

# Eletromagnetismo I

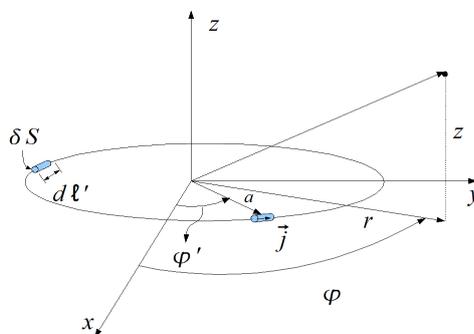
Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2º Semestre 2014

Preparo: Diego Oliveira

## Aula 14

### Campo Magnético de uma Espira de Corrente

Um exemplo de cálculo do campo magnético é o de uma espira de corrente, porque têm muitas aplicações práticas. Consideremos uma espira circular, de raio  $a$ , transportando um corrente  $I$ . Queremos calcular o campo produzido pela corrente circulando na espira em qualquer ponto do espaço, fixado pelas coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, \varphi)$ . Em primeiro lugar, notamos que estamos supondo que a seção transversal do fio da espira tenha área  $\delta S$  suficientemente pequena para que possamos considerar



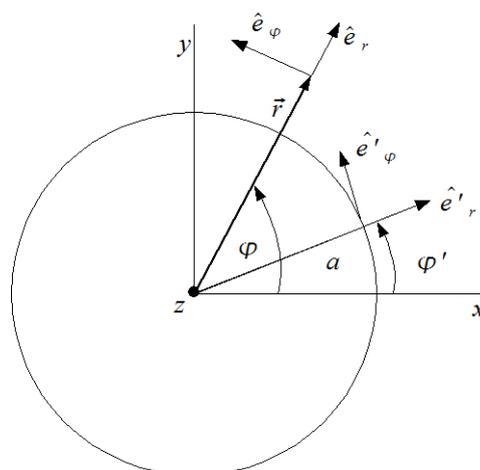
$$\vec{j}(\vec{r}')d\tau' = \vec{j}(\vec{r}')\delta S d\ell' = j(\vec{r}')\delta S d\vec{\ell}' = I\vec{\ell}' \quad (1)$$

O raio vetor em que está um elemento de corrente da espira é dado por

$$\vec{r}' = a\hat{e}'_r = \cos\varphi'\hat{e}_x + a\sin\varphi'\hat{e}_y \quad (2)$$

O raio do ponto de observação é dado por

$$\vec{r} = r\cos\varphi\hat{e}_x + a\sin\varphi\hat{e}_y + z\hat{e}_z \quad (3)$$



Portanto

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = [(r \cos \varphi - a \cos \varphi')^2 + (r \sin \varphi - a \sin \varphi')^2 + z^2]^{1/2} \quad (4)$$

$\therefore$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = [r^2 + a^2 + z^2 - 2ar(\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi')]^{1/2} \quad (5)$$

ou

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = [r^2 + a^2 + z^2 - 2ar \cos \alpha]^{1/2} \quad (6)$$

onde

$$\cos \alpha = \cos(\varphi - \varphi') = \cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi' = \cos(\varphi - \varphi') \quad (7)$$

Finalmente, notamos que o elemento de comprimento  $d\vec{\ell}'$ , paralelo à densidade de corrente  $\vec{j}$ , é dado por

$$d\vec{\ell}' = a d\varphi' \hat{e}_{\varphi'} \quad (8)$$

Substituindo estas expressões para o potencial vetor, obtemos

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\hat{e}_{\varphi'} d\varphi'}{[r^2 + a^2 + z^2 - 2ar \cos \alpha]^{1/2}} \quad (9)$$

