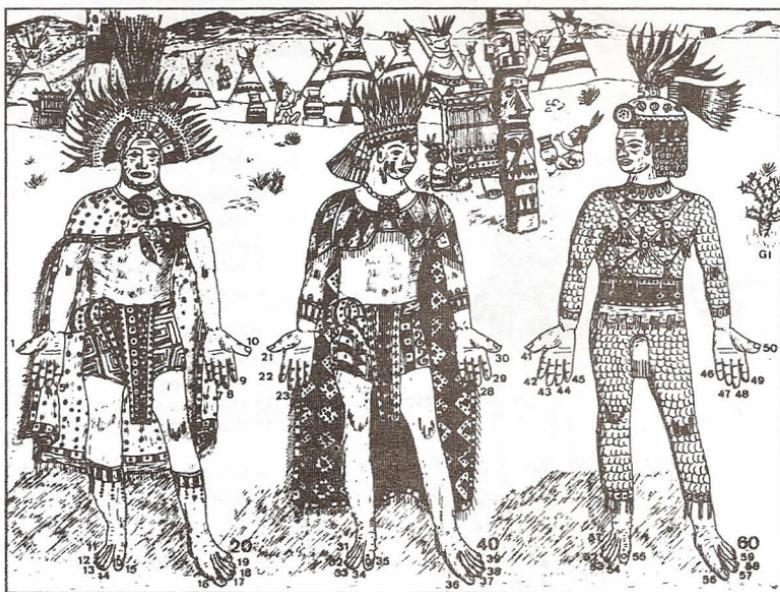
- 11 pequeno artelho direito
- 12 artelho seguinte
- 13 artelho seguinte
- 14 artelho seguinte
- 15 grande artelho direito

- 16 grande artelho esquerdo
- 17 artelho seguinte
- 18 artelho seguinte
- 19 artelho seguinte
- 20 pequeno artelho esquerdo

Na preparação de uma expedição militar, para contar os guerreiros alguns homens são postos em fila para servir de “máquina de contar”. Um ajudante é designado para proceder ao recenseamento, operando sucessivamente sobre cada um desses homens de acordo com a seguinte técnica.

Ele toca um dedo do primeiro homem quando passa o primeiro guerreiro, depois um outro dedo para o segundo, e assim até o décimo. Em seguida ele passa para os artelhos desse homem, procedendo do mesmo modo até o vigésimo guerreiro.

Depois ele passa para o segundo homem. Ao tocar seu último artelho, vinte novos guerreiros (ou seja, quarenta ao todo) terão sido contados. Ele prossegue operando da mesma forma sobre tantos homens quantos forem necessários, até o término da contagem. Com a passagem do quinquagésimo terceiro guerreiro, o contador terá tocado o *terceiro artelho do primeiro pé do terceiro homem*.



Um fato digno de nota: para o número 53 os esquimós, da Groenlândia, assim como os tamana, do Orinoco, empregavam uma expressão significando, literalmente: “do homem terceiro,

três sobre o primeiro pé". Também os banda, da África central, exprimem até hoje o número 20 por algo como "pendurar um homem", e em certos dialetos maías a expressão *hun uinic*, que significa "uma vintena", significa também "um homem". Quanto aos malinké, do Alto Senegal, para eles "um homem completo" é 20 e "um leito" é 40, numa alusão à reunião dos dedos e dos artelhos de um homem e de uma mulher deitados num mesmo leito.

Nessas condições, não há dúvida de que *esses povos adotaram a base vinte porque se deram conta de que, abaixando-se um pouco, podiam também contar seus dez artelhos.*

A numeração vigesimal não foi muito difundida no curso da história, mas em diversas línguas há traços de uma tradição, provavelmente muito antiga, de contar por vintenas. As expressões inglesas *one score, two scores, three scores* etc., onde o termo *score* é também às vezes empregado na sua forma invariável, significam respectivamente 20, 40, 60 etc.

