UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE DE RIBEIRÃO PRETO
DEPARTAMENTO DE ADMINISTRAÇÃO

RAD1507 – Estatística Aplicada à Administração I
Prof. Dr. Evandro Marcos Saidel Ribeiro

RESUMO

REVISÃO DE INTRODUÇÃO À ESTATÍSTICA

Medidas de centro

Média (média aritmética)

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Mediana (primeiramente: ordenar os dados)
A mediana é o valor que divide o conjunto de dados ao meio, ou seja, o valor que separa 50% dos valores inferiores dos 50% dos valores superiores, em outras palavras é o percentil 50.

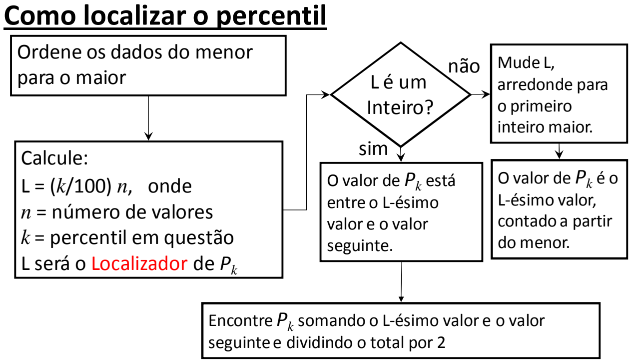
$$\tilde{x} = P_{50}$$

Moda
A moda é o valor mais frequente no conjunto de dados. Mais utilizados para variáveis discretas.

Ponto Médio
O ponto médio é a média entre o valor máximo e mínimo:

$$PtoMed = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}$$

Como localizar o percentil



Medidas de dispersão

Desvio Padrão Amostral

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Variância s^2

Distribuição Binomial

A probabilidade de se obter exatamente x sucessos em n tentativas, sendo a p a probabilidade de sucesso em uma tentativa, é dada por

$$P(x) = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} p^x q^{n-x}$$

e $q = 1 - p$

Distribuição Normal

Densidade de probabilidade

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

No Excel a densidade é obtida por:
DIST.NORM(x; μ;σ)
ou DIST.NORMP(z)
No Excel a área acumulada até um valor de z é:
INV.NORM(x; μ;σ)
ou INV.NORMP(z)

Score-z ou padronização dos dados

Encontre a média e o desvio padrão. Em seguida utilize a expressão:

$$z = \frac{(x - \bar{x})}{s}$$

Intervalo de confiança (estimativa intervalar)

Estimativa para proporção

$\hat{p} - E < p < \hat{p} + E$ sendo $\hat{p}$ a proporção de sucessos observada na amostra: $\hat{p} = x/n$, onde x é o número de sucessos observados.

O erro é dado por: $E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$.

Se for necessário estimar o tamanho da amostra para um erro máximo, considere:

$$n = \frac{N\hat{p}\hat{q}(z_{\alpha/2})^2}{\hat{p}\hat{q}(z_{\alpha/2})^2 + (N-1)E_{\max}^2}$$

Observe que se a população puder ser considerada infinita as expressões acima não dependem de N.

Estimativa para média (σ conhecido)

$\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E$ sendo $\bar{x}$ a média amostral.

O erro é dado por: $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$.

Se for necessário estimar o tamanho da amostra para um erro máximo, considere:

$$n = \frac{N\sigma^2\left(z_{\alpha/2}\right)^2}{\sigma^2\left(z_{\alpha/2}\right)^2 + (N-1)E_{\max}^2}$$

Estimativa para média (σ não-conhecido)

$\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E$ sendo $\bar{x}$ a média amostral.

O erro é dado por: $E = t_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}}$. Observe que o desvio padrão é o amostral e utiliza-se a distribuição t de Student para obter o valor crítico $t_{\alpha/2}$.

Estimativa para desvio padrão ou variância

O intervalo é obtido com base na distribuição qui-quadrado (χ^2). A distribuição qui-quadrado não é simétrica e os valores críticos são sempre positivos. Para fazer o intervalo de confiança utiliza-se χ_E^2 (valor crítico da esquerda) e χ_D^2 (valor crítico da direita). as estimativas intervalares são:

Para o desvio padrão,

$$\sqrt{\frac{(n-1)\,s^2}{\chi_D^2}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)\,s^2}{\chi_E^2}}.$$

Para a variância,

$$\frac{(n-1)\,s^2}{\chi_D^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\,s^2}{\chi_E^2}.$$

ESTATÍSTICA APLICADA À ADM. I

TESTE DE HIPÓTESE: Introdução

Ter em mente a **"Regra do evento raro":**
Se, sob uma dada suposição, a probabilidade de um evento observado particular é excepcional-mente pequena, concluímos que a suposição provavelmente não é correta.

