Eletromagnetismo I

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2º Semestre 2014

Preparo: Diego Oliveira

Aula 13

Exemplos de Cálculo do Campo Magnético através do Potencial Vetor

Na aula passada vimos que as equações de Maxwell para o campo magnético, no caso de correntes estacionárias,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \tag{1}$$

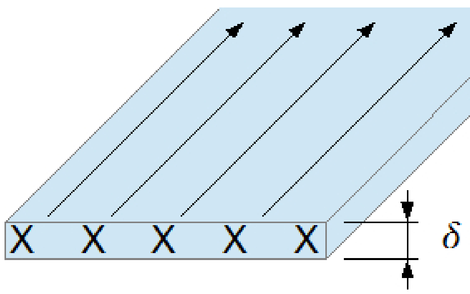
são resolvidas definindo $\vec{B}$ em termos do potencial vetor,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}; \qquad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d\tau' \tag{2}$$

Nesta aula vamos ver alguns exemplos ilustrativos de como utilizar essas equações para obter $\vec{B}(\vec{r})$.

Primeiramente, vamos deixar claro que a , densidade de corrente é um vetor, representa fluxo de cargas. Isto é, se por exemplo houver cargas q se movendo com velocidade $\vec{v}$ e com uma densidade volumétrica ρ, a densidade de corrente equivalente é dada por

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \tag{3}$$



Este vetor tem dimensão de corrente por unidade de área $[c/(sm^2)]$. Se a corrente estiver toda concentrada em uma fatia condutora de pequena espessura δ, a densidade superficial de corrente será

$$\vec{K} = \delta\vec{j} = \frac{\rho}{\delta}\vec{v} = \sigma\vec{v} \tag{4}$$

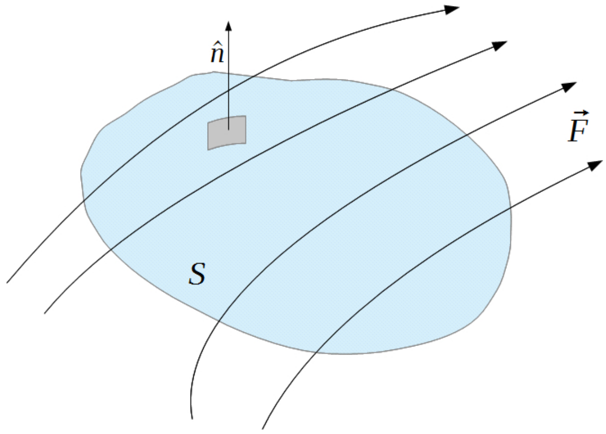
onde σ é a densidade superficial de corrente. No entanto, para não se confundir na resolução de problemas, note que $\vec{K}$ é a densidade de corrente por unidade de comprimento na direção perpendicular ao sentido de fluxo de cargas.

Recomendo àqueles que não se recordam mais desses conceitos lerem com cuidado a seção 5.1.3 do livro texto.

A corrente elétrica, por outro lado, é o fluxo da densidade de corrente através de uma determinada área.

$$I = \int_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS \tag{5}$$

Portanto a corrente é um escalar e não um vetor!



Se a corrente estiver totalmente fluindo em um superfície de pequena espessura, simplesmente fazemos

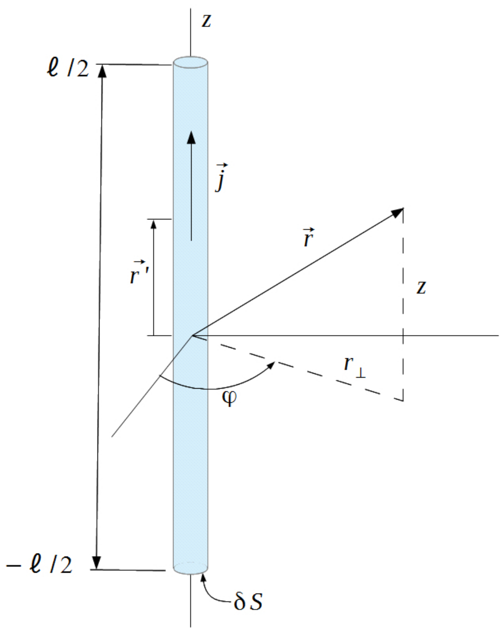
$$\vec{j}(\vec{r}')d\tau' = \vec{K}(\vec{r}')dS' \qquad \Rightarrow \qquad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dS' \tag{6}$$

