

Eletromagnetismo I

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2º Semestre 2014

Preparo: Diego Oliveira

Aula 15

Alguns Problemas Relevantes sobre o Cálculo do Campo Magnético

Neste capítulo nos concentraremos na aplicação do método de calcular o campo magnético calculando primeiro o potencial vetor

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1)$$

e depois o campo magnético através da expressão $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Nenhuma vez utilizamos a expressão direta para o campo magnético

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau' \quad (2)$$

ou a lei de Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \quad (3)$$

O uso da Lei de Ampère é visto exaustivamente em Física III e, por isso, só vamos utilizá-la em um problema em que sua aplicação é importante. No entanto seu uso será cobrado e os alunos devem praticar resolvendo os problemas 5.13 a 5.16 do livro texto.

Outro problemas interessantes são

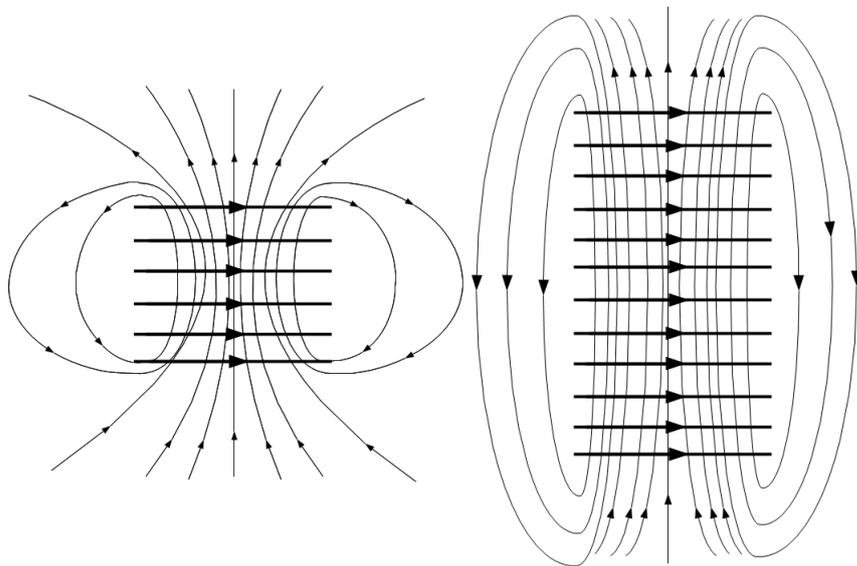
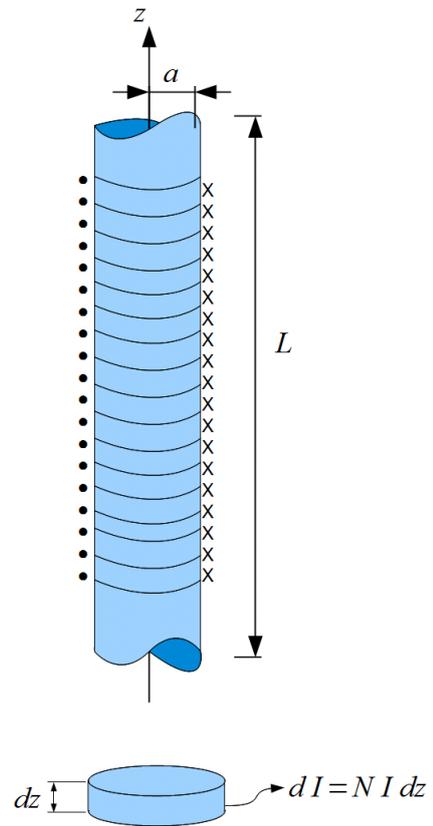
Exemplos: 5.11 e 5.13

Problemas: 5.6; 5.13; 5.16; 5.21; 5.22; 5.23; 5.24; 5.26; 5.35; 5.37

Solenóide Infinito

Uma aplicação da Lei de Ampère é o cálculo de um solenoide com uma distribuição densa de corrente. Considere o solenoide mostrado na figura tal que $L \gg a$ e a densidade de espiras seja N espiras/comprimento. O objetivo do problema é calcular o campo magnético quando uma corrente I flui pelas espiras.

Naturalmente poderíamos supor que o solenoide é formado por uma distribuição contínua de espiras elementares de altura dz , cada uma transportando uma corrente $dI = N I dz$, e integrar a expressão que obtivemos na aula passada para o campo magnético de uma espira circular de $z = -L$ a $z = L$, $L \rightarrow \infty$. Mas isto implicaria na interação de funções elípticas, o que não é trivial.