Em francês<sup>1</sup>, assim como em latim, a própria forma do número *vinte* (*viginti* em latim e *vinti* em baixo latim), visivelmente independente de "dois" (ou *duo*) e de "dez" (ou *decem*), talvez constitua um vestígio desta contagem decimal desaparecida. Em francês arcaico, o uso de formas análogas a *oitenta* (que em francês se diz literalmente "quatro vintes") era, aliás, bem freqüente, pois se dizia, por exemplo, para 60, 120 ou 140:

*Trois-vingts* (três vintes), *six-vingts* (seis vintes) ou *sept-vingts* (sete vintes).

Talvez por isso um corpo de 220 sargentos da cidade de Paris tenha sido denominado le Corps des Onze-Vingts (Corporação dos Onze Vintes). E pela mesma razão, um hospital construído no século XIII em Paris, para 300 veteranos cegos, levou (e leva até hoje) o nome de Hôpital des Quinze-Vingts (Hospital dos Quinze Vintes)...

## A CONTAGEM POR DÚZIAS

Muito mais difundida é a *contagem duodecimal*, que, se tivesse evoluído, poderia ter dado origem a uma numeração completa de base doze, o que nos teria dado, como já vimos, um

1. O mesmo se aplica para a língua portuguesa. (N. do E.)

sistema certamente mais cômodo que a nossa numeração decimal, sendo o número doze divisível ao mesmo tempo por 2, 3, 4 e 6.

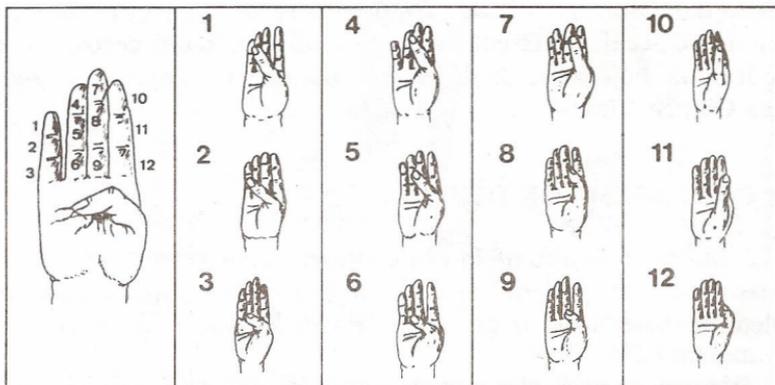
Esta numeração foi empregada em antigos sistemas comerciais, dos quais temos o testemunho nas nossas *dúzia* e *grosa* (dúzia de dúzias), que ainda conservamos para os ovos e as bananas, por exemplo.

Os sumérios (e depois deles os assírio-babilônios) atribuíram a esta base e a seus múltiplos e divisores um papel preponderante nas suas medidas de distância, de superfície, de volume, de capacidade e de peso. Além disso, tinham o hábito de subdividir o dia em doze partes iguais, denominadas *danna*, cada uma equivalendo a duas de nossas horas. Eles utilizaram para o círculo, assim como para a elíptica e o zodíaco, uma divisão em doze *bérû* (ou “setores”) de 30° cada.

Também os romanos empregaram um sistema fracionário baseado na divisão do *As* (nome de uma unidade aritmética, monetária ou ponderável) em doze subunidades chamadas *onces*.

Às vésperas da Revolução Francesa, os povos europeus ainda continuavam a estimar seus valores monetários em *sols tournois* (moeda cunhada em Tours), convertíveis em doze *deniers tournois*, e a medir os comprimentos em *pés*, *polegadas*, *linhas* e *pontos*, um “pé” sendo equivalente a doze polegadas; uma “polegada”, a doze linhas; e uma “linha”, a doze pontos.

O relativo sucesso desta base se deve, sem dúvida, a suas



vantagens práticas, mas sua origem ainda é desconhecida. Na minha opinião, há grandes probabilidades de que ela esteja fundamentada na mão. Com efeito, é possível contar de 1 a 12 usando os dedos de uma única mão: *basta apoiar o polegar, sucessivamente, em cada uma das três falanges (ou articulações) dos quatro dedos opostos da mesma mão*. Tendo cada dedo três falanges, e estando as do polegar excluídas da conta (pois é o dedo que efetua a operação), a dúzia pode impor-se deste modo como base de um sistema numérico.

