UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA
Departamento de Engenharia de Computação e Sistemas Digitais

PCS 2039
Modelagem e Simulação de Sistemas Computacionais

Graduação em Engenharia de Computação
4o. Módulo Acadêmico - 2017

V - Sistemas de Filas Simples

Agenda

- 5.1 Conceitos de Filas;
- 5.2 Relações entre as variáveis;
- 5.3 Processos Estocásticos;
- 5.4 Análise de Fila Única;
- 5.5 Filas Markovianas;
- Exercícios.

1 - Conceitos de Filas

- **Definição do Modelo de Filas:**
  - **Processo de Chegada: Medido através de *Intervalos de Chegadas*;**
    - **Seqüência de Valores Aleatórios, Independentes e Identicamente Distribuídos (IID);**
    - **Distribuição mais comum exponencial;**
  - **Processo de Serviço: O tempo de cada usuário na execução de um serviço:**
    - **Tempo de Execução: valores IID;**
    - **Número de Servidores: normalmente são idênticos;**
  - **Capacidade do Sistema (tamanho da população): número máximo de usuários do Sistema de Fila;**
  - **Tamanho da População: número potencial de usuários do Sistema de Fila;**

1 - Conceitos de Filas

- **Definição do Modelo de Filas:**
  - **Distribuições: M: exponencial, E: Erlang, D: Determinística e G: Geral.**
  - **Disciplina de Serviço (política de atendimento):**
    - **FCFS - *First Come First Served*;**
    - **RR -(*Round Robin*): fila circular;**
    - **LCFS - *Last Come First Served*;**
    - **LCFS-preenptivo: interrupção do último usuário que chegou;**
    - **PS - *Processor Sharing*: RR com um quantum pequeno associado.**
  - **Centros de Atraso: Sistemas que não possuem atraso (número infinito de Servidores);**
  - **Exemplos: G/G/1/∞/∞/FCFS = G/G/1**