Procedimento para Teste de Hipótese:

1 – Escreva a afirmativa original na forma simbólica.

2 – Escreva o oposto da afirmativa original na forma simbólica.

3 – Expresse H_0 e H_1. (H_0 é sempre a igualdade)

4 – Selecione o nível de significância α.

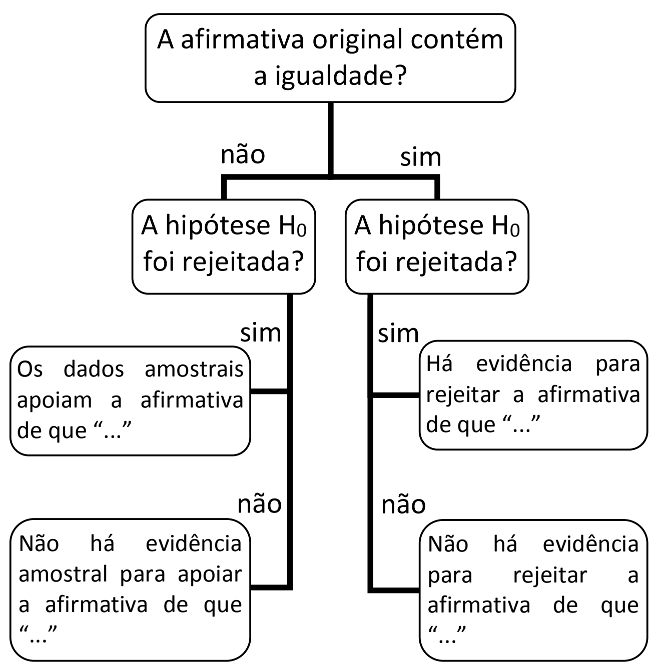
5 – Verifique a distribuição a ser utilizada.

6 – Calcule a estatística teste.

7 – A partir da estatística teste verifique se H_0 é rejeitada ou não, para tanto e utilize um método:
Método tradicional: Compare a estatística teste com o valor crítico, se a estatística teste está na região crítica, Rejeite H_0.
Método valor-P: a partir da estatística teste determine o valor-P. Se valor-P < α, Rejeite H_0.

8 – Estabeleça a conclusão (fraseado final abaixo).

Fraseado Final para o Teste de Hipótese:



1 TESTE DE HIPÓTESE - uma amostra

Inferência sobre uma proporção: $H_0: p = p_1$

Estatística teste: $z_{teste} = \dfrac{\hat{p} - p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$,

sendo $q = 1 - p$.

Inferência sobre uma média: Desvio padrão Conhecido $H_0: \mu = \mu_1$

Estatística teste: $z_{teste} = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\left(\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$

Inferência sobre uma média: Desvio padrão Desconhecido $H_0: \mu = \mu_1$

Estatística teste: $t_{teste} = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\left(\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right)}$,

grau de liberdade: $gl = (n-1)$

Inferência sobre um desvio padrão ou uma variância: $H_0: \sigma = \sigma_1$ **ou** $H_0: \sigma^2 = \sigma_1^2$

Estatística teste: $\chi^2_{teste} = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$,

grau de liberdade: $gl = (n-1)$

2 TESTE DE HIPÓTESE - duas amostras

Inferências sobre duas proporções:

$H_0: p_1 = p_2$

Estatística teste: $z_{teste} = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\dfrac{\bar{p}\,\bar{q}}{n_1} + \dfrac{\bar{p}\,\bar{q}}{n_2}}}$,

sendo $\hat{p}_i = \dfrac{x_i}{n_i}$, $\bar{p} = \dfrac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$ e $\bar{q} = 1 - \bar{p}$

Inferências sobre duas médias: Amostras Independentes $H_0: \mu_1 = \mu_2$

Estatística teste: $t_{teste} = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$,

grau de liberdade:

$gl =$ escolha o menor entre $(n_1 - 1)$ e $(n_2 - 1)$

Inferências sobre duas médias: Amostras Emparelhadas $H_0: \mu_d = 0$

Estatística teste: $t_{teste} = \dfrac{\bar{d}}{\left(\dfrac{s_d}{\sqrt{n}}\right)}$,

sendo $\bar{d}$ a média de todas as diferenças amostrais $d_i = x_{i1} - x_{i2}$; e s_d é o desvio padrão das diferenças amostrais, ou seja para amostras 1 e 2:

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i \quad \text{e} \quad s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2}{n-1}}$$

grau de liberdade: $gl = (n-1)$

Comparação da variação em duas amostras: Teste F para comparação de variância

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Estatística teste: $F_{teste} = \dfrac{s_1^2}{s_2^2}$,

sendo s_1^2 a maior das duas variâncias amostrais.