Foi seguramente este método que determinou a adoção, por parte de diversos povos, da dúzia como unidade secundária de contagem, ao lado da dezena. Trata-se de uma hipótese difícil de verificar, mas tal procedimento existe até hoje: ainda é corriqueiro na Índia, no Paquistão, na Indochina, no Afeganistão, assim como no Egito, na Síria, na Turquia, no Iraque e no Irã. Em todo caso, esta hipótese apresenta a vantagem de sugerir uma explicação para a origem misteriosa da base sessenta. . .

## A ENIGMÁTICA BASE SESENTA

Enquanto unidade de contagem a base sexagesimal constitui uma base muito elevada, sobrecarregando consideravelmente a memória: ela exige o conhecimento de sessenta palavras ou signos diferentes para traduzir os números de 1 a 60. Os nomes de números ou os símbolos de base por ela exigidos são, assim, tão numerosos que fica difícil decorar, por exemplo, uma tabela de adição ou de multiplicação. No entanto, certos povos já recorreram a esta base no curso da história, e nossa própria cultura guardou seus vestígios, pois a utilizamos ainda para exprimir a medida do tempo em horas, minutos e segundos, ou a dos arcos e dos ângulos em graus, minutos e segundos.

Esta base foi primeiramente empregada pelos sumérios, que tinham o hábito de contar por base sessenta e potências de 60. Em seguida foi transmitida aos matemáticos e astrônomos babilônios (sucessores dos sumérios na Mesopotâmia), que dela se serviram para elaborar um avançado sistema de numeração, antes de nos legá-la por intermédio dos astrônomos gregos e árabes. . .

Até hoje não foi bem explicada a razão pela qual a idéia de uma base tão elevada se teria imposto ao espírito dos sumé-

rios. Várias hipóteses foram levantadas a esse respeito, mas nenhuma parece definitiva. Segundo certos autores, a escolha desta base teria sido de origem metrológica. Mas esta hipótese é inaceitável, pois situa a questão no plano teórico: na verdade a base sexagesimal só foi introduzida no sistema metrológico dos sumérios porque já existia na sua numeração.

Na opinião de outros, o número de dias do ano, arredondado para 360, teria dado origem à divisão do círculo em  $360^\circ$ . E, como a corda do sextante (isto é, da sexta parte de um círculo) é igual ao raio correspondente, este número teria engendrado a divisão do círculo em seis partes iguais a  $60^\circ$ , o que haveria então privilegiado a sessentena.

Outros ainda pensaram ter encontrado a origem do sistema na relação entre a "hora" suméria (igual a duas de nossas horas) e o diâmetro aparente do Sol, expresso em unidades de tempo equivalentes a dois de nossos minutos.

Ainda há uma outra hipótese, mas desta vez de ordem geométrica: o triângulo equilátero teria servido para medir as diferenças de direção no plano; e da divisão decimal do ângulo (igual a  $60^\circ$ ) oferecida por esta figura teria decorrido a divisão sexagesimal do plano (e conseqüentemente do círculo), que por sua vez daria lugar à numeração de base sessenta.

Podemos objetar a tais explicações que nem a geometria nem a astronomia podem dar conta da origem de um sistema de numeração. No entanto, é provavelmente graças a suas propriedades geométricas e astronômicas particulares que a base sessenta foi mantida até a época moderna para a medida do tempo, dos arcos e dos ângulos.

Ainda uma outra explicação: a escolha desta base deve ter resultado da conjunção, em épocas antigas, de duas civilizações diferentes, das quais uma teria contribuído com uma numeração de base dez e a outra com um sistema erigido sobre a base seis. Ao que se objetou, com razão, que "a existência de um sistema de numeração cuja base seria seis é um postulado sem nenhum fundamento histórico"

Mas, se a base seis não foi comprovada no curso da história, o contrário se deu com a base doze, sendo conhecida a importância a ela atribuída pela civilização suméria. Esta base poderia,

assim, ter representado um papel fundamental na constituição do sistema.