Exemplo 1:

Campo de um segmento retilíneo de fio. Consideraremos o segmento de corrente mostrado na figura. Queremos determinar o campo em um ponto $\vec{r}$ qualquer do espaço.

O potencial vetor é dado por

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\tau'$$



Naturalmente nesta caso é conveniente utilizar um sistema de coordenadas com o eixo z ao longo do fio. Então

$$\vec{r}\,' = z'\hat{e}_z$$

e

$$\vec{r} = r_\perp cos\varphi\hat{e}_x + r_\perp sen\varphi\hat{e}_y + z\hat{e}_z$$

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = \left[r_\perp^2 cos^2\varphi + r_\perp^2 sen^2\varphi + (z-z')^2\right]^{1/2} = \left[r_\perp^2 + (z-z')^2\right]^{1/2}$$

Por outro lado, como estamos supondo que a área da seção transversal δS do fio é muito pequena, podemos considerar

$$\vec{j}(\vec{r})d\tau' = \vec{j}\delta S dz' = (j\delta S)\hat{e}_z dz' = I\hat{e}_z dz' \tag{7}$$

onde I é a corrente que flui no seguimento de fio. Portanto

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I\hat{e}_z \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{dz'}{\left[r_\perp^2 + (z-z')^2\right]^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\hat{e}_z \int_{z-\ell/2}^{z+\ell/2} \frac{dt}{\left[r_\perp^2 + t^2\right]^{1/2}}, \tag{8}$$

onde definimos $t = z - z'$. Esta integral é tabela, de forma que obtemos

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{e}_z \left[ln\left(t + \sqrt{r_\perp^2 + t^2}\right)\right]_{z-\ell/2}^{z+\ell/2} \tag{9}$$

ou

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\hat{e}_z ln\left[\frac{z + \ell/2 + \sqrt{r_\perp^2 + (z+\ell/2)^2}}{z - \ell/2 + \sqrt{r_\perp^2 + (z-\ell/2)^2}}\right]\hat{e}_z} \tag{10}$$

Deste resultado podemos calcular o campo magnético, lembrando que $\vec{A}$ está expresso em coordenadas cilíndricas, ou seja, $r_\perp$ é o raio perpendicular ao eixo z. Nessas coordenadas

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \left(\hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r_\perp} + \frac{\hat{e}_\varphi}{r_\perp}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \vec{A} \tag{11}$$

Como $\vec{A} = A(r_\perp, z)\hat{e}_z$ e $\hat{e}_z$ é um versor constante

$$\vec{B} = \frac{\partial A}{\partial r_\perp}\hat{e}_r \times \hat{e}_z = -\frac{\partial A}{\partial r_\perp}\hat{e}_\varphi \tag{12}$$

Para fazer a derivada de $A_\perp$ economizando álgebra, vamos derivar antes de impor os limites

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\hat{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial r_\perp}\left[ln\left(t+\sqrt{r_\perp^2+t^2}\right)\right]_{z-\ell/2}^{z+\ell/2} \tag{13}$$

$$\therefore \vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{r_\perp}{\sqrt{r_\perp^2+t^2}}\ \frac{1}{t+\sqrt{r_\perp^2+t^2}}\right]_{z-\ell/2}^{z+\ell/2} \tag{14}$$

