

Capítulo 5

Diagramas de Esforços Solicitantes

5.1 Introdução

Considere-se a viga prismática da Figura 5.1.

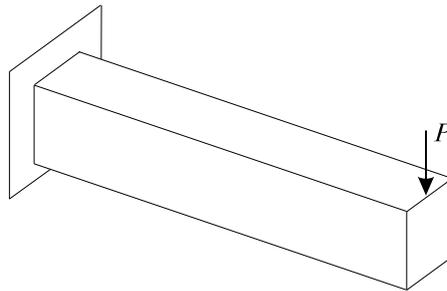


Figura 5.1

Antes de prosseguir na leitura deste texto, responda à seguinte pergunta: “Se se aumentar continuamente o valor da carga P aplicada nesta viga, onde deverá ocorrer sua ruptura, ou seja, onde a viga irá se quebrar?”

Muito provavelmente sua resposta terá sido: “Bem próximo do engastamento.”

Procure agora responder a essa outra indagação: “E por que bem próximo do engastamento?”

Talvez sua resposta a esta segunda pergunta tenha sido: “Porque é onde se terá os maiores esforços na viga.”

Procure, então, responder ao seguinte: “Por que os maiores esforços nesta viga se darão junto ao engastamento?”

Talvez agora já esteja começando a ser difícil explicar melhor um fato que intuitivamente lhe parece muito claro: que a viga deverá se romper junto ao engastamento porque é nesta região que ela estará sujeita aos maiores esforços.

Sua intuição e sua resposta estão de fato corretas. Mas por que?

A resposta da resistência dos materiais a esta pergunta é a seguinte: “Se se aumentar continuamente a carga P aplicada na viga da Figura 5.1 ela deverá se romper junto ao engastamento, porque é onde se terá o maior momento fletor na viga e, conseqüentemente, é onde ela estará sujeita aos maiores esforços.”

Como se mostrará mais à frente, as tensões - isto é, os esforços - nos pontos de uma viga são diretamente proporcionais aos esforços solicitantes que atuam nas seções transversais que os contêm. Onde se tiver os maiores esforços solicitantes se terá as maiores tensões, ou seja, os maiores esforços.

Como o maior momento fletor nesta viga se dá junto ao engastamento, é aí que se terá as maiores tensões e, conseqüentemente, é onde se dará a ruptura da viga.

A seção mais perigosa de uma estrutura formada por barras é portanto aquela em que se tem a combinação mais desfavorável de esforços solicitantes, levando às maiores tensões na estrutura.

Para saber se uma estrutura que se está projetando resistirá ou não ao carregamento que nela irá atuar deve-se determinar sua seção mais perigosa, as tensões que irão atuar nos pontos desta seção e compará-las com as tensões limites do material que a constitui, verificando-se por meio desta comparação se a estrutura proposta irá ou não suportar o carregamento previsto¹.

A determinação da seção crítica de uma estrutura formada por barras se faz por meio dos diagramas de esforços solicitantes, que se constituem no objeto deste capítulo.

Para facilitar a compreensão do que são os diagramas de esforços solicitantes, vai-se utilizar a viga da Figura 5.1 para apresentá-los.

O sistema constituído por esta viga é plano, pois, como se observou no Capítulo I, são consideradas planas as estruturas constituídas por barras cujos eixos se situam em um plano, no qual estão também os esforços externos que nela atuam.

Na Figura 5.2 a viga é rerepresentada, agora esquematizada por seu eixo.

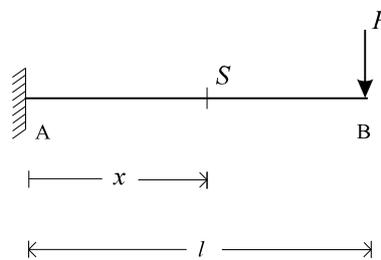


Figura 5.2

Os esforços solicitantes que atuam em uma seção genérica S da viga, caracterizada por sua distância x ao engastamento, podem ser determinados por meio do teorema fundamental.

Por simplicidade, se optará pela redução na seção do corte dos esforços externos aplicados no trecho de barra à sua direita.

Na Figura 5.3(a) indica-se o trecho da viga à esquerda do corte com linha cheia e o trecho à direita, com linha tracejada.

¹ Mostrou-se no Capítulo II que para saber se uma estrutura irá resistir aos esforços que deverá receber deve-se determinar os estados de tensão em seus pontos e compará-los com os estados de tensão limites do material que a constitui. Recordar-se que o estado de tensão em um ponto é o conjunto das infinitas tensões associadas aos infinitos planos que por ele passam. Não basta, portanto, comparar tensões em planos particulares com as tensões limites do material da estrutura.

Mais adiante neste curso se irá mostrar, entretanto, que no caso das estruturas reticuladas - isto é, formadas por barras - usuais, em face dos coeficientes de segurança normalmente adotados, basta calcular as tensões nas seções transversais das barras e compará-las com as tensões limites do material.

Daí poder-se, em grande número de casos, reduzir a análise da estrutura à das tensões em suas seções transversais.

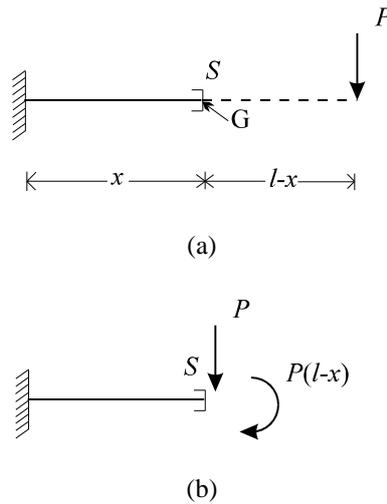


Figura 5.3

A redução em G do único esforço externo aplicado à direita do corte leva aos esforços solicitantes que atuam na seção genérica S: uma força cortante P girando o trecho de barra em que se aplica no sentido horário e um momento fletor $P(l-x)$ tracionando as fibras superiores da barra.

A força cortante e o momento fletor em uma seção genérica desta viga têm portanto as seguintes equações:

$$V(x) = P \tag{5.1}$$

$$M(x) = P(l - x) .$$

Para chegar à seção transversal mais crítica da estrutura, deve-se analisar a variação dos esforços solicitantes ao longo da barra, e determinar em que seção transversal se tem a combinação mais desfavorável desses esforços.

A melhor forma de se fazer esta análise é através dos gráficos que mostram a variação da força cortante e do momento fletor ao longo da viga, apresentados na Figura 5.4: a variação da força cortante em (a) e do momento fletor em (b).

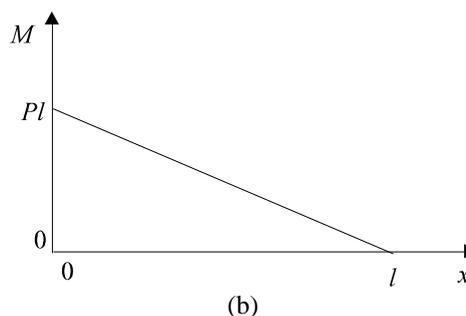


Figura 5.4

Observa-se por meio destes gráficos que a força cortante é constante ao longo da viga e que o momento fletor varia linearmente de Pl no engastamento a 0 na extremidade livre da viga.

Destes gráficos conclui-se com facilidade que a seção mais perigosa da viga é a do engastamento, pois é onde se tem o máximo momento fletor, que é o único esforço solicitante variável ao longo da barra.

Os diagramas de esforços solicitantes da viga da Figura 5.1 ou 5.2 estão informalmente apresentados: são os diagramas da Figura 5.4.

Passa-se agora a uma definição mais formal.

Definição 5.1

Diagramas de esforços solicitantes de uma estrutura constituída por barras são diagramas em que se mostra graficamente como cada um dos esforços solicitantes varia ao longo das barras da estrutura.

Os diagramas de esforços solicitantes costumam ser apresentados como se indica na Figura 5.5, desenhando-se o esquema da estrutura, sob ele traçando-se de forma bem esquemática os gráficos da força cortante V e do momento fletor M .

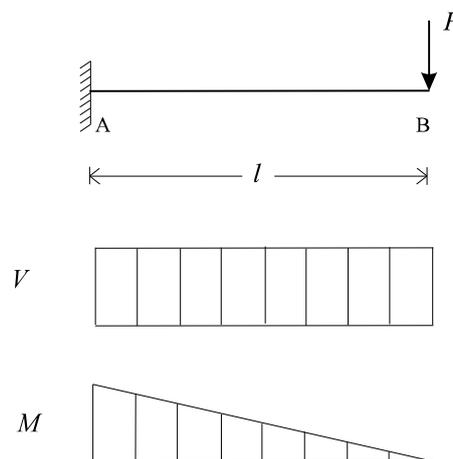


Figura 5.5

A finalidade dos traços verticais presentes nestes dois diagramas é lembrar que os valores de V e M encontram-se indicados perpendicularmente ao eixo da barra.

Como já se comentou, uma das principais finalidades dos diagramas de esforços solicitantes é permitir que se determine a seção crítica da estrutura e os esforços solicitantes que nela atuam.

Vê-se com facilidade que eles cumprem muito bem esse objetivo, pois num relance percebe-se que a seção crítica é a do engastamento e que nela atuam uma força cortante de intensidade P e um momento fletor de intensidade Pl .

Verifica-se, portanto, que os diagramas de esforços solicitantes são importantíssimos no estudo da resistência das estruturas.

Como se verá mais à frente, assim como as tensões, também os deslocamentos dos pontos de uma estrutura constituída por barras dependem dos esforços solicitantes que nelas atuam. Por esta razão, esses diagramas também terão um papel importante na determinação dos deslocamentos dos pontos de uma estrutura.

Todas estas observações permitem concluir que os diagramas de esforços solicitantes têm um papel muito destacado na engenharia de estruturas. Ao se fazer o projeto ou a verificação de uma estrutura constituída por barras tem-se sempre que traçar seus diagramas de esforços solicitantes.

É por este motivo que neste capítulo se irá estudá-los de maneira profunda e detalhada.

5.2 Diagramas de esforços solicitantes de estruturas planas

5.2.1 Convenção de sinais

Considerem-se as duas vigas da Figura 5.6.

Nas seções correspondentes destas duas vigas têm-se esforços solicitantes que, apesar de possuírem exatamente as mesmas intensidades, têm ações físicas bem distintas: na viga (a) as forças cortantes giram o trecho de viga em que se aplicam no sentido horário, enquanto que na viga (b) giram o trecho de viga em que se aplicam no sentido anti-horário; na viga (a) os momentos fletores tracionam as fibras superiores da barra, ao passo que na viga (b) tracionam as fibras inferiores.

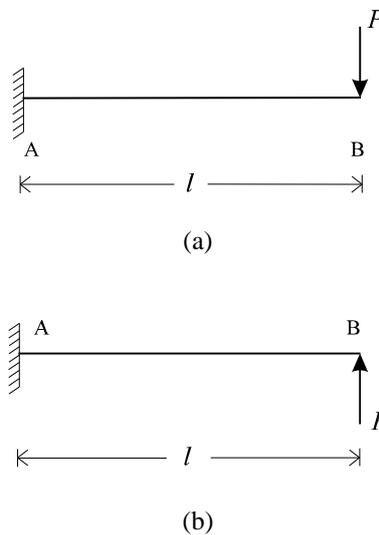


Figura 5.6

Os diagramas de esforços solicitantes destas duas vigas devem ser diferentes, pois devem retratar as diferentes ações físicas que se tem nos dois casos.

Esta identificação da ação física dos esforços solicitantes é feita mediante a atribuição de sinais a eles, conforme se apresenta na Tabela 5.1.

Os sinais dos esforços solicitantes permitem a imediata identificação de sua ação física.

Assim, se se disser que em uma seção transversal de uma barra se tem os esforços solicitantes

Convenção de sinais dos esforços solicitantes

| Esforço solicitante | Sinal positivo (+) | Sinal negativo (-) |
|--------------------------------|---|--|
| Força normal | Tração | Compressão |
| Força cortante | Gira o trecho de barra em que atua no sentido horário | Gira o trecho de barra em que atua no sentido anti-horário |
| Momento fletor | Traciona as fibras inferiores da barra | Traciona as fibras superiores da barra |
| Momento de torção ² | O vetor momento tem o sentido da normal externa à seção transversal em que atua | O vetor momento tem sentido contrário ao da normal externa à seção transversal em que atua |

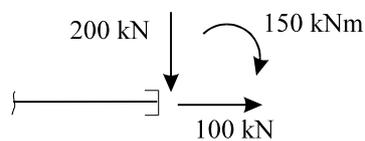
Tabela 5.1

$$N = 100 \text{ kN}$$

$$V = 200 \text{ kN} \quad (5.2)$$

$$M = -150 \text{ kNm}$$

está-se dizendo que se tem nesta seção uma força normal de tração de 100 kN, uma força cortante de 200 kN girando o trecho da barra em que se aplica no sentido horário e um momento fletor de 150 kNm tracionando as fibras superiores da barra.



(a)

² Apesar de nos sistemas planos não haver torção, está-se aproveitando a oportunidade para já apresentar a convenção de sinais destes esforços.

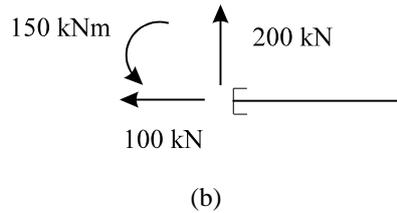


Figura 5.7

Se cortar a barra nesta seção transversal se terá dos dois lados do corte os esforços solicitantes mostrados na Figura 5.7: em (a) os esforços solicitantes à esquerda do corte, em (b), à direita do corte.

Para reforçar melhor a convenção de sinais da Tabela 5.1, apresentam-se na Figura 5.8 os dois trechos de uma estrutura espacial cortada segundo uma seção transversal em que todos os esforços solicitantes são positivos. Na Figura 5.9 faz-se o mesmo relativamente a uma barra cortada em uma seção transversal em que todos os esforços solicitantes são negativos.

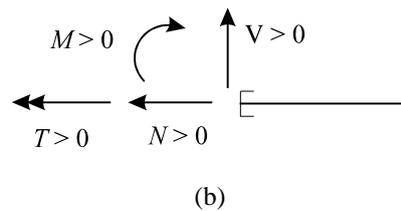
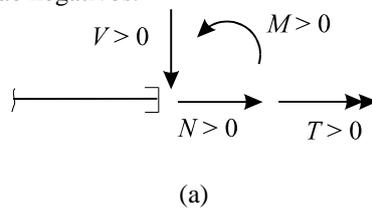


Figura 5.8

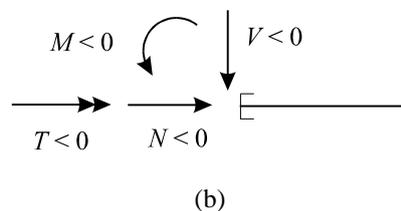
