MAP2310 - Métodos Numéricos em Equações Diferenciais I

1º Semestre de 2012 - Prof. Nelson Kuhl

Prova 2 - 15/05/2012

Questão 1 Considere um método Runge-Kutta de 3 estágios para a equação diferencial ordinária $\dot{x} = f(t, x)$: $k_1 = f(t_j, \eta_j)$, $k_2 = f(t_j + ha_2, \eta_j + ha_2 k_1)$, $k_3 = f(t_j + ha_3, \eta_j + hb_{31}k_1 + hb_{32}k_2)$, $\eta_{j+1} = \eta_j + h(c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3)$. Deseja-se usar este método para aproximar soluções de $\dot{x} = x$.

a) (1,0 ponto) Mostre que as aproximações são da forma $\eta_{j+1} = F(h)\eta_j$, onde F é um polinômio de grau menor ou igual a 3.

b) (1,5 pontos) Mostre que $F(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6}$ se o método tiver ordem 3.

Questão 2 (3,0 pontos) Determine a solução geral do sistema $\dot{X} = AX$ onde a matriz A é dada por

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Questão 3 (2,0 pontos) Esboce os retratos de fase dos sistemas da Questão 2.

Questão 4 Um sistema $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$ é chamado Hamiltoniano se existir uma função $H(x, y)$ tal que $f = H_y$ e $g = -H_x$. A função H é chamada de *Hamiltoniana.*

a) (1,0 ponto) Prove que sobre qualquer órbita $(x(t), y(t))$ de um sistema Hamiltoniano, $H(x(t), y(t))$ é constante.

b) (1,5 pontos) Sabe-se que

$$\dot{x} = -\sin^2(x)\sin(y), \quad \dot{y} = -2\sin(x)\cos(x)\cos(y)$$

é Hamiltoniano. Construa a Hamiltoniana.