Na minha opinião, há duas hipóteses prováveis. É possível pensar, inicialmente, que *em consequência da conjunção de duas culturas diferentes, uma com o hábito de contar por dúzias e a outra por dezenas, a escolha da base sessenta tenha resultado, em certos meios instruídos, de uma combinação "científica" da base doze com a base dez.*

A base decimal representou, de fato, um papel importante na civilização suméria. Os aritméticos do país de Sumer a utilizaram como unidade auxiliar para aliviar a memória na sua numeração sexagesimal, que supunha teoricamente o conhecimento de sessenta palavras ou símbolos diferentes para exprimir os números de 1 a 60.

Ora, segundo esta hipótese, numa sociedade que praticava uma contagem por dúzias e outra, secundária, por dezenas, os aritméticos, já em estágio intelectual avançado (como prova o que nos resta hoje de seus trabalhos), as teriam combinado de acordo com as propriedades do *mínimo múltiplo comum*, para formar um ciclo elaborado de sessenta unidades, com grandes facilidades para o cálculo: 60 é, na verdade, o mínimo múltiplo comum de 10 e de 12, além de corresponder ao menor número inteiro tendo como divisores os seis primeiros números. Daí teria resultado a adoção da sessentena como base de um sistema de numeração.

Em segundo lugar, pode-se supor (e esta hipótese me parece mais provável) que *a escolha da base sessenta foi o resultado de uma combinação "natural" da base doze e da base cinco* (sendo ambas de origem manual). Esta hipótese me parece mais plausível ainda, desde que foram detectados traços evidentes desta última base na língua suméria. Abstraindo algumas variantes, os nomes dos dez primeiros números em sumério são:

- 1 *gesh*
- 2 *min*
- 3 *esh*
- 4 *limmu*
- 5 *ià*

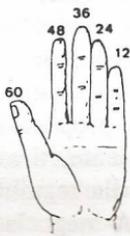
- 6 *àsh* (= à + sh = *ià* + *gesh* = 5 + 1)  
 7 *imin* (= i + min = *ià* + *min* = 5 + 2)  
 8 *ussu*  
 9 *illimmu* (= i + limmu = *ià* + *limmu* = 5 + 4)  
 10 *u* (literalmente, “os dedos”)

Com exceção do número 8, a língua suméria comprova, para os números 6, 7 e 9, uma decomposição anterior segundo a base cinco. (É bem provável que em épocas antigas o número 8 tenha sido expresso da mesma maneira que 6, 7 e 9; infelizmente, a palavra original correspondente se perdeu na noite dos tempos.)

Ora, como se verá mais adiante, ao ser ultrapassada por um esforço intelectual, a idéia de contar nos dedos das mãos abriu muitas vezes caminho para elaborações aritméticas de um nível superior. Partindo da hipótese precedente, a origem da base sessenta pode ter-se vinculado a um sistema de contagem manual empregado talvez pelos sumérios na época antiga. Evidentemente, esta hipótese é de difícil verificação, mas este processo se confirma atualmente no Oriente Próximo, onde é utilizado na Índia e na península indochinesa.

Graças a esta técnica digital, a base sessenta aparece efetivamente como base principal e os números 12 e 5, como bases auxiliares. Ela é usada da seguinte maneira:

Na mão direita, conta-se de 1 a 12, apoiando o polegar, sucessivamente, nas três falanges dos quatro dedos opostos da mesma mão. Ao atingir a dúzia nesta mão, dobra-se o mindinho esquerdo. Volta-se à primeira mão e conta-se de 13 a 24 repetindo a mesma técnica. Uma vez atingido o número 24, dobra-se o anular esquerdo e se continua a contar do mesmo modo na mão direita de 25 a 36. Abaixa-se em seguida o médio da mão esquerda e se procede do mesmo modo até 48 (quando se dobra o indicador esquerdo), e depois até 60, quando os cinco dedos da mão esquerda são dobrados.