Em Física III este problema é solucionado observando que, quando $L \rightarrow \infty$, o campo externo do solenoide se reduz rapidamente, na proximidade das espiras, e tende a ser uniforme ao longo do eixo no interior do solenoide. Considerando então que o campo fora do solenoide pode ser desprezado e que dentro dele é aproximadamente uniforme, podemos utilizar diretamente a Lei de Ampère para calcular o campo, como é feito em Física III.

Tomando o percurso \mathcal{C} com parte dentro do solenoide e parte fora, como mostra a figura. Então

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b B dz + \int_b^c B(\hat{e}_z \cdot \hat{e}_x) dx + \int_c^d \vec{B} \cdot (-\hat{e}_z) dz + \int_d^a B(\hat{e}_z \cdot (-\hat{e}_x)) dx = \mu_0(NI)\ell \quad (4)$$

\therefore

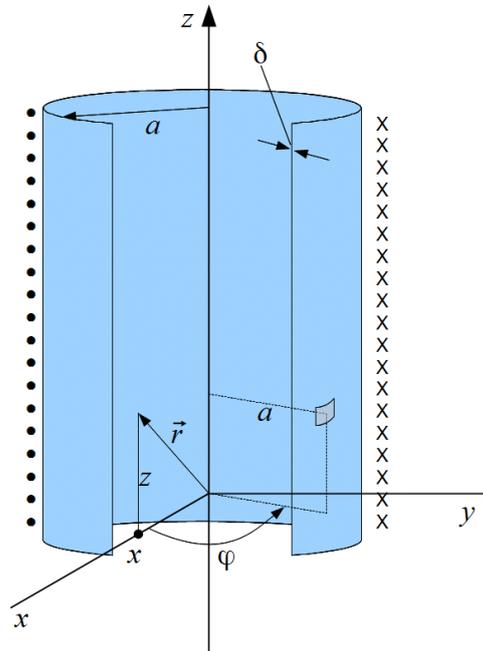
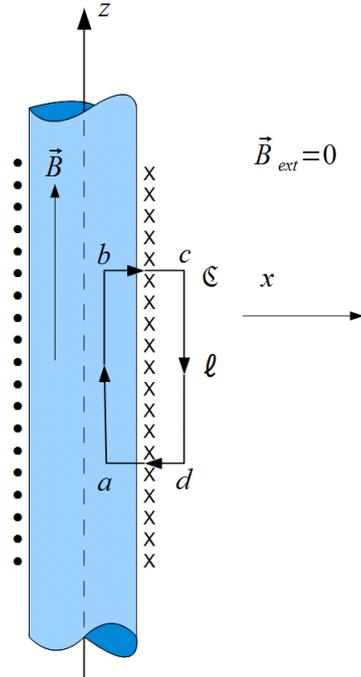
$$B \cdot \ell = \mu_0 NI \ell \quad \therefore \boxed{\vec{B} = \mu_0 NI \hat{e}_z} \quad (5)$$

Uma dúvida que os alunos sempre têm é se as aproximações feitas para utilizar a Lei de Ampère são válidas. Vamos esclarecer esta questão fazendo o cálculo direto do campo, utilizando um método desenvolvido por Dasgupta [B.B. Dasgupta; Am. J. Phys. 52, 258 (1984)] que evita a integral das integrais elípticas

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (6)$$

A densidade de corrente vezes o volume elementar pode ser escrita como

$$\vec{j}(\vec{r}') d\tau' = \vec{j}(\vec{r}') \underset{\substack{\uparrow \\ \text{"espessura do solenoide"}}}{\delta} (ad\phi') = (NI) adz' d\phi' \hat{e}_\phi \quad (7)$$



por outro lado

$$\vec{r} = x\hat{e}_x + z\hat{e}_z; \quad \vec{r}' = a\cos\varphi'\hat{e}_x + a\sin\varphi'\hat{e}_y + z'\hat{e}_z$$

$$\therefore \vec{r} - \vec{r}' = (x - a\cos\varphi')\hat{e}_x - a\sin\varphi'\hat{e}_y + (z - z')\hat{e}_z$$

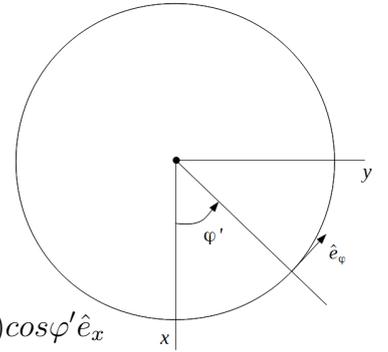
$$\therefore |\vec{r} - \vec{r}'| = [x^2 + a^2 - 2ax\cos\varphi' + (z - z')^2]^{1/2} \quad (8)$$

$$\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') = NIadz'\hat{e}_{\varphi'} \times [(x - a\cos\varphi')\hat{e}_x - a\sin\varphi'\hat{e}_y + (z - z')\hat{e}_z] \quad (9)$$

Mas $\hat{e}_{\varphi} = -\sin\varphi\hat{e}_x + \cos\varphi\hat{e}_y$; então

$$\hat{e}_{\varphi} \times [(x - a\cos\varphi')\hat{e}_x - a\sin\varphi'\hat{e}_y + (z - z')\hat{e}_z] =$$

$$a\sin^2\varphi'\hat{e}_z + (z - z')\sin\varphi'\hat{e}_y - (x - a\cos\varphi')\cos\varphi'\hat{e}_z + (z - z')\cos\varphi'\hat{e}_x \quad (10)$$



\therefore

$$\hat{e}_{\varphi} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \cos\varphi'(z - z')\hat{e}_x + \sin\varphi'(z - z')\hat{e}_y + (a - \cos\varphi')\hat{e}_z \quad (11)$$

\therefore

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} N I a \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\cos\varphi'(z - z')\hat{e}_x + \sin\varphi'(z - z')\hat{e}_y + (a - \cos\varphi')\hat{e}_z] dz'}{[x^2 + a^2 + (z - z')^2 - 2ax\cos\varphi']^{3/2}} \quad (12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z - z') dz'}{[x^2 + a^2 - 2ax\cos\varphi' + (z - z')^2]^{3/2}} \quad \begin{matrix} = \\ t = z - z' \\ dt = -dz' \end{matrix} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overbrace{t}^{\text{impar}} dt}{[x^2 + a^2 - 2ax\cos\varphi' + \underbrace{t^2}_{\text{par}}]^{3/2}} = 0 \quad (13)$$

\Rightarrow Componentes B_x e B_y se anulam rigorosamente!

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{[x^2 + a^2 - 2ax\cos\varphi' + (z - z')^2]^{3/2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{[x^2 + a^2 - 2ax\cos\varphi' + \underbrace{t^2}_{\text{par}}]^{3/2}} =$$

$$\left[\frac{t}{(x^2 + a^2 - 2ax\cos\varphi')\sqrt{x^2 + a^2 - 2ax\cos\varphi' + t^2}} \right] = \frac{2}{(x^2 + a^2 - 2ax\cos\varphi')} \quad (14)$$

$$\therefore B_z(\vec{r}) \frac{\mu_0}{2\pi} NIa \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' \frac{(a - x\cos\varphi')d\varphi'}{x^2 + a^2 - 2ax\cos\varphi'} = \frac{\mu_0}{\pi} NIa \int_0^{\pi} \frac{(a - x\cos\varphi')d\varphi'}{x^2 + a^2 - 2ax\cos\varphi'} \quad (15)$$

Tabela de Integrais

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(m\theta)d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} = \begin{cases} \frac{\pi a^m}{1-a^2}; & a^2 < 1; \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ 0; & a^2 > 1 \end{cases} \quad (16)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{(a - x\cos\varphi')d\varphi'}{x^2 + a^2 - 2ax\cos\varphi'} = a \int_0^{\pi} \frac{d\varphi'}{x^2 + a^2 - 2ax\cos\varphi'} - x \int_0^{\pi} \frac{\cos\varphi'd\varphi'}{x^2 + a^2 - 2ax\cos\varphi'}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{a} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi'}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{a}\right)\cos\varphi'}}_{(m=0)} - \left(\frac{x}{a}\right) \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\cos\varphi'd\varphi'}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{a}\right)\cos\varphi'}}_{(m=1)} \quad (17)$$

As integrais só não são nulas para $x^2 < a^2 \Rightarrow$ campo fora do solenoide é nulo!

$$\therefore \int_0^{\pi} \frac{(a - x\cos\varphi')}{x^2 + a^2 - 2ax\cos\varphi'} d\varphi' = \frac{1}{a} \frac{\pi}{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \frac{x^2}{a^2} \frac{\pi \frac{x}{a}}{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{\pi}{a} \quad (18)$$

$$\therefore \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 NIa}{\pi} \frac{\pi}{a} \hat{e}_z \quad \therefore \boxed{\vec{B} = \mu_0 NI \hat{e}_z} \quad (19)$$