- grau de liberdade do numerador:

$gl_1 = n_1 - 1$

- grau de liberdade do denominador:

$gl_2 = n_2 - 1$

3 ANOVA (ANalysis Of VAriance) - Inferência a partir de mais de duas amostras

Hipóteses: $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

H_1 : pelo menos uma das médias é diferente das outras

- **ANOVA de um fator** -

  - **Cálculos com tamanhos iguais** -

    Variância entre amostras = $n\, s_{\bar{x}}^2$, sendo $s_{\bar{x}}^2$ a variância das médias amostrais.

    Variância dentro das amostras = s_p^2, sendo s_p^2 a média das variâncias amostrais.

    Estatística Teste: $F_{teste} = \dfrac{n\, s_{\bar{x}}^2}{s_p^2}$

    - grau de lib. do numerador: $gl_{Num} = k - 1$
    - grau de lib. do denominador: $gl_{Den} = k\,(n-1)$

	A	B	C	D	E	F
1						
2		**Tam 1**	**Tam 2**	**Tam 3**		
3		79945,00	65040,00	53685,00		
4		51490,00	67750,00	60975,00		
5		89430,00	69105,00	90785,00		
6		65040,00	81300,00	82655,00		
7	n_i	4	4	4	=CONT.VALORES(D3:D6)	
8	$\bar{x}_i$	71476,25	70798,75	72025,00	=MÉDIA(D3:D6)	
9	s_i^2	278310790	51867706,25	307797533,3	=VAR(D3:D6)	
10						
11	$s_{\bar{x}}^2$	377303,646	=VAR(B8:FD8)			
12						
13	s_p^2	212658676	=MÉDIA(B9:D9)		n =	4
14						
15		Variância entre amostras:		1509214,583	=F13*B11	= $n\, s_{\bar{x}}^2$
16		Variância dentro da am.:		212658676	=B13	= s_p^2
17						
18		Estatística F =	0,0071	=D15/D16	= $F_{teste} = \dfrac{n s_{\bar{x}}^2}{s_p^2}$	
19						

  - **Cálculos com tamanhos amostrais diferentes** -

    Estatística Teste: $F_{teste} = \dfrac{\left[\dfrac{\sum n_i (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2}{k-1}\right]}{\left[\dfrac{\sum (n_i - 1) s_i^2}{N-k}\right]}$, sendo $\bar{\bar{x}}$ a média de todos os valores amostrais e

    - grau de liberdade do numerador: $gl_{Num} = k - 1$; grau de liberdade do denominador: $gl_{Den} = N - k$

Exemplo para ANOVA de um fator com tamanhos amostrais diferentes:

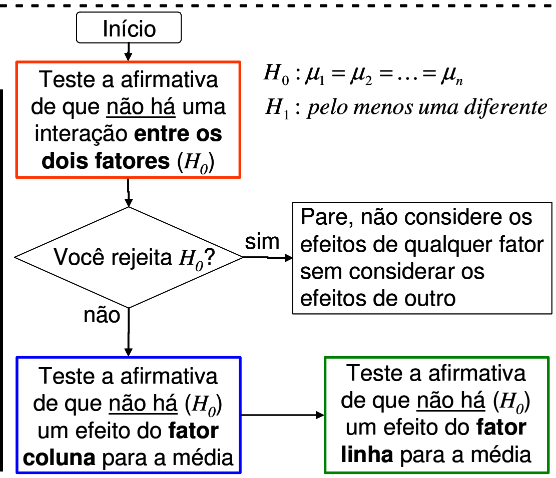
ANOVA.xls

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
4			PL (em R$ mil) de Empresas							
5			Tam 1	Tam 2	Tam 3		i	$n_i(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2$	$(n_i-1)s_i^2$	
6			79945	84010	92140		1	4,51E+08	2,89E+08	
7			67750	67750	73170		2	3,01E+07	2,08E+08	
8			56910	69105	90785		3	5,11E+08	7,00E+08	
9			65040	81300	82655		Soma	9,92E+08	1,20E+09	
10			71815	74525	78590		k -1 =	2		
11					105690		N-k =	14		
12					81300		Variância Entre		4,96E+08	=H9/H10
13		n_i	5	5	7		Variância Dentro		8,55E+07	=I9/H11
14		$\bar{x}_i$	68292,00	75338,00	86332,86					
15		s_i^2	7,22E+07	5,20E+07	1,17E+08			Estatística teste =	5,80218	=I12/I13
16		N	17	=SOMA(C13:E13)						
17		k	3	=CONT.VALORES(C13:E13)				valor-P =	0,01461	
18		$\bar{\bar{x}}$	77792,94	=MÉDIA(C6:E12)						

- **ANOVA de dois fatores** -

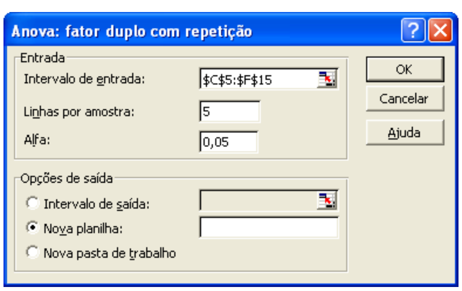
Tempo (s) para corredores da Maratona NY

	C5	Idade		
		21-29	30-39	40 ou mais
Sexo	Masculino	13615	14677	14528
	Masculino	18784	16090	17034
	Masculino	14256	14086	14935
	Masculino	10905	16460	14996
	Masculino	12077	20808	22146
	Feminino	16401	15357	17260
	Feminino	14216	16771	25399
	Feminino	15402	15036	18647
	Feminino	15326	16297	15077
	Feminino	12047	17636	25898



$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n$

H_1 : *pelo menos uma diferente*



No Excel: Ferramentas > Análise de dados > ANOVA: fator duplo com repetição > OK

Anova: fator duplo com repetição

RESUMO	21-29	30-39	40 ou mais	Total
Masculino				
Contagem	5	5	5	15
Soma	69637,0	82121,0	83639,0	235397
Média	13927,4	16424,2	16727,8	15693,1
Variância	9087754,3	6962640,2	10125758,2	9165617,8
Feminino				
Contagem	5	5	5	15
Soma	73392	81097	102281	256770
Média	14678,4	16219,4	20456,2	17118
Variância	2762103,3	1115302,3	24117287,7	14392308,6
Total				*N*
Contagem	10	10	10	30
Soma	143029,0	163218,0	185920,0	492167,0
Média	14302,9	16321,8	18592,0	16405,6
Variância	5423270,3	3601847,5	19080511,1	11897855,4

ANOVA alfa = 0,05

Fonte da variação	*SQ*	*gl*	*MQ*	*F*	*valor-P*	*F crítico*
Amostra	15226837,6	1	15226837,6	1,69	0,21	4,26
Colunas	92087146,9	2	46043573,4	5,10	0,01	3,40
Interações	21040438,9	2	10520219,4	1,17	0,33	3,40
Dentro (Erro)	216683384,0	24	9028474,33			
Total	345037807,4	29				

4 CORRELAÇÃO

Considere pares de dados (y,x)

y	x
y_1	x_1
y_2	x_2
...	...
y_n	x_n

Coeficiente de Correlação Linear de Pearson:

$$r = \frac{n\left(\sum xy\right) - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{\sqrt{n\left(\sum x^2\right) - \left(\sum x\right)^2}\sqrt{n\left(\sum y^2\right) - \left(\sum y\right)^2}}$$

ou

$$r = \frac{SQ_{xy}}{\sqrt{SQ_{xx}}\sqrt{SQ_{yy}}}$$

sendo

$$SQ_{wz} = \left(\sum wz\right) - \frac{\left(\sum w\right)\left(\sum z\right)}{n} \quad \text{e}$$

$$SQ_{zz} = \left(\sum z^2\right) - \frac{\left(\sum z\right)^2}{n}$$

O teste de hipótese:

$H_0 : \rho = 0$

$H_1 : \rho \neq 0$ gl = $n-2$

$t_{teste} = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$. Ou valor crítico $r_\alpha = \frac{t_\alpha}{\sqrt{t_\alpha^2 + n - 2}}$

Na HP:

Digite os dados:

y , [enter] , x , Σ+

r: [g], 2, [xy]