MÃO ESQUERDA	MÃO DIREITA
<p>CONTAGEM DOS DEDOS, CADA UM VALENDO UMA DÚZIA</p> 	 <p>CONTAGEM DAS FALANGES PELO POLEGAR OPOSTO, CADA UMA VALENDO UMA UNIDADE</p>

A origem da base sessenta pode, assim, ter resultado de uma combinação da contagem das doze falanges de uma mão pelo polegar oposto com a contagem digital elementar de base cinco. Esta hipótese (que convém considerar com precaução, pois se trata de uma afirmação sem prova) poderia confirmar a origem puramente antropomórfica das outras bases históricas e, por conseguinte, reforçar a importância do papel do corpo humano na história dos números e dos sistemas de numeração.

De qualquer modo, a aquisição da faculdade de contar e a descoberta fundamental do princípio da base representaram um papel considerável na história das civilizações. Elas favoreceram um grande número de criações, de invenções, e até mesmo de revoluções nos mais diversos campos — como por exemplo na economia e nas trocas comerciais.

## O NÚMERO, O VALOR, A MOEDA

Na época em que os homens viviam em comunidades reduzidas, extraindo da natureza todos os produtos de que necessitavam, sem dúvida havia muito pouca comunicação entre as diferentes sociedades. Mas, com o desenvolvimento do artesanato e da cultura, e em virtude da repartição desigual dos diversos produtos naturais, a permuta comercial foi aos poucos se revelando necessária.

O primeiro tipo de intercâmbio foi a *troca*, fórmula segundo a qual se permutam diretamente (sem intervenção de uma “moeda” no sentido moderno do termo) gêneros e mercadorias correspondentes à matéria-prima ou a objetos de grande necessidade.

Quando se tratava de grupos inimigos, às vezes estas permutas assumiam a forma de uma *troca silenciosa*. Uma das partes depositava num local previamente combinado as diversas mercadorias que queria trocar e, no dia seguinte, encontrava no lugar delas, ou ao lado, os produtos propostos pelo outro parceiro. Se a transação parecia conveniente, tiravam-se os produtos, caso contrário, eles voltavam no dia seguinte para encontrar uma quantidade mais importante. A negociação podia então durar vários dias, ou até terminar sem troca na hipótese de as duas partes não chegarem a um acordo.

Cenas deste tipo puderam ser observadas, por exemplo, com os aranda da Austrália, os veda do Ceilão, os bosquímanos e os pigmeus da África, os botocudo, do Brasil, assim como na Sibéria e na Polinésia.

Com a intensificação das comunicações entre os diversos grupos e a importância cada vez maior das transações, a prática da troca direta tornou-se rapidamente problemática. Não era mais possível permutar mercadorias de acordo com o capricho deste ou daquele indivíduo ou em virtude de um uso consagrado após discussões intermináveis.

Surgiu então a necessidade de um sistema relativamente estável de avaliação e de equivalências, fundado num princípio (semelhante ao da base de um sistema de numeração) que definisse algumas *unidades* ou *padrões* fixos. Sistema a partir do qual fosse sempre possível estimar este ou aquele valor não apenas para as operações de caráter econômico, mas também (e talvez sobretudo) para o acerto de problemas jurídicos importantes, como o *valor da noiva*, o *valor do roubo* ou o *valor do sangue* (estimativa em bens de consumo de uma mulher a ser tomada por esposa, do delito do roubo ou da agressão causadora da morte de um indivíduo).

Para tanto foi empregada toda sorte de produtos, de matérias-primas ou de objetos utilitários. Alguns povos pastores, como os gregos e os romanos das épocas antigas, avaliaram seus gêneros e mercadorias em cabeças de gado. Na *Iliada*, de Homero,

por exemplo, “uma mulher capaz de mil tarefas” foi avaliada em quatro bois, a armadura de bronze de Glauco em nove bois e a de Diomedes, que era de ouro, em cem bois.