1 - Conceitos de Filas

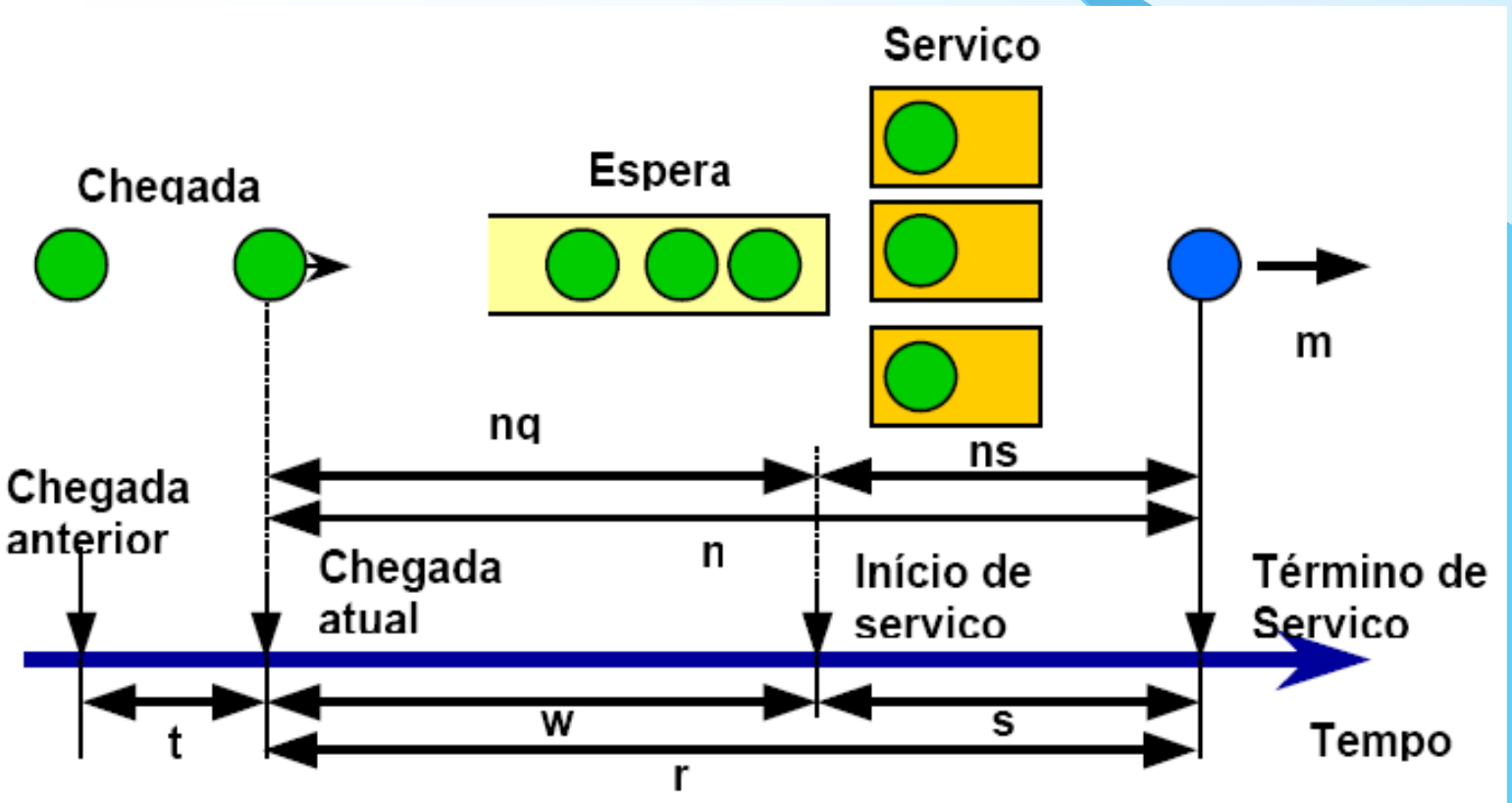
- **Definição do Modelo de Filas:**
  - **Exemplo2: M/M/3/20/1500/FCFS**
  - **Exercícios:**

1) Qual o problema com a Fila E/G/12/10/5/LCFS ?

2) Quais dos Sistemas de Fila tem melhor desempenho: M/M/3/300/50 ou M/M/3/100/50 ?

1 - Conceitos de Filas

- **Definição do Modelo de Filas:**
  - **Exemplo:**



2 - Relações entre as variáveis

- **Condição de estabilidade:**
  - **Taxa média de chegada menor que a taxa média de serviço;**
    - **$\lambda < m\mu$**
  - **Relação entre o número de usuários e o tempo de resposta:**
    - **Número médio no sistema = Taxa de Chegada de usuários * Tempo médio de usuário no Sistema**
    - **E[n] = λ * E[r] (Resultado de *Little*)**
  - **Exemplo: monitorando um servidor de banco de dados, verificou-se que o tempo médio para execução de uma transação é de 100 milisegundos. A taxa de requisições de transações é de 100 requisições por segundo. Qual o número médio de requisições no SGBD ?**