Registros	Valor
R_1	n
R_2	Σ x
R_3	Σ x^2
R_4	Σ y
R_5	Σ y^2
R_6	Σ xy

No Excel: Ferramentas
> Análise de Dados
> Correlação

5 REGRESSÃO LINEAR SIMPLES

- **Equação da reta:** $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$ sendo

$$b_1 = \frac{SQ_{xy}}{SQ_{xx}} \quad \text{ou} \quad b_1 = \frac{n\left(\sum xy\right) - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n\left(\sum x^2\right) - \left(\sum x\right)^2} \quad \text{e}$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

- **Para avaliar o ajuste:**

$$SQ_{Tot} = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2 = \left(\sum y^2\right) - \frac{\left(\sum y\right)^2}{n},$$

$$SQ_{Reg} = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i - \bar{y}\right)^2 = b_0\left(\sum y\right) + b_1\left(\sum xy\right) - \frac{\left(\sum y\right)^2}{n}$$

$$SQ_{Erro} = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 = \left(\sum y^2\right) - b_0\left(\sum y\right) - b_1\left(\sum xy\right)$$

$$R^2 = 1 - \frac{SQ_{Erro}}{SQ_{Tot}}$$

Significado do R^2: proporção das variações de y que são explicadas pelas variações de x.

Erro Padrão: $S_{xy} = \sqrt{\frac{SQ_{Erro}}{n-2}}$ $\quad S_{b_1} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{SQ_{xx}}}$

$$S_{b_0} = S_{xy}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{SQ_{xx}}}$$

Teste de Hipótese

$H_0 : \beta_i = 0$ $\quad t_{teste} = \frac{b_i}{S_{b_i}}$

$H_1 : \beta_i \neq 0$ $\quad gl = n-2$

No Excel: > Ferramentas > Análise de Dados
> Regressão

Na HP:

b_0 : 0, [g], 2

b_1 : 1, [g], 2, [x y], R↓, [xy], [-]

6 MATRIZ DE COVARIÂNCIA (a partir dos dados)

Organize os dados na forma de matriz, por exemplo, na coluna 1 liste as 5 observações da variável x_1 e na coluna 2 liste as 5 observações da variável x_2 :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 8 \\ 7 & 5 \\ 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Calcule as médias das variáveis:

$$\bar{x}_1 = 5 \quad \bar{x}_2 = 4. \tag{2}$$

Utilize a matriz obtida em (1) e para cada coluna subtraia a média, obtendo a matriz de desvios $\mathbf{X}_{desv}$:

$$\mathbf{X}_{\text{desv}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 8 \\ 7 & 5 \\ 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \\ 5 & 4 \\ 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 4 & 4 \\ 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

A matriz de covariância, $\mathbf{S}$, é obtida pela expressão:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1}\mathbf{X}'_{\text{desv}}\mathbf{X}_{\text{desv}} \qquad (4)$$

- n é o número de observações, que no nosso exemplo é igual a 5;
- $\mathbf{X}'_{\text{desv}}$ é a matriz transposta da matriz obtida em (3).

Então, para o exemplo dado a matriz $\mathbf{S}$ (matriz de covariância) é:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 4 & 4 \\ 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

que resulta em: $\mathbf{S} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 34 & 29 \\ 29 & 30 \end{bmatrix}$, ou seja

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 8{,}50 & 7{,}25 \\ 7{,}25 & 7{,}50 \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Note que para duas variáveis a matriz de covariância será 2x2 e pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathrm{S}_{11} & \mathrm{S}_{12} \\ \mathrm{S}_{21} & \mathrm{S}_{22} \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

7 MATRIZ DE CORRELAÇÃO

A matriz de correlação é escrita na forma:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{r}_{12} & \dots & \mathrm{r}_{1k} \\ \mathrm{r}_{21} & 1 & \dots & \mathrm{r}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{r}_{k1} & \mathrm{r}_{k2} & \dots & 1 \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

O cálculo de cada elemento desta matriz pode ser obtido a partir da matriz de covariância $\mathbf{S}$ por:

$$\mathrm{r}_{\mathrm{ij}} = \frac{\mathrm{S}_{\mathrm{ij}}}{\sqrt{\mathrm{S}_{\mathrm{ii}}}\sqrt{\mathrm{S}_{\mathrm{jj}}}} \quad . \qquad (8)$$

A matriz R também é simétrica, ou seja, $\mathrm{r}_{\mathrm{ij}} = \mathrm{r}_{\mathrm{ji}}$.