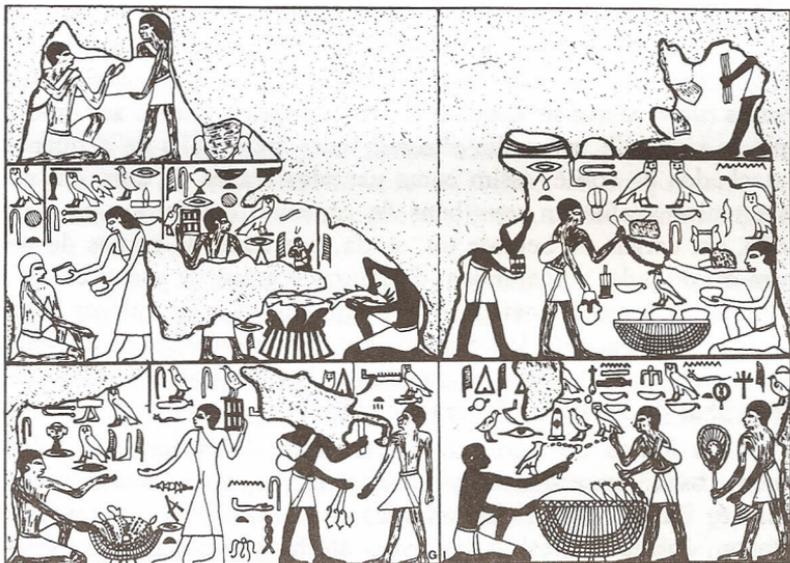
Aliás, os termos franceses *pecune* (no sentido de dinheiro vivo), *pecule* (no sentido de “economia” ou de “poupança”), *pecunieux* (no sentido de posse de muito dinheiro líquido), *pecuniaire* etc. vêm do latim *pecunia* (“fortuna, dinheiro, moeda”), que por sua vez deriva de *pecus* (“o gado”).

Na região ártica do Canadá, assim como na Sibéria e na Groenlândia, os valores eram estimados até recentemente em peles deste ou daquele animal, ou ainda em peças de tecido. Os astecas do México pré-colombiano se serviam de uma peça de tecido (o *quachtli*) com o seu múltiplo, o “peso”, que valia vinte vezes mais; usava-se também o grão de cacau com o seu múltiplo, o *xiquipilli*, que valia oito mil vezes mais, além de pequenos machados de cobre, assim como canudos cheios de ouro em pó. Os maias avaliavam seus bens de consumo em fardos de algodão, em cargas de betume ou, ainda, por meio de contas de pedra ou de jade, de cerâmica, de jóias, de grãos de cacau etc. Na China, na segunda metade do II milênio a.C., os valores eram estimados em cascas de tartaruga, em chifres ou peles de animais, em sementes, em couro, em armas e ferramentas de pedra etc. Nas ilhas do Pacífico, eles eram calculados em colares de pérolas.

Os índios do nordeste da América do Norte (particularmente os iroqueses e os algonquinos) empregavam os *wampums*, isto é, fileiras de conchas multicores para enfeite. Quanto aos dogon, do Mali, estes continuavam até há pouco tempo utilizando o *cauri* (uma concha preciosa do gênero da porcelana) como unidade principal de avaliação dos bens, dos delitos ou das mercadorias: para eles, por exemplo, uma galinha valia 240 cauris, uma cabra ou um carneiro 2.400 cauris, um jumento 32.000 cauris, um cavalo 64.000 cauris e um boi 96.000 cauris. As conchas desta espécie particular constituíram, aliás, o padrão monetário para uma série de populações não-industrializadas, como por exemplo os indígenas das ilhas Maldivas, do Chade e de toda a África oriental (onde até recentemente se trocavam cinco francos franceses por 5.000 cauris). Elas foram encontradas até em diversos sítios arqueológicos chineses dos séculos XV a XI antes da nossa era e em jazigos pré-históricos na Inglaterra.

Dentre outros objetos ou matérias que também serviram de “moeda”, encontramos ainda: barras de sal em certas regiões da África, lâminas de chá na Ásia central, rolos de fumo na África oriental, facas de bronze na China e na América Central, machados polidos no Equador, gongos metálicos na Indochina, dentes de elefante na Índia, na Malásia e na Polinésia etc.