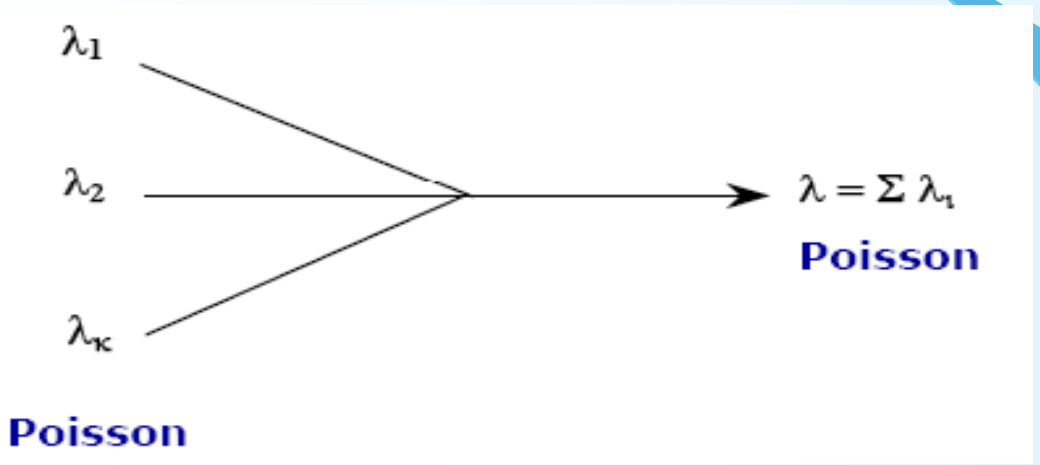
3 - Processos Estocásticos

- Variáveis aleatórias IID, indexadas pelo Tempo;
- Processos estocásticos com estado discreto. Exemplo: número de usuários na fila.
- Processo de Markov: os estados futuros dependem exclusivamente do estado atual;
- Processo de nascimento/morte: processo no estado n pode mudar somente para n+1 ou n-1;

3 - Processos Estocásticos

- **Distribuição de Poisson:**

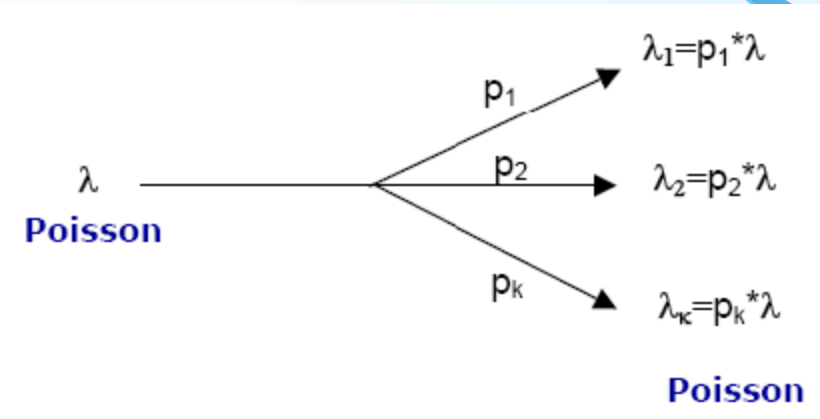
  a) Junção de Processos de Poisson:



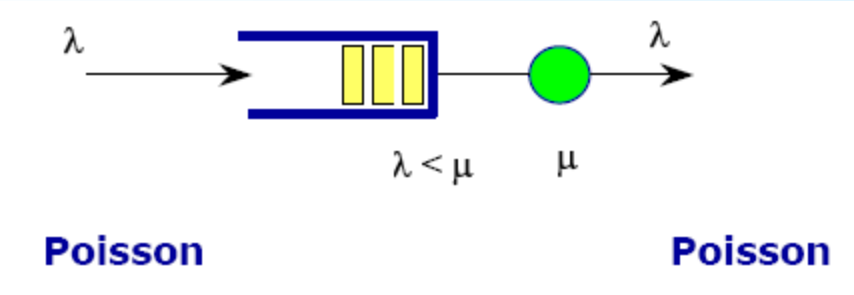
3 - Processos Estocásticos

- **Distribuição de Poisson:**

  b) Distribuição de Processos de Poisson:

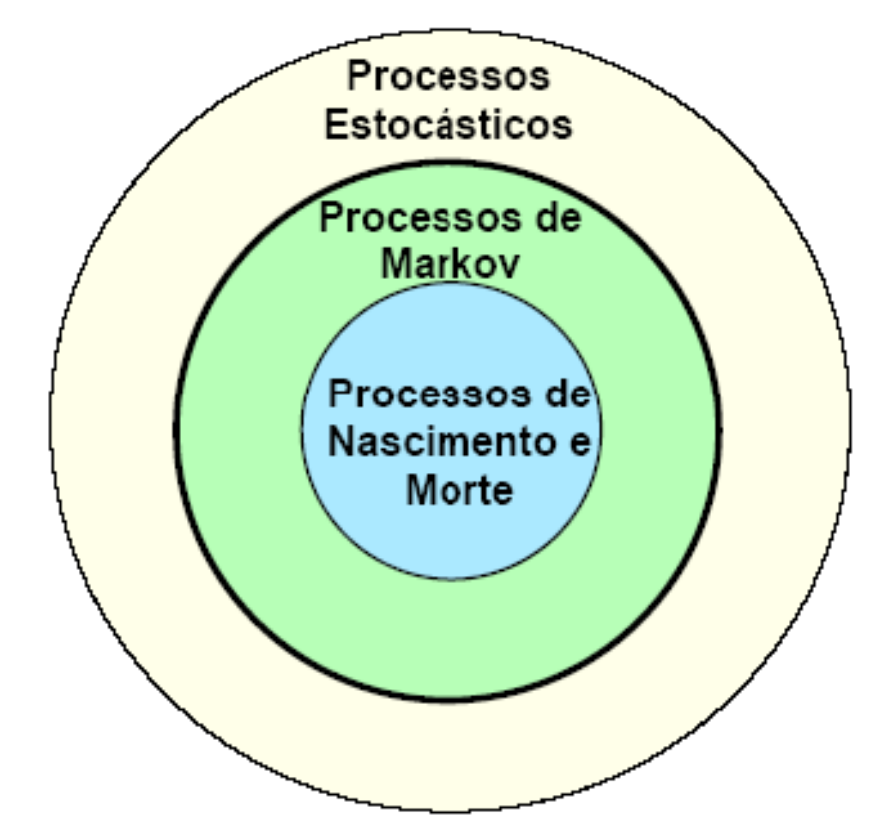


c) Partida de um sistema M/M/1



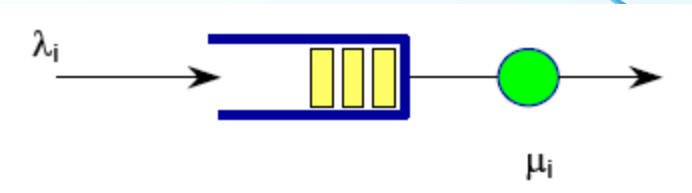
3 - Processos Estocásticos

- **Relação entre os diversos processos Estocásticos:**

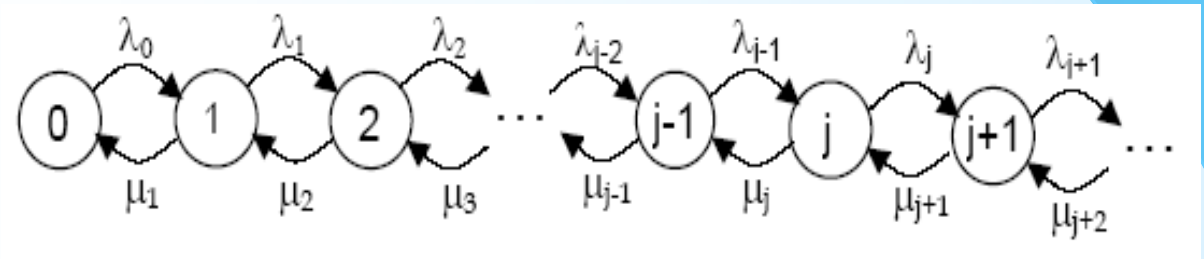


4 - Análise da Fila Única

- **Dada a seguinte fila única:**



- **Diagrama de transição de estados:**



4 - Análise da Fila Única

- **Probabilidade de Equilíbrio do Processo encontrar-se num determinado estado:**