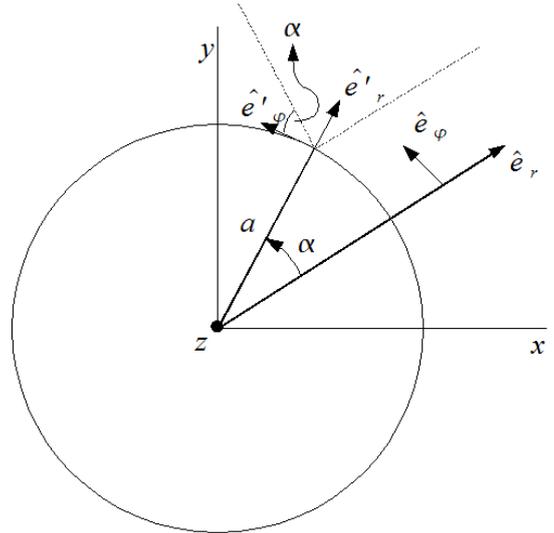
Para fazer a integral, temos que decompor  $\hat{e}'_{\varphi}$  em direções que permaneçam fixas durante a integração. É mais útil escolher as direções que dão a posição do ponto de observação onde  $\vec{A}$  deve ser determinado; nos referindo à figura, temos que ( $d\alpha = d\varphi'$ )

$$\hat{e}'_{\varphi} = \cos \alpha \hat{e}_{\varphi} - \sin \alpha \hat{e}_r \quad (10)$$

$\therefore$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \alpha \hat{e}_{\varphi} - \sin \alpha \hat{e}_r}{[a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos \alpha]^{1/2}} \quad (11)$$

No intervalo de integração a função  $\cos \alpha$  é par e  $\sin \alpha$  é ímpar. Então a integral do



termo envolvendo  $\text{sen}\alpha$  se anual e

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \hat{e}_\varphi \int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha d\alpha}{[a^2 + r^2 + z^2 - 2a r \cos\alpha]^{1/2}} \quad (12)$$

Esta integral não pode ser expressa em termos de funções elementares; mas pode se expressas em funções das chamadas integrais elípticas,

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2\theta}}; \quad \text{integral elíptica de primeira espécie} \quad (13)$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2\theta} d\theta; \quad \text{integral elíptica de segunda ordem.} \quad (14)$$

onde  $0 \leq k < 1$ . [Arfken & Weber; Mathematical Methods for Physicists (8° ed)].

No entanto, para escrever a integral em termos dessas funções, são necessárias fazer algumas transformações não óbvias; vamos detalha-las a seguir.

1. Transformação  $\beta = \pi - \alpha$ ;  $\therefore \cos\alpha = -\cos\beta$ ;  $d\alpha = -d\beta$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \hat{e}_\varphi \int_\pi^0 \frac{\cos\beta d\beta}{\sqrt{a^2 + r^2 + z^2 + 2a r \cos\beta}} \quad (15)$$

2. Transformação  $\cos\beta = 1 - 2\text{sen}^2\beta/2 = 1 - 2\text{sen}^2\theta$ ;  $\theta = \beta/2$ ;  $d\beta = 2d\theta$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I a}{\pi} \hat{e}_\varphi \int_{\pi/2}^0 \frac{(1 - 2\cos^2\theta)d\theta}{\sqrt{a^2 + z^2 + r^2 + 2ar - 4arsen^2\theta}} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{\pi} \frac{\hat{e}_\varphi}{\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{(2\text{sen}^2\theta - 1)d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2\theta}} \end{aligned} \quad (16)$$

onde definimos

$$k^2 = \frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2} \quad (17)$$

3. Finalmente, para tentar escrever a integral como uma combinação de integrais elípticas, fazemos

$$\frac{2\text{sen}^2\theta - 1}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2\theta}} = \frac{c_1}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2\theta}} + c_1 \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2\theta} = \frac{c_1 + c_2 - c_2 k^2 \text{sen}^2\theta}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2\theta}} \quad (18)$$

∴

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= -1 \\ c_2 k^2 &= -2; \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad c_1 = -1 + \frac{2}{k^2}; \quad c_2 = -\frac{2}{k^2} \quad (19)$$

Então

$$\therefore \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I a}{\pi} \hat{e}_\varphi \frac{1}{\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \frac{2}{k^2} \left[ \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right] \quad (20)$$

