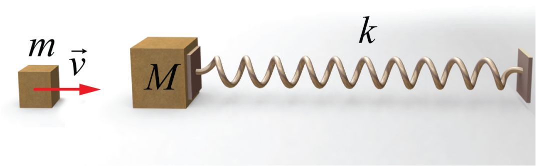
Lista de exercícios

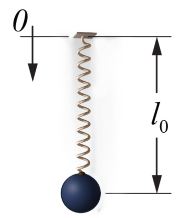
Oscilações harmônicas

Exercício 1 A figura abaixo ilustra um bloco de massa $M = 1\,\text{kg}$ em repouso sobre uma superfície sem atrito, conectado a uma mola de constante elástica $k = 4{,}4\,\text{N/m}$. Um outro corpo, de massa $m = 0{,}1\,\text{kg}$, segue em direção ao bloco com velocidade constante $v_0 = 10\,\text{m/s}$ e, ao colidir instantaneamente com ele, gruda nele (uma colisão totalmente inelástica, portanto). Após a colisão, os dois corpos oscilam como um só. Escolhendo $t = 0$ como o instante da colisão, responda:



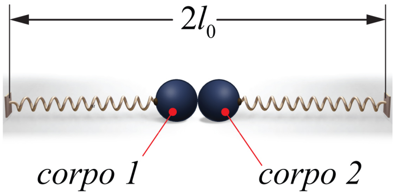
(a) Qual é a velocidade do sistema $m + M$ imediatamente após a colisão?
(b) Identifique as condições iniciais.
(c) Qual é a equação do movimento? Trata-se de um oscilador harmônico?
(d) Qual é a frequência angular do movimento?
(e) Ajuste $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ às condições iniciais.
(f) Qual é a velocidade $v(t)$ do sistema $m + M$?
(g) Qual é a energia mecânica do sistema como uma função do tempo?

Exercício 2 Um objeto de massa $m = 0{,}1\,\text{kg}$ está suspenso do teto por uma mola de constante elástica $k = 2\,\text{N/m}$ e comprimento relaxado $l_0 = 1\,\text{m}$, cuja massa é desprezível. Em $t = 0$, o objeto é solto em repouso, com a mola relaxada, sob a ação da aceleração da gravidade $g = 10\,\text{m/s}^2$. Escolhendo como sistema de referência o eixo $0z$ orientado para baixo, com origem no teto, responda:



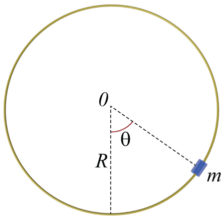
(a) Qual é a expressão da energia potencial gravitacional?
(b) Qual é a expressão da energia potencial elástica?
(c) Qual é a expressão da energia potencial $U(z)$?
(d) Esboce o gráfico de $U(z)$.
(e) Qual é a posição de equilíbrio?
(f) Identifique as condições iniciais.
(g) Qual é a equação diferencial do movimento?
(h) Determine $z(t)$, sabendo que $z(t) = A\cos(\omega t + \phi) + B$ é uma solução da equação do movimento, onde $B = \frac{mg}{k} + l_0$.

Exercício 3 Duas partículas, 1 e 2, de mesma massa $m = 10\,\text{g}$ estão presas por molas (constante elástica $k = 100\,\text{N/m}$, comprimento relaxado l_0 e massa desprezível) a paredes verticais opostas, separadas de $2l_0$, conforme ilustra a figura abaixo. As massas podem deslizar sem atrito sobre uma superfície horizontal. No instante $t = 0$, a partícula 1 é deslocada 1 cm para a *esquerda* e ali liberada com velocidade $\sqrt{3}\,\text{m/s}$ para a *esquerda*. Concomitantemente, a partícula 2 é deslocada 1 cm para a *direita* e ali liberada com velocidade $\sqrt{3}\,\text{m/s}$ para a *direita*.



(a) Identifique as condições iniciais das partículas 1 e 2.
(b) Ajuste as condições inicias para obter $x_1(t)$ e $x_2(t)$.
(c) Que condição deve ser satisfeira para que haja colisão em algum $t > 0$?
(d) As partículas colidem? Se sim, em que instante?
(e) Qual é a energia total do sistema?

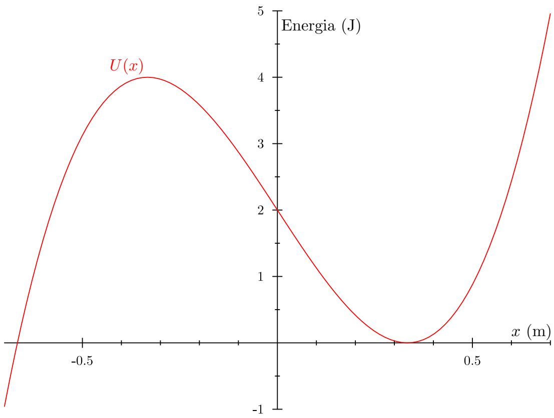
Exercício 4 Uma conta de massa m enfiada num aro vertical fixo de raio $R = 2{,}5\,\text{m}$, no qual desliza sem atrito, desloca-se em torno do ponto mais baixo, de tal forma que o ângulo θ permanece pequeno. Considere que a aceleração da gravidade é $g = 10\,\text{m/s}^2$.