Agora é útil fazer uma pequena transformação algébrica

$$\begin{aligned}\frac{r_\perp}{\sqrt{r_\perp^2+t^2}}\frac{1}{t+\sqrt{r_\perp^2+t^2}} &= \frac{r_\perp}{\sqrt{r_\perp^2+t^2}}\frac{1}{t+\sqrt{r_\perp^2+t^2}}\times\frac{\sqrt{r_\perp^2+t^2}-t}{\sqrt{r_\perp^2+t^2}-t} \\ &= \frac{r_\perp}{\sqrt{r_\perp^2+t^2}}\times\frac{\sqrt{r_\perp^2+t^2}-t}{r_\perp^2+t^2-t^2} = \frac{1}{r_\perp}\left[1-\frac{1}{\sqrt{r_\perp^2+t^2}}\right]\end{aligned} \tag{15}$$

Portanto

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r_\perp}\left[1-\frac{z+\ell/2}{\sqrt{r_\perp^2+(z+\ell/2)^2}}-\left(1-\frac{z-\ell/2}{\sqrt{r_\perp^2+(z-\ell/2)^2}}\right)\right]\hat{e}_z$$

$$\boxed{\therefore \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_\perp}\left[\frac{z+\ell/2}{\sqrt{r_\perp^2+(z+\ell/2)^2}}-\frac{z-\ell/2}{\sqrt{r_\perp^2+(z-\ell/2)^2}}\right]\hat{e}_z} \tag{16}$$

É interessante notar que, no limite $\ell \to \infty$, se obtém o campo produzido por um fio retilíneo infinito, derivado a partir da Lei de Amperè em Físca III.

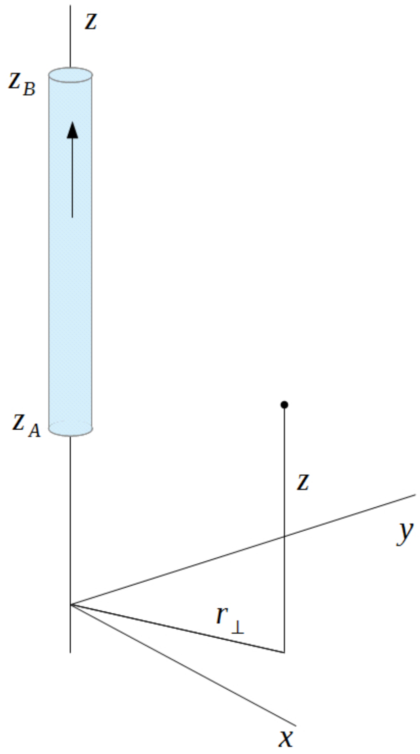
$$\ell \to \infty \qquad \Rightarrow \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_\perp}\lim_{\ell\to\infty}\left[\frac{\ell/2}{\ell/2}-\frac{\ell/2}{\ell/2}\right]\hat{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_\perp}\hat{e}_\varphi \tag{17}$$

Exercício 1: Refaça este problema supondo que o fio se estenda desde $z = z_A$ até $z = z_B$ e obtenha a expressão

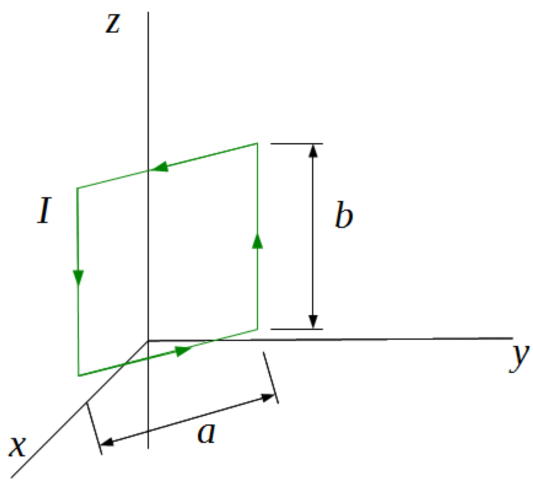
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_\perp}\left[\frac{z - z_A}{R_A} - \frac{z - z_B}{R_B}\right]\hat{e}_\varphi \tag{18}$$

com

$$R_A = \sqrt{r_\perp^2 + (z - z_A)^2};$$
$$R_B = \sqrt{r_\perp^2 + (z - z_B)^2} \tag{19}$$



Exercício 2: Utilize este resultado para obter o campo produzido por uma espira retangular, de lados a e b e localizada no plano xz, em qualquer ponto do espaço. Nota: Observe que quando levar em conta os lados paralelos a x, é necessário substituir z por x na expressão acima. Também, para cada lado, decomponha o versor $\hat{e}_\varphi$ em suas componentes x, y e z.