Mas tais métodos apresentavam sérias dificuldades de aplicação à medida que se diversificava a comunicação entre as sociedades e se desenvolviam a agricultura, o artesanato e as trocas



Cenas de mercado numa pintura funerária egípcia do Antigo Império (aproximadamente século XXV a.C.).

comerciais. Se dois grupos distintos empregavam frequentemente padrões monetários diferentes, com bases também diferentes, ficava difícil encontrar um ponto de entendimento. E, mesmo quando se resolvia o problema, não devia ser fácil passar de um sistema de valor para outro.

Foi então que surgiu a necessidade de um material e de um sistema de avaliação mais estáveis, mais práticos e mais dignos de confiança que os precedentes e que todos os grupos envolvidos pudessem reconhecer sem dificuldade. Quando a humani-

dade passou da idade da pedra para a dos metais, aos poucos foi surgindo a consciência de que os corpos metálicos eram perfeitamente capazes de preencher esta função.

No início, os metais foram transformados em ferramentas, armas ou objetos de adereço, e sob esta forma serviram de padrão de valor, ao mesmo tempo que os cauris, o gado, o algodão, as peles e o couro. Mas a partir de uma certa época eles passaram a ter um papel cada vez mais importante nas transações comerciais e se tornaram gradualmente a “moeda de troca” preferida dos vendedores e dos compradores, relegando os velhos padrões apenas à lembrança de sua antiga preponderância. As avaliações das diversas mercadorias passaram também a ser feitas quantitativamente através do peso, relacionando-as a uma espécie de *peso padrão* referente a este ou àquele metal (bronze, cobre, estanho, prata, ouro etc.).

Os fenícios e os hebreus avaliavam os bens de consumo, as punições e os impostos numa balança utilizando um peso padrão chamado “siclo” ou *shéqel* (que significa ao mesmo tempo “contagem” e “peso”). O siclo fenício pesava aproximadamente 14,50 de nossos gramas atuais, enquanto o *shéqel* dos hebreus valia 11,4 gramas. O *Gênesis* nos ensina que, quando o patriarca Abraão comprou a gruta de Makhpéla, pesou quatrocentos siclos para o hitita Ephrôn. Mais adiante, quando Saul recorreu aos serviços de um “vidente” para procurar os jumentos de seu pai, fez o pagamento com um quarto de siclo de prata.

No Egito dos faraós, os gêneros e as mercadorias eram frequentemente estimados e pagos com metal, dividido no princípio em pepitas, lâminas ou ainda sob a forma de lingotes ou de anéis, dos quais se determinava depois o peso. A unidade principal foi o *dében*, equivalente a noventa e um de nossos gramas.

Tendo o *dében* como peso padrão e o cobre como metal de referência, um contrato de venda do Novo Império (séculos XVI a XI a.C.) fixa do seguinte modo o montante e os detalhes correspondentes:

“Entregue a Hay, pelo brigadeiro Nebsmen:

1 boi, ou seja:	120 <i>débens</i> (de cobre)
Recebido em troca:	
2 boiões de gordura, ou seja:	60 <i>débens</i>
5 tangas de tecido fino, ou seja:	25 <i>débens</i>
1 vestimenta de linho meridional, ou seja:	20 <i>débens</i>
e 1 pele, ou seja:	15 <i>débens</i>

Este exemplo mostra como, nos mercados de outrora, tanto os produtos de consumo como o metal eram aceitos como valor de troca comercial. Assim, o boi custou realmente cento e vinte *débens* de cobre, mas desta “soma em cobre” nenhuma única unidade consistiu verdadeiramente em corpo metálico, pois sessenta *débens* de cobre foram pagos com dois boiões de gordura, vinte e cinco *débens* de cobre com cinco tangas de tecido fino, e assim por diante. No entanto, não se trata de uma simples troca no sentido definido anteriormente. Não é mais uma troca direta, mas um verdadeiro sistema monetário: graças a um padrão de metal, as mercadorias não são mais permutadas segundo a vontade dos negociantes ou os usos consagrados — em geral arbitrários —, mas desta vez em função de um sistema estável, admitido por todos, e que fixa aproximativamente seu “preço justo”.