$$p_n = p_0 \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}$$

- **Solução geral de Probabilidades de um processo de nascimento e morte:**

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}}$$

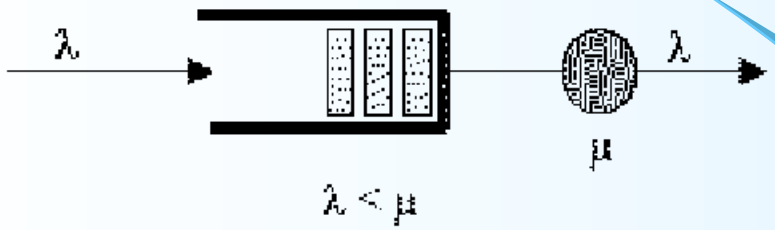
$$p_n = p_0 * \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}$$

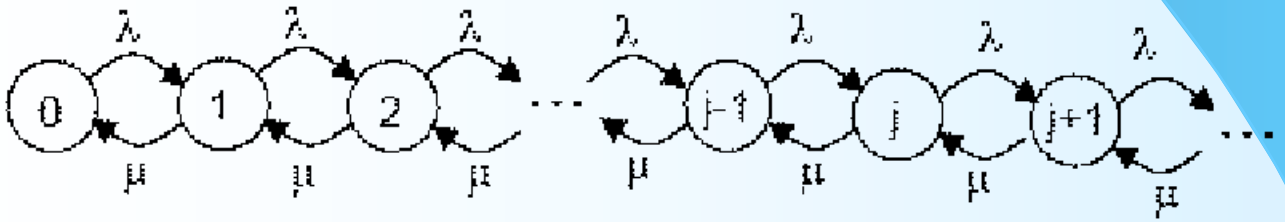
5 - Filas Markovianas

- **Filas onde a chegada e atendimento associados a um processo de Poisson (M/M/m/B);**
- **Taxas de chegada (λ) e serviços (μ) não se alteram**

5 - Filas Markovianas

Fila Única (M/M/1):





Aplicando-se a fórmula geral:

$$p_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n * p_0$$

sendo λ/μ intensidade de tráfego, representada por ρ

$$p_n = p_0 * \rho^n \text{ , onde } p_0 = 1 - \rho$$

5 - Filas Markovianas

Fila Única (M/M/1)

- **a. Fator de utilização do Servidor:**

$$U = 1 - P_0 = \rho$$

- **b. Número médio de usuários no Sistema:**

$$E(n) = \sum_{n=1}^{\infty} n.P_n = \sum_{n=1}^{\infty} n.(1-\rho).\rho^n = \frac{\rho}{(1-\rho)}$$

- **c. Variância do número de usuários:**

$$Var(n) = E(n^2) - E(n)^2 = \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2.(1-\rho).\rho^n\right] - E(n)^2 = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

- **d. Probabilidade de n ou mais usuários:**

$$p_{\geq n} = \sum_{j=n}^{\infty} p_j = \sum_{j=n}^{\infty} \rho^j.(1-\rho) = \rho^n$$

Fila Única (M/M/1)