Por outro lado,  $\sqrt{(a+r)^2 + z^2} = \frac{2\sqrt{ar}}{k}$ ; então

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{\sqrt{a/r}}{k} \left[ \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) - E(k) \right] \hat{e}_\varphi} \quad (21)$$

$$k = 2\sqrt{\frac{ar}{(a+r)^2 + z^2}} \quad (22)$$

## Campo Magnético

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] \hat{e}_r + \left[ \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \hat{e}_\varphi + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right] \hat{e}_z \quad (23)$$

Como  $\vec{A}$  só tem componente  $\varphi$ , obtemos

$$B_r = -\frac{\partial A}{\partial z}; \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A) = \frac{A}{r} + \frac{\partial A}{\partial r} \quad (24)$$

Para calcular as derivadas, usamos as relações

$$\frac{dK}{dk} = -\frac{K}{k} + \frac{E}{k(1-k^2)}; \quad \frac{dE}{dk} = -\frac{K}{k} + \frac{E}{k} \quad (25)$$

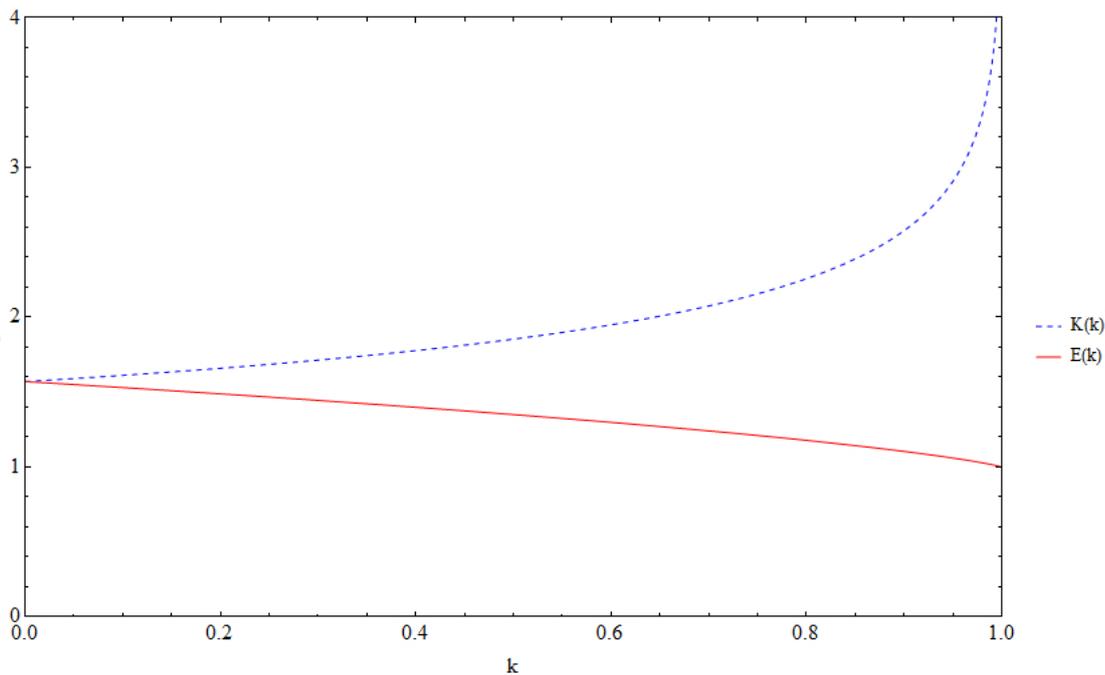
$$\frac{dK}{dr} = \frac{k}{2r} \frac{(a+r)^2 + z^2 - 2(a+r)r}{(a+r)^2 + z^2}; \quad \frac{dK}{dz} = \frac{k}{2r} \frac{a^2 - r^2 + z^2}{(a+r)^2 + z^2} \quad (26)$$

Com estas relações obtemos as expressões para  $B_z$  e  $B_r$ , com um pouco de álgebra. Não vamos fazer todas as derivações em aula, deixando-as para a quarta série de exercícios.

