Eletromagnetismo I

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2º Semestre 2014

Preparo: Diego Oliveira

Aula 12

Campo Magnético Produzido por Correntes Estacionárias (Griffiths Cap. 5)

Como visto no curso de Física Básica, o campo magnético descreve a interação entre cargas em movimento, ou seja, entre correntes elétricas. Existem duas formas de introduzir o campo magnético $\vec{B}$ na Teoria Eletrogmanética;

A maneira clássica é simplesmente definir o campo magnético através da Lei de Amperè (ou pela expressão de Biot-Savart) e especificar sua ação sobre as cargas em movimento através da Força de Lorentz

$$\vec{F} = 1(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{1}$$

A segunda maneira é utilizar a Lei de Coulomb como uma lei fundamental num referencial onde a carga esteja em repouso. Para determinar a força atuante entre as cargas com movimento relativo entre si, usamos a Teoria da Relatividade Restrita. Um livro tradicional que adota esse formalismo é Purcell, Eletricidade e Magnetismo, Edgard Blücher. Naturalmente essa segunda forma parece ser mais atraente do ponto de vista formal, mas também implica em considerar como fundamentais a Lei de Couloumb e os postulados da Relatividade Restrita. De qualquer forma, ambos os procedimentos levam à determinação do campo magnético $\vec{B}$. Acrescentando a Lei de Faraday e a corrente de deslocamento de Maxwell, obtemos as equações de Maxwell para o campo $\vec{B}$ no vácuo,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0; \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{2}$$

Neste capítulo vamos considerar apenas campos estacionários, ou seja, $\partial/\partial t = 0$, de forma que as equações para $\vec{B}$ ficam

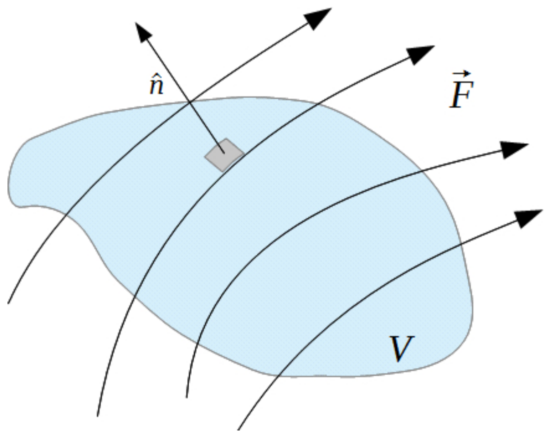
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0; \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \tag{3}$$

A partir deste ponto, vamos seguir uma metodologia didática bastante distinta do livro texto. Ele adota o mesmo método de discussão do campo magnético utilizado nos livros de Física Básica. Nós vamos considerar que as noções básicas sobre campo magnético já estão consolidadas e seguiremos um caminho inverso, ou seja, partindo das Equações de Maxwell para $\vec{B}$, no caso estático, vamos ver como solucioná-las e, a partir da solução, obteremos as leis básicas da magnetostática, incluindo a fórmula de Biot-Savart. Apesar desse procedimento distinto, todas as equações que vamos obter estão no livro texto, Cap. 5, e os mesmo exemplos e problemas serão utilizados para consolidar os conceitos. A vantagem do método que vamos seguir é a introdução de métodos matemáticos que serão úteis mais tarde, começando por

As Duas Identidades de Green

Vamos começar pelo Teorema de Gauss para uma função vetorial $\vec{F}$, visto em cálculo Veotiral

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{F}) d\tau = \oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS \tag{4}$$



Agora façamos uma escolha particular para $\vec{F}$ bastante interessantes: seja $\psi(\vec{r})$ e $\phi(\vec{r})$ duas funções escalares com primeira e segunda derivadas contínuas; escolhemos

$$\vec{F} = \psi \nabla \phi \tag{5}$$

Então, utilizando o Teorema de Gaus, temos

$$\int_V \nabla \cdot (\psi \nabla \phi) d\tau = \oint_S (\psi \nabla \phi).\hat{n} dS \tag{6}$$

mas

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \phi) = \nabla \psi \cdot \nabla \phi + \psi \nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla \psi \cdot \nabla \phi + \psi \nabla^2 \phi \tag{7}$$

Por outro lado, $\nabla\phi\cdot\hat{n} = \partial\phi/\partial n$, derivada direcional de ϕ na direção normal à suérfície; portanto

$$\boxed{\int_V (\nabla\psi\cdot\nabla\phi)d\tau + \int_V \psi\nabla^2\phi d\tau = \oint_S \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}dS; \qquad \frac{\partial\phi}{\partial n} = \hat{n}\cdot\nabla\phi} \tag{8}$$

Esta é a <u>Primeira Identidade de Green</u>.