- **e. Tempo médio de resposta E[r]:**

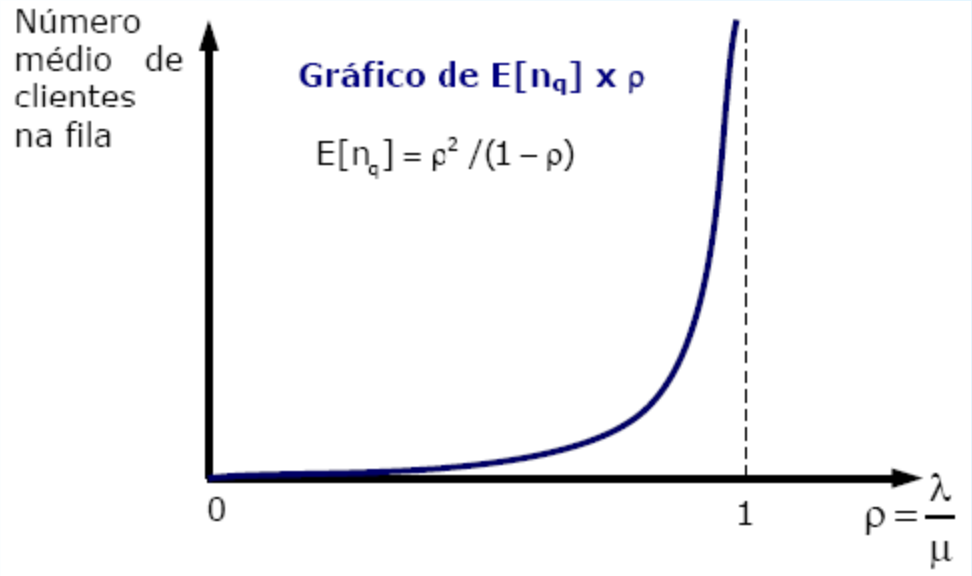
Considerando que $E[n] = \lambda * E[r]$ pelo Resultado de Little tem-se que:

$$E(r) = \frac{E(n)}{\lambda} = \frac{\rho}{(1-\rho)} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{\frac{1}{\mu}}{1-\rho}$$

Fila Única (M/M/1)

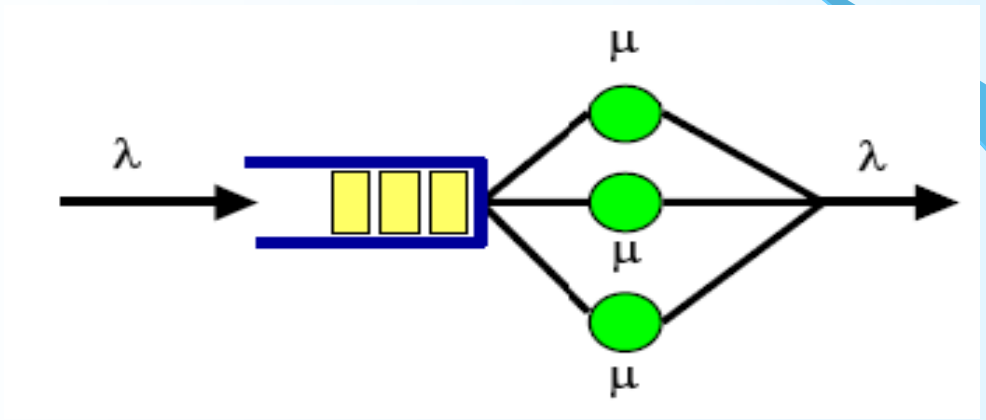
f.Distribuição de probabilidades do tempo de Resposta