(a) Mostre que o movimento é harmônico. Dica: θ é dito "pequeno" quando é possível fazer a aproximação $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$.
(b) Qual é a expressão do período da oscilação?
(c) Considere a condição inicial $\theta(0) = 0{,}1\,\text{rad}$ e $\dot{\theta}(0) = 0\,\text{rad/s}$. Encontre $\theta(t)$.

Exercício 5 Um objeto de massa m cai de uma altura h sobre o prato de uma balança de molas e fica grudado no prato. A constante da mola é k e as massas da mola e do prato podem ser desprezadas.
(a) Qual é a amplitude de oscilação do prato?
(b) Qual é a energia total da oscilação?

Exercício 6 Uma partícula de massa $m = 3\,\text{kg}$ pode se deslocar em uma dimensão, submetida a um potencial dado por $U(x) = 27x^3 - 9x + 2$, em unidades do SI (figura abaixo).



(a) Determine a expressão da força atuando sobre a partícula em função da posição x.
(b) Determine a equação do movimento.
(c) Calcule as posições de equilíbrio da partícula e indique o tipo de cada uma, ou seja, se é um ponto de equilíbrio estável, instável ou indiferente.

(d) Qual seria uma boa escolha de energia mecânica para que esse sistem oscile de modo aproximadamente harmônico?

(e) Aproxime o potencial $U(x)$ por um potencial harmônico $U'(x) = U_0 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$ nas imediações do ponto de equilíbrio estável $x = x_0$. Isto é, determine x_0, U_0 e k desta aproximação.

(f) Qual é a frequência angular desse movimento periódico?

(g) Se a partícula for deixada na condição de equilíbrio estável com velocidade de 1 m/s, ela realiza um movimento periódico? Justifique. Esse movimento é harmônico? Explique.

Respostas

Exercício 1

(a) 0,91 m/s

(b) $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0{,}91$ m/s

(c) $\ddot{x} + 4x = 0$

(d) $\omega = 2$ rad/s

(e) $x(t) = -0{,}45\cos(2t + \pi/2)$

(f) $v(t) = 0{,}90\,\mathrm{sen}(2t + \pi/2)$

(g) $E(t) = 0{,}44\,\mathrm{J} = \text{constante}$

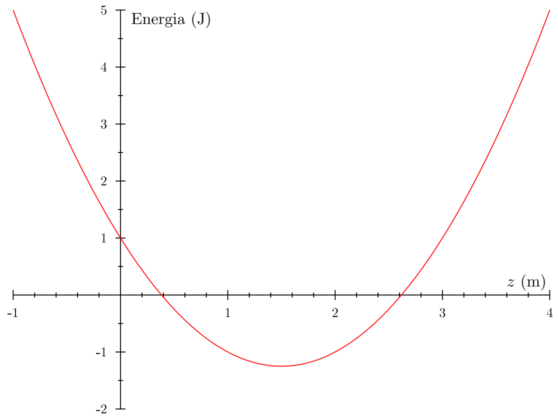
Exercício 2

(a) $U_g(z) = -z$

(b) $U_e(z) = (z-1)^2$

(c) $U(z) = z^2 - 3z + 1$

(d)



(e) $z_0 = 3/2$

(f) $z(0) = l_0$ e $\dot{z}(0) = 0$

(g) $\ddot{z} + 20z - 30 = 0$

(h) $z(t) = -\frac{1}{2}\cos(2\sqrt{5}t) + \frac{3}{2}$

Exercício 3

(a) Tomando o eixo x horizontal, para a direita, com a origem no ponto de contato das partículas: $x_1(0) = -0{,}01$ m, $\dot{x}_1(0) = -\sqrt{3}$ m/s, $x_2(0) = +0{,}01$ m e $\dot{x}_2(0) = +\sqrt{3}$ m/s

(b) $x_1(t) = -0{,}02\cos\left(100t - \frac{\pi}{3}\right)$ e $x_2(t) = -x_1(t)$.

(c) $x_1(t_\star) = x_2(t_\star)$, onde $t_\star$ é o instante da colisão.

(d) A colisão ocorre em $t_\star = \frac{\pi}{120}$ s.

(e) 0,04 J

Exercício 4

(a) A equação do movimento aproximado é $\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0$, característica do oscilador harmônico.

(b) $T = 2\pi\sqrt{R/g}$

(c) $\theta(t) = 0{,}1\cos(2t)$

Exercício 5

(a) $A = \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}$

(b) $E = mgh + \frac{(mg)^2}{2k}$

Exercício 6

(a) $F = -81x^2 + 9$

(b) $\ddot{x} + 27x^2 - 3 = 0$

(c) $x_0 = -1/3$ (instável) e $x_0 = +1/3$ (estável)

(d) $E = 0{,}1$ J, por exemplo. O sistema oscila harmonicamente em torno de $x_0 = 1/3$.

(e) $U'(x) = 21\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$

(f) $\omega = 3{,}74$ rad/s

(g) A energia mecânica é de $E = 1{,}5$ J, de modo que o intervalo em x onde a condição $U(x) \geq E$ vale é limitado. Além disso, a força é sempre restauradora (aponta sempre para a posição de equilíbrio). Logo, o movimento é periódico. Porém, a oscilação não é harmônica, pois o potencial $U(x)$ diverde da dependência $(x - x_0)^2$.