Uma tabuleta de argila da Mesopotâmia, datando de cerca de 1800 a.C., constitui testemunho eloqüente a este respeito. Trata-se de uma carta endereçada por um rei de Quatna ao seu congênere de Ekallatîm. O primeiro acusa “seu irmão” de lhe ter enviado uma parca “soma de estanho” em troca de dois cavalos de valor muitas vezes superior:

“Não se deve dizer isto! Mas agora faço questão de dizer, para aliviar meu coração. Tu me pediras os dois cavalos que desejavas e eu os enviei. Não foi sem discussão e por inteiro que obtiveste de mim o que desejavas? E ousas enviar-me tão pouco estanho! Saiba que o preço desses cavalos aqui em Quatna é de seiscentos siclos de prata. E agora me envias apenas vinte *mines* de estanho! Que vão dizer os outros?”<sup>1</sup>

1. *Mine*: antiga unidade de peso equivalente a, aproximadamente, 500 gramas. (N. do E.)

Entendemos melhor ainda esta indignação ao sabermos hoje que na Mesopotâmia o siclo de prata valia na época de três a quatro *mines* de estanho: os dois cavalos deveriam ter sido pagos por uma soma entre 1.800 e 2.400 *mines* de estanho!

Não devemos pensar, no entanto, que em tais operações já se empregava o “dinheiro” no sentido em que o entendemos como forma de pagamento. Tratava-se apenas de introduzir nas transações uma espécie de unidade de valor à qual era relacionado o preço de cada mercadoria ou ação consideradas. Partindo desse princípio, podia-se então empregar em qualquer circunstância este ou aquele metal (evidentemente pesando-o no padrão desta unidade ponderável) como valor de troca, salário ou imposto. Mas podia acontecer de um indivíduo pouco escrupuloso falsificar os padrões, misturando aos metais preciosos uma quantidade de metal vil que não denunciava a fraude. O sujeito honesto que acreditava estar recebendo, por exemplo, como pagamento de um objeto sete siclos de ouro, e a quem se passava habilmente sete siclos de uma liga com aparência de ouro mas contendo um quarto de prata, perdia ao mesmo tempo, sem se dar conta, quase um quarto de sua mercadoria. Assim, o medo da falsificação contribuiu por muito tempo para restringir a transação com metais entre o povo e manteve a compra e venda através da troca de produtos da natureza ou de artesanato.

Finalmente, a idéia da *peça de moeda de troca* no sentido moderno da palavra surgiu provavelmente no século VII, simultaneamente entre os lídios da Ásia Menor e os chineses, quando o metal foi fundido em pequenos lingotes ou em peças fáceis de manipular, com um peso fixo e cunhadas com a marca oficial de uma autoridade pública — única habilitada a certificar “o peso certo e o quilate”. Assim foi inventado o sistema ideal de troca comercial, hoje universalmente adotado. O resto é uma outra história...

Foi desta forma que, ao aprender a contar abstratamente e a agrupar toda sorte de elementos segundo o princípio da base, o homem aprendeu a *estimar, avaliar e medir* grandezas diversas (pesos, comprimentos, áreas, volumes, capacidades etc.). De igual maneira, ele aprendeu a atingir e conceber números cada vez maiores antes mesmo de conseguir dominar a idéia do infinito.

Ele foi, assim, capaz de elaborar inúmeras técnicas operatórias (mentais, concretas ou, mais tarde, escritas) e de estabelecer os primeiros rudimentos de uma aritmética que será inicialmente prática antes de se tornar abstrata e de conduzir à álgebra. Também foi aberto o caminho para a elaboração de um calendário e de uma astronomia, ao lado de uma geometria baseada inicialmente nas medidas de comprimento, nas áreas e nos volumes, antes de se tornar especulativa e axiomática. Enfim, a aquisição desses dados fundamentais permitiu pouco a pouco que a humanidade tentasse medir o mundo, compreendê-lo um pouco melhor, colocando a seu serviço alguns de seus inumeráveis segredos, organizando e simultaneamente desenvolvendo sua economia.