Lista 3. As leis de Kepler e gravitação universal de Newton

Mecânica I, N. Caticha - Entrega 22/10/14

6 de Outubro de 2014

0.1 Problema de Newton-Kepler

- A segunda lei de Kepler diz que o raio vetor dos planetas varre áreas iguais em tempos iguais. Newton a usou para mostrar que a força gravitacional é central. Para isso usou a segunda lei da dinâmica: a força gravitacional gera mudança no estado de movimento ($\vec{F} \propto \vec{a}$), e usou um argumento geométrico para mostrar que a área de certos triângulos é igual. Mostre a prova geométrica de Newton de que a força gravitacional é central.
- Obtenha a partir de considerações de similaridade, da segunda lei da dinâmica e do comportamento $1/r^2$ da força gravitacional a relação entre o período e o tamanho de uma órbita no problema de dois corpos.
- Mostre que uma cônica (elipse, parábola ou hipérbole) pode ser descrita em coordenadas polares pela equação

$$r(1 + \epsilon \cos \theta) = p,$$

onde o centro de coordenadas polares está em um dos focos e o ângulo θ se mede a partir da direção do eixo (maior no caso da elipse). O comprimento da linha que vai desse foco até a elipse, com $\theta = \frac{\pi}{2}$, é p e recebe o nome (gastando o latim) de *semilactus rectus*.

- Agora estamos prontos para mostrar que a teoria de Newton nos dá as leis de Kepler para o problema de dois corpos.

Primeiro descreva o movimento no referencial onde o centro de massa do sistema está parado. Defina a massa reduzida e a total.

- Mostre que a segunda lei de Kepler decorre da conservação do momento angular.
- Mostre que a parte radial da equação de Newton para o problema de Kepler pode ser escrita como

$$\mu \ddot{r} = -\frac{dU(r)}{dr},$$

e escreva $U(r)$

- Note que $U(r)$ tem uma contribuição puramente gravitacional e outra devido à rotação. Mostre que uma (i) é atrativa e a outra (ii) é repulsiva. Faça um esboço deste função. Dê um exemplo de outro problema físico onde a parte atrativa (i), o potencial, é atrativa. De um exemplo onde a parte (ii) repulsiva muda de sinal. Isso é possível?
- Encontre uma expressão da energia total conservada, que so dependa de $r(t)$ e de $\dot{r}(t)$
- Encontre o valor r_0 do raio que minimiza a energia potencial $U(r)$.
- Encontre o período de pequenas “oscilações” em torno de r_0 . Use o fato que o período está relacionado com a segunda derivada $\frac{d^2U(r)}{dr^2}$. Para pequenas oscilações podemos aproximar o potencial por uma parábola e voltamos ao caso anteriormente estudado de oscilações harmônicas.
- Encontre a equação diferencial satisfeita por $\theta(r)$. Resolva-a e mostre que a solução geral é uma cônica.
- Finalmente escreva a solução acima como $r(1 + \epsilon \cos \theta) = p$. Encontre os valores da excentricidade ϵ e do semilactus rectum p em termos da energia total E , do momento angular L , da constante de Gravitação universal G , da massa do sol M e da massa do planeta m .
- Pense como fica o caso em que há mais de dois corpos (e.g. Lua-Terra-Sol). Procure literatura sobre o problema de três corpos. Como levar em conta que a terra e o sol não são objetos pontuais mas estão distribuídos numa região do espaço? Procure entender que se essas regiões forem exatamente esféricas a solução acima encontrada continua válida. E se não for esférica?
- Faça os problemas 8.23, 8.24, 8.27, 8.34/