Para matrizes 2x2:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mathrm{S}_{12}}{\sqrt{\mathrm{S}_{11}}\sqrt{\mathrm{S}_{22}}} \\ \frac{\mathrm{S}_{12}}{\sqrt{\mathrm{S}_{11}}\sqrt{\mathrm{S}_{22}}} & 1 \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

No exemplo, considerando (1) e (5), a matriz de correlação será:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}908025 \\ 0{,}908025 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (10)$$

8 MATRIZ DE COVARIÂNCIA (a partir da correlação)

O cálculo de cada elemento da matriz de covariância pode ser feito a partir da matriz de correlação. Assim, a partir da correlação r_{12}, entre duas variáveis x_1 e x_2, a covariância é dada por:

$$\mathrm{S}_{ij} = \mathrm{r}_{ij}s_i s_j \qquad (11)$$

Na expressão (11) s_i e s_j são os desvios-padrão das variáveis i e j, respectivamente.

9 REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA

Considere mais de duas variáveis (Ex: y,x1,x2)

y	x_1	x_2
y_1	x_{11}	x_{12}
y_2	x_{21}	x_{22}
...	...	...
y_n	x_{n1}	x_{n2}

O objetivo é obter o modelo de regressão linear múltipla, considerando k variáveis independentes:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_kx_k$$

Obter o modelo significa encontrar os valores de b_0, b_1, b_2, ..., b_k.

Etapas para o estudo de regressão linear múltipla:

A resposta do problema (obtenção de b's) pode ser dada através de matrizes:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{\beta} = \left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\right)^{-1}\left(\mathbf{Z}'\mathbf{Y}\right) \qquad (12)$$

A seguir os passos para obtenção dos b's:

- Gráficos de dispersão y – x_1, y – x_2, ..., y – x_k

- A partir da tabela de dados considere as matrizes

- $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$ dadas por:

$$\mathbf{Z}=\begin{bmatrix}1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k}\\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk}\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$$

- Obtenha $\mathbf{Z}'$, ou seja, a transposta da matriz $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z}'=\begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1}\\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{1k} & x_{2k} & \dots & x_{nk}\end{bmatrix}$$

- Multiplique a matriz transposta $\mathbf{Z}'$ pela matriz $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$$

- Considere o resultado anterior e inverta obtendo a matriz

$$\mathbf{M}=(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1} \tag{13}$$

Para inverter a matriz veja: 10 MATRIZ INVERSA.

- Faça a multiplicação das matrizes $\mathbf{Z}'$ e $\mathbf{Y}$ obtendo a matriz $\mathbf{A}$ dada por

$$\mathbf{A}=\mathbf{Z}'\mathbf{Y} \tag{14}$$

- Multiplique as matrizes obtidas em (13) e (14) obtendo assim os valores de b's definidos em (12), ou seja:

$$\boldsymbol{\beta}=(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}(\mathbf{Z}'\mathbf{Y})$$

- Com os valores de b's escreva a equação linear:

$$\hat{y}=b_0+b_1x_1+b_2x_2+\dots+b_kx_k \tag{15}$$

- A partir da expressão (15) calcule estimativas para cada caso em análise.
- Calcule os resíduos ε_i para cada estimativa:

$$\varepsilon_i=y_i-\hat{y}_i$$

- Faça um gráfico dos resíduos (no eixo-y) como função das estimativas (no eixo-x).

10 MATRIZ INVERSA

A matriz inversa de uma matriz $\mathbf{A}$ (se existir) é a matriz $\mathbf{A}^{-1}$ tal que $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A}=\mathbf{1}$.

Determinação da Matriz Inversa pela matriz Adjunta:

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det(\mathbf{A})}\operatorname{adj}(\mathbf{A}) \tag{16}$$

Para uma matriz **3x3**, considere os elementos nomeados de acordo com a expressão (17) abaixo:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix} \tag{17}$$

A matriz adjunta de $\mathbf{A}$ é obtida pela matriz dos cofatores transposta, que no caso da matriz $\mathbf{A}$ da expressão (17) resulta em:

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A})=\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}e & f\\ h & i\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}b & c\\ h & i\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}b & c\\ e & f\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}d & f\\ g & i\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}a & c\\ g & i\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a & c\\ d & f\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}d & e\\ g & h\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a & b\\ g & h\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}a & b\\ d & e\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

O determinante de $\mathbf{A}$ é obtido por:

$$\det(\mathbf{A})=a\,e\,i+b\,f\,g+d\,h\,c-g\,e\,c-a\,h\,f-b\,d\,i$$