<u>Exemplo</u>:
Tomando $\psi = \phi$; $\nabla^2\phi = 0$ e $\vec{E} = -\nabla\phi$, temos

$$\int (\nabla\phi)^2 d\tau = \oint_S \phi(\nabla\phi\cdot\hat{n})dS \quad \Rightarrow \quad \int E^2 d\tau = -\oint_S \phi\vec{E}\hat{n}dS \tag{9}$$

Uma equação que relaciona a energia eletrostática total dentro do volume com o fluxo do vertor $\phi\vec{E}$ através de sua superfície.

Agora vamos trocar os papéis de ψ e ϕ, escolhendo $\vec{F} = \phi\nabla\psi$. Naturalmente obtemos a mesma identidade de Green, mas com ψ e ϕ trocados,

$$\int_V (\nabla\phi\cdot\nabla\psi)d\tau + \int \phi\nabla^2\psi d\tau = \oint_S \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS \tag{10}$$

Subtraindo uma expressão da outra, obtemos a <u>Segunda Identidade de Green</u>

$$\boxed{\int_V \left[\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi\right] d\tau = \oint_S \left(\psi\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) dS} \tag{11}$$

"Solução" das Equações $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ e $\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}$

Estas duas equações representam um sistema de equações diferenciais para as três componentes de $\vec{B}$, que vêm do rotacional, com uma condição de vínculo, representada pela divergência de $\vec{B}$.

Do ponto de vista matemático, uma equação diferencial é considerada solucionada se for encontrada uma representação integral para a solução. Vamos então tentar encontrar uma integral que permita determinar $\vec{B}$, conhecida a densidade de $\vec{j}$.

Em primeiro lugar, como já vimos no início do curso, a equação $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ é solucionada escrevendo $\vec{B}$ em termos do potencial vetor $\vec{A}$,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{12}$$

Substituindo na Equação de Maxwell $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, temos

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \tag{13}$$

Como somente $\nabla \times \vec{A}$ está definido, podemos completar a especificação de $\vec{A}$ escolhendo

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \tag{14}$$

Esta escolha é denominada <u>Calibre de Coulomb</u>, e será posteriormente discutida, dentro de um panorama mais geral, quando incluirmos a variação temporal nos campos. Então a equação para $\vec{A}$ fica

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \tag{15}$$

ou, em coordenadas cartesianas, $\nabla^2 A_i = -\mu_0 j_i$; $i =, x, y, z$.

Portanto, introduzindo o potencial vetor $\vec{A}$, temos que resolver uma equação de Poisson para cada componente cartesiana de $\vec{A}$, o que é muito mais simples que o complicado sistema de equações que corresponde a $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, que mistura diferentes componentes de $\vec{B}$.

Por analogia com a equação de Poisson da eletrostática,

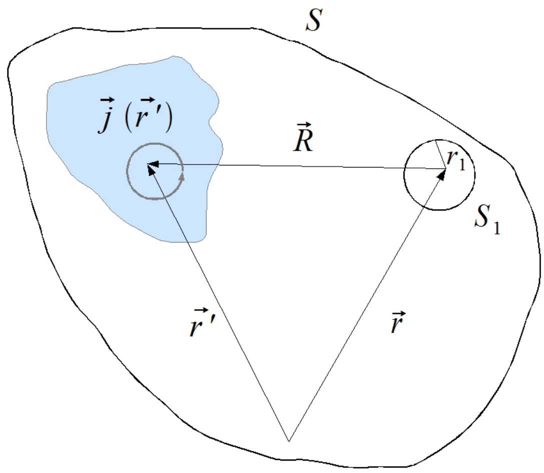
$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d\tau' \tag{16}$$

esperamos que

$$\nabla^2 A_i = -\mu_0 j_i \quad \Rightarrow \quad A_i(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d\tau' \tag{17}$$

Vamos, no entanto, obter formalmente esta solução utilizando as identidades de Green.