O resultado final é

$$\begin{aligned}
 B_r &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r[(a+r)^2 + z^2]^{1/2}} \left[ -K(k) + \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(k) \right] \\
 B_z &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r[(a+r)^2 + z^2]^{1/2}} \left[ K(k) + \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(k) \right]
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Estas expressões são obviamente complexas, mas fáceis de serem utilizadas em cálculos numéricos. Primeiro é importante notar que, quando  $k \rightarrow 0$ ,  $K(0) = E(0) = \pi/2$ . Quando  $k \rightarrow 1$ ,  $K(k \rightarrow 1)$  divergente, mas  $E(k = 1) = 1$ . Então o comportamento das duas funções é monotônico em função de  $k$ , como mostra a figura.



Para implementação em cálculos numéricos, normalmente se utilizam as aproximações polinomiais para  $K(k)$  e  $E(k)$  disponíveis em *M. Abramovitz & I. Stegun; Handbook of Mathematical Functions, Section 17.3* [disponível em [people.math.sfu.ca/~cbm/aadns](http://people.math.sfu.ca/~cbm/aadns)].

Uma calculadora online para estas funções pode ser encontrada em:  
[keisan.casio.com/exec/system/1180573454](http://keisan.casio.com/exec/system/1180573454).

## Comportamentos assintóticos do campo produzido pela espira circular

É interessante verificar o comportamento do campo produzido pela espira de corrente para duas situações de interesse prático; próximo do eixo da espira e a uma distância  $R \gg a$  da espira.

### Comportamento próximo do eixo

Consideremos situações em que  $r \ll a$ . Se simplesmente fizermos  $r = 0$ , obtemos  $k = 2\sqrt{ar/(a^2 + z^2)} = 0$ . Mas, neste limite,  $K(0) = E(0) = \pi/2$  e obtemos das expressões das componentes do campo  $B_r = 0$  e

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (28)$$

que é o resultado para o campo ao longo do eixo da espira obtido pela Lei de Biot-Savart no curso de Física III. Mas, na realidade, queremos determinar o comportamento de  $B_r$  e  $B_z$  para  $r \ll a$ , mas não nulo. Para obter este resultado, notamos que no limite

$$k^2 = \frac{4ar}{a^2 + z^2} \ll 1 \quad (29)$$

podemos desenvolver os integrandos de  $K(k)$  e  $E(k)$  em série de Taylor, ou seja,

$$[1 - k^2 \text{sen}^2 \theta]^{\pm 1} = 1 \pm \frac{1}{2} k^2 \text{sen}^2 \theta \mp \frac{1 \times 3}{2 \times 4} (k^2 \text{sen}^2 \theta)^2 + \dots \quad (30)$$

e fazer as integrais termo a termo. Fazendo isto (que está feito na série de exercícios) obtemos

$$K(k) \approx \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4}\right)^2 k^4 \dots \right] \quad (31)$$

$$E(k) \approx \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4}\right) k^4 \dots \right] \quad (32)$$

de forma que

$$\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \approx \frac{\pi}{2} \left[ \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) \left(1 + \frac{k^2}{2} + \frac{3^2}{2^6} k^4 + \dots\right) - \left(1 - \frac{k^2}{2} - \frac{3}{2^6} k^4 + \dots\right) \right] \quad (33)$$

ou

$$\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \approx \frac{\pi}{2^5} k^4 \quad (34)$$

Portanto a expressão para o potencial vetor próximo ao eixo da espira fica

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0 I}{2^5} \sqrt{\frac{a}{r}} k^3 \hat{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4} \frac{a^2 r}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{e}_\varphi \quad (35)$$

As componentes do campo magnético próximo ao eixo da espira ficam

$$B_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} = \frac{3\mu_0 I}{4} \frac{a^2 r}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \quad (36)$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (37)$$

Esta última expressão é igual à obtida pelo cálculo de  $B_z$  no eixo usando a “Lei” de Biot-Savart. Por outro lado, a componente  $B_r$ , só existe fora do eixo e, quando  $z \gg a$ ,  $B_r$  se comporta com

