1ª prova de Tópicos avançados de tratamento estatístico de dados em Física Experimental. 11/10/2011. Duração: 100 minutos.

1) (2,5 pontos) Um experimentador mediu dois resistores com o mesmo instrumento e obteve os valores R_1= 100(7) Ω e R_2 = 200(24) Ω, com cov(R_1, R_2) = 32 Ω². Determine os valores e respectivos desvios-padrão das grandezas:

a) $P = R_1 \cdot R_2$
b) $Q = R_1 / R_2$

2) (3 pontos) Uma experimentadora mediu 3 pontos de um plano $z(x,y)$ que passa pela origem do sistema de coordenadas, $z = ax + by$. Os dados estão na tabela ao lado, todos na mesma unidade física e com desvio-padrão em z igual a 0,20, em todos os pontos. Determine:

z	x	y
1,10	0	1
2,10	1	0
2,90	1	1

a) as estimativas $\hat{a}$ e $\hat{b}$ dos parâmetros a e b, pelo método dos mínimos quadrados, e sua respectiva matriz de covariância.
b) o valor de χ^2 e, com ele, avalie se você rejeita ou não os resultados obtidos.

3) (2,5 pontos) Duas fontes foram feitas a partir de uma solução-mestre radioativa, cada uma com uma gota da solução. Uma foi encaminhada à experimentadora A, que determinou uma atividade igual a

$$A = 120(3) \text{ Bq}$$

e a outra, encaminhada ao experimentador B, que obteve

$$B = 135(4) \text{ Bq}.$$

Na *hipótese* das funções densidade de probabilidade de ambos os resultados serem normais com mesmo valor esperado e os desvios-padrão relatados serem os valores verdadeiros, determine:

a) a f.d.p. da diferença $d = B - A$ (forneça a média, o desvio-padrão e escreva se a f.d.p. é normal ou não).
b) se a hipótese das atividades medidas por A e B serem iguais (H: $d_0 = 0$) deve ser rejeitada ou não com um nível de confiança de aproximadamente 5%. Detalhe o procedimento realizado para chegar à sua conclusão.

4) (2 pontos) (Condições fictícias e simplificadas, para facilitar as contas). Uma maternidade tem capacidade para atender 365 gestantes por ano e, para isso, precisa de uma sala para acomodar cada um dos recém-nascidos exatamente por um dia. Considere que o número de gestantes que procura a maternidade em cada dia varia de acordo com a f.p. de Poisson de média a = 1,000 (e^{-a} = 0,368).

a) Explique por que o número de partos por dia pode seguir uma f.p. de Poisson na situação acima – suponha que essa maternidade atenda à demanda local, que é de cerca de 365 nascimentos por ano.
b) Em que fração dos dias a maternidade ficará, provavelmente, com todos os leitos vazios? e com um único leito ocupado?
c) Quantos leitos essa sala deve ter para que a probabilidade de faltar leito para ao menos um recém-nascido seja menor ou da ordem de 1/365=0,0027?

Formulário

Método dos mínimos quadrados

As estimativas dos parâmetros de uma função

$$z = af(\vec{x}) + bg(\vec{x})$$

são obtidas, pelo método dos mínimos quadrados, da solução do sistema linear

$$\vec{D} = \mathbf{M}\hat{A}$$

em que essas matrizes são definidas por

$$\begin{pmatrix} \sum \frac{z_i f(\vec{x}_i)}{\sigma_i{}^2} \\ \sum \frac{z_i g(\vec{x}_i)}{\sigma_i{}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \frac{\left(f(\vec{x}_i)\right)^2}{\sigma_i{}^2} & \sum \frac{f(x_i)g(\vec{x}_i)}{\sigma_i{}^2} \\ \sum \frac{f(\vec{x}_i)g(\vec{x}_i)}{\sigma_i{}^2} & \sum \frac{\left(g(\vec{x}_i)\right)^2}{\sigma_i{}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}$$

Valores críticos de χ^2 em função da probabilidade de χ^2 ser excedido, P, para alguns números de graus de liberdade (*ngl*).

ngl \ *P*	95%	50%	5%	1%
1	0,004	0,455	3,84	6,63
2	0,103	1,39	5,99	9,21
3	0,352	2,37	7,81	11,3

Função de probabilidade de Poisson

$$P_a(n) = \frac{a^n e^{-a}}{n!}$$

$\mathcal{P}_a(n \geq n') = 1 - \mathcal{P}_a(n < n')$ onde $\mathcal{P}_a$ é a distribuição cumulativa

Propagação de incerteza

$$var\big(f(\vec{x})\big) \cong \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\vec{x}=\vec{\bar{x}}} \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{\vec{x}=\vec{\bar{x}}} \operatorname{cov}(x_i, x_j)$$

Quando f é o produto ou quociente dos x_i, é muito vantajoso, em termos de cálculo dos valores numéricos, trabalhar com as variâncias e covariâncias relativas.

Integral da função densidade de probabilidade normal.

y	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$\int_0^y N(y'; 0,1)dy'$	0	0,19	0,34	0,43	0,48	0,49	0,50