Suponhamos que a densidade de corrente $\vec{j}$ esteja localizada num volume finito, cujos pontos são representados pelo raio vetor $\vec{r}'$. Queremos determinar o potencial $\vec{A}$ no ponto de observação $\vec{r}$. Consideremos duas superfícies, S e S_1, sendo S_1 uma esfera de raio r_1 centrada no ponto de observação $\vec{r}$.



Portanto, a região em que vamos aplicar a segunda identidade de Green está limitada por duas superfícies, S e S_1. Desta forma, a região dentro de S_1 está fora da região de aplicação.

Apliquemos agora a Segunda Identidade de Green, com a escolha

$$\phi = A_i \qquad\qquad \nabla^2\psi = 0 \tag{18}$$

ou seja, ψ é qualquer solução da Equação de Laplace; então

$$\int \psi\nabla^2 A_i d\tau = \int_{S+S_1}\left(\psi\frac{\partial\psi}{\partial n} - A_i\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS \tag{19}$$

A Equação de Laplace pode ser escrita em coordenadas esféricas centradas no ponto de observação, em termos de variável $\vec{R}$; depois converteremos novamente para as coordenadas $\vec{r}$ e $\vec{r}'$, tal que $\vec{R} = \vec{r}' - \vec{r}$.

Em termos da variável $\vec{R}$, o problema tem simetria esférica, de forma que

$$\nabla^2\psi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\phi}{\partial n}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \psi(\vec{R}) = \frac{1}{R} \tag{20}$$

Esta solução diverge em $R = 0(\vec{r} - \vec{r}')$; mas este ponto está fora do volume considerado. Substituindo esta solução da Equação de Laplace na Segunda Identidade de Green, temos

$$\int_V \frac{1}{R}\nabla^2 A_i d\tau = \int_{S+S_1}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial A_i}{\partial n} - A_i\hat{n}\cdot\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\right]dS \tag{21}$$

Na superfície S_1, a normal deve ser para fora do volume V, ou seja, para o centro,

$$\frac{\partial A_i}{\partial n} = -\left.\frac{\partial A_i}{\partial R}\right|_{R=r_1} \quad ; \quad [\hat{n} \cdot \nabla\psi]_{R=r_1} = \left[-\frac{\partial}{\partial R}\frac{1}{R}\right]_{r_1} = \frac{1}{r_1^2} \tag{22}$$

Então

$$\begin{aligned} \oint_{S_1} \left(\frac{1}{R}\frac{\partial A_i}{\partial n} - A_i \hat{n} \cdot \nabla\left(\frac{1}{R}\right)\right) dS &= -\frac{1}{r_1}\int_{S_1} \frac{\partial A_i}{\partial R} dS - \frac{1}{r_1^2}\int A_i dS \\ &= -\frac{1}{r_1} 4\pi r_1^2 \left(\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial R}\right) - \frac{1}{r_1^2} 4\pi r_1^2 \bar{A}_i \end{aligned} \tag{23}$$

onde a barra indica o valor médio dentro da esfera de raio r_1. Tomando o limite $r_1 \to 0$, temos

$$\bar{A}_i = A_i(R=0) = A_i(\vec{r}). \tag{24}$$

Por outro lado

$$\lim_{r_1 \to 0} 4\pi r_1 \left(\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial R}\right) = 0. \tag{25}$$

Utilizando a equação $\nabla A_i = -\mu_0 j_i$, obtemos então

$$-\mu_0 \int \frac{j_i}{R} d\tau = \int_S \left[\frac{1}{R}\frac{\partial A_i}{\partial n} - A_i \hat{n} \cdot \nabla\left(\frac{1}{R}\right)\right] dS - 4\pi A_i(\vec{r}) \tag{26}$$

Agora tomemos para S uma superfície esférica cujo raio tende para infinito. Quantpo $R \to \infty$, as fontes de corrente se comportam, em mais baixa ordem, como uma espira de corrente, cujo campo se comporta como $B \sim 1/R^3$, $A \sim 1/R^2$. Portanto a integral de superfície se anula no limite $R \to \infty$ e obtemos

$$A_i(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{j_i}{R} d\tau \tag{27}$$

ou, voltando a $\vec{R} = \vec{r}\,' - \vec{r}$, temos

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d\tau' \tag{28}$$

que é a Eq. (5.63) do livro texto.

Embora este resultado tenha sido derivado em coordenadas cartesiana, uma vez escrito na forma vetorial , é válido em qualquer sistema.