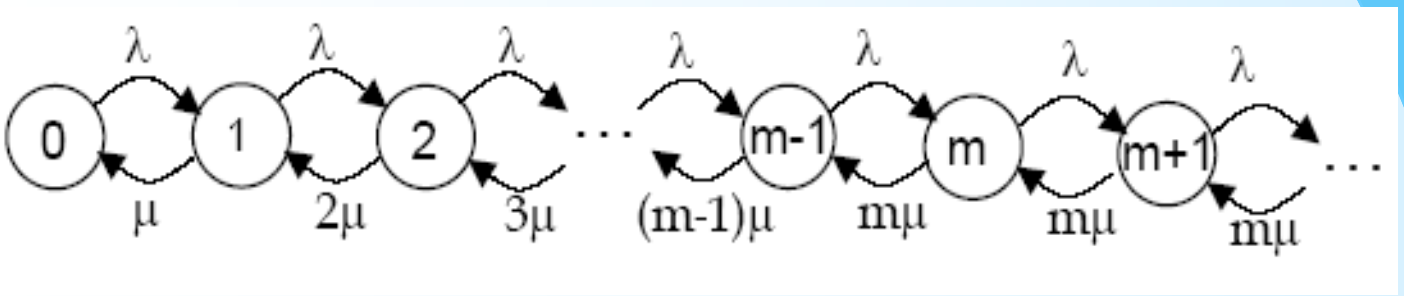
F(r): $F(r) = 1 - e^{-r\mu(1-\rho)}$



5 - Filas Markovianas

Fila Única (M/M/m): m servidores





5 - Filas Markovianas

Fila Única (M/M/1/B): limite de usuários no sistema (B)

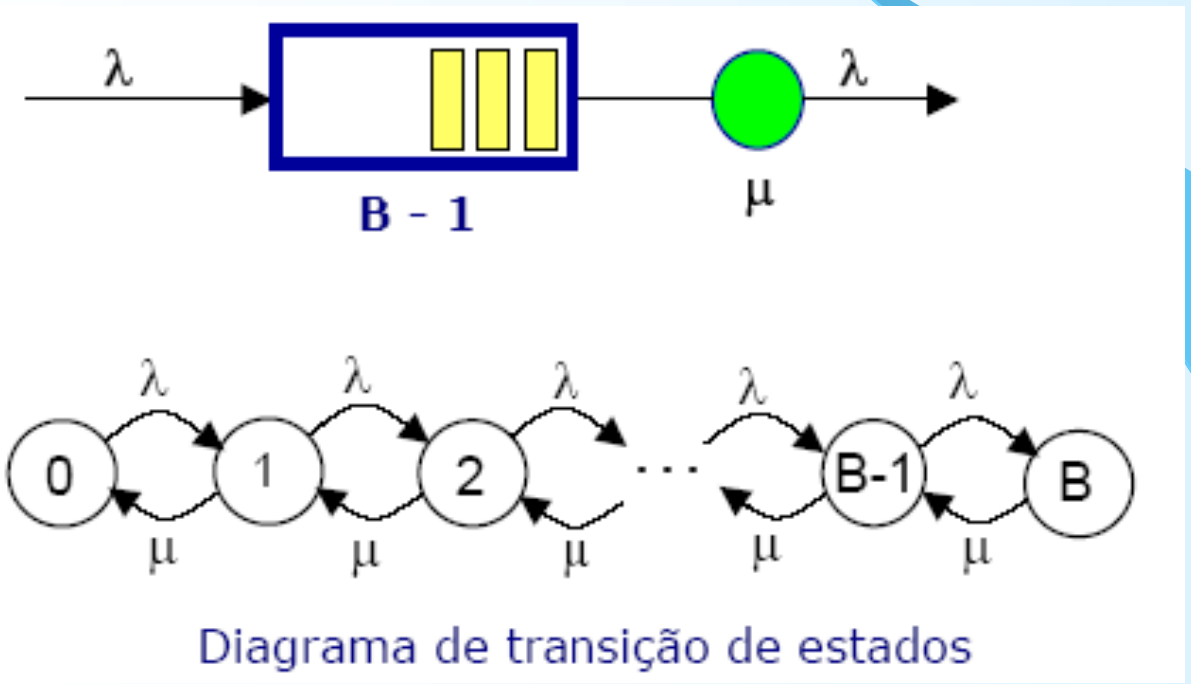


Diagrama de transição de estados

5 - Filas Markovianas

Exemplo:

Num Gateway de rede, levantamentos anteriores constaram que os pacotes chegam a uma taxa média de 125 pps (pacotes por segundo) e o gateway utiliza 2 milisegundos para encaminha-los.

Usando o Modelo M/M/1, responda:

- Qual é a probabilidade de overflow no gateway (tem somente 13 buffers disponíveis);

- Quantos Buffers são necessários para manter a perda de pacotes abaixo de um pacote por milhão.

Bibliografia

- ✓ **Apostila 5.**