[Neste problema a expressão final para $\vec{B}$ é complexa, mas a álgebra é simples]

Expressão Geral para o Campo Magnético

Como

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \qquad \text{e} \qquad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d\tau', \tag{20}$$

temos

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\nabla \times \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right] d\tau' \tag{21}$$

Usando a relação vetorial $\nabla \times (f\vec{v}) = f\nabla \times \vec{v} - \vec{v} \times \nabla f$ e notando que $\vec{j}$ depende de $\vec{r}\,'$ e não de $\vec{r}$, temos $\nabla \times \vec{j}(\vec{r}\,') = 0$ e

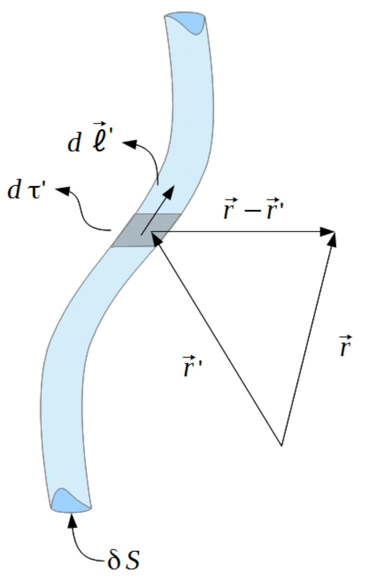
$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\vec{j}(\vec{r}\,') \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right] d\tau' \tag{22}$$

Mas

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \tag{23}$$

e, portanto

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} d\tau'} \tag{24}$$



Esta é na verdade a "Lei" de Biot-Savart. Para ver isto, vamos considerar a forma como ela é geralmente apresentada. Consideraremos um seguimento $d\vec{\ell}$ de um fio de área da seção transversal pequena, δS. Temos então

$$\frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} d\tau' = \frac{[j(\vec{r}\,')\delta S] d\vec{\ell}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} d\tau' \tag{25}$$

onde consideraremos que $\vec{j}$ está na direção de $d\vec{\ell}$, de forma qe

$$\vec{j}(\vec{r}\,') d\tau' = \vec{j} \delta S d\ell' = (j\delta S) d\vec{\ell}\,' \tag{26}$$

Mas $j\delta S = I$, a corrente que flui no fio; então

$$\frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} d\tau' = I \frac{d\vec{\ell}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \tag{27}$$

de modo que o campo magnético, para um fio de seção transversal pequena, pode ser escrito como

$$\vec{B} = \int d\vec{B}; \qquad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \tag{28}$$

que é a "Lei" de Biot-Savart, como é usualmente apresentada.

Lei de Amperè

A lei de Ampère também pode ser obtida das equações básicas que vimos; partido de

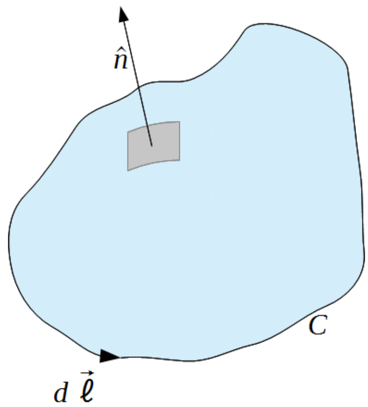
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{29}$$

e integrando ao longo de um contorno fechado, temos

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{\ell} \tag{30}$$

Mas, pelo Teorema de Stokes,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dS, \tag{31}$$



temos

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_S [\nabla \times (\nabla \times \vec{A}] \cdot \hat{n} dS, = \mu_0 \int \vec{j} \cdot \hat{n} dS = \mu_o I, \tag{32}$$

onde I é a corrente que atravessa o circuito; portanto

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \tag{33}$$