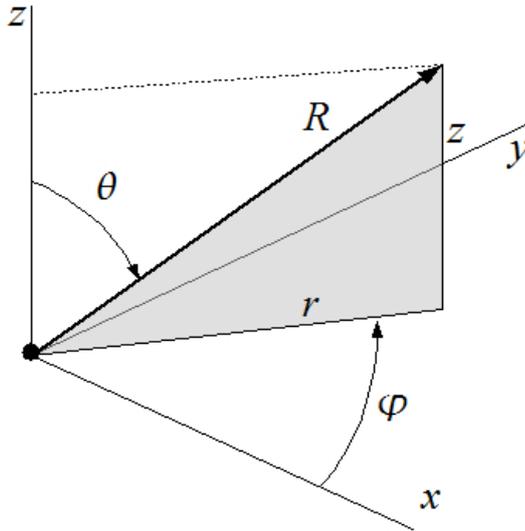
$$B_r \approx \frac{3\mu_0 I}{4} \frac{a^2 r}{z^4} \quad (38)$$

Portanto a componente  $B_r$ , próxima ao eixo, cresce com  $r$ .

## Campo Longe da Espira

Neste caso, temos que considerar tanto  $r$  como  $z$  muito maior que  $a$ . Para isso, é mais conveniente tomar coordenadas esféricas,  $(R, \theta, \varphi)$ ,  $R^2 = r^2 + z^2$ , e tomar o limite  $R \gg a$ . Nessas coordenadas, temos que  $r = R \cos \theta$ ;  $z = R \sin \theta$  e

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2} \\ &= \frac{4aR \sin \theta}{a^2 + R^2 \sin^2 \theta + 2aR \sin \theta + R^2 \cos^2 \theta} \\ &= \frac{4 \frac{a}{R} \sin \theta}{1 + 2 \frac{a}{R} \sin \theta} \end{aligned} \quad (39)$$



Portanto, no limite  $R \gg a$ , temos  $k^2 \approx 4 \frac{a}{R} \text{sen}\theta \ll 1$  e, novamente,

$$\vec{A}(\vec{R}) \approx \frac{\mu_0 I}{2^5} \sqrt{\frac{a}{r}} k^4 \hat{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2^5} \sqrt{\frac{a}{R \text{sen}\theta}} 2^3 \sqrt{\frac{a \text{sen}\theta}{R}} \frac{a \text{sen}\theta}{R} \hat{e}_\varphi \quad (40)$$

$\therefore$

$$\vec{A}(\vec{R}) \approx \frac{\mu_0 I a^2 \text{sen}\theta}{4 R} \hat{e}_\varphi \quad (41)$$

As componentes do campo magnético podem ser calculadas diretamente em coordenadas esféricas

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}; \quad \vec{A} = A(R, \theta) \hat{e}_\varphi \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} B_R &= \frac{1}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A \text{sen}\theta) \\ B_\varphi &= -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (rA) \end{aligned} \quad (42)$$

Fazendo as derivadas, obtemos

$$\boxed{B_r = \frac{\mu_0 I a^2 \cos\theta}{2 R^3}; \quad B_\theta = \frac{\mu_0 I a^2 \text{sen}\theta}{4 R^3}} \quad (43)$$

Lembrando que, para um dipolo elétrico, as componentes do campo são dadas por

$$E_R = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 R^3}; \quad E_\theta = \frac{p \text{sen}\theta}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (44)$$

$|p| = qd$ .

Vemos que o campo de uma espira de corrente é exatamente o campo de um dipolo magnético, que pode ser escrito como

$$\vec{B}_{d.mag}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} [2\cos\theta \hat{e}_r + \text{sen}\theta \hat{e}_\theta] \quad (45)$$

onde

$$m \equiv \pi a^2 I \quad (46)$$

é denominado o Momento de Dipolo Magnético

Este resultado pode ser derivado de uma forma mais geral, como mostrado na Seção 5.4.3 do livro texto. No entanto, não cobramos o conhecimento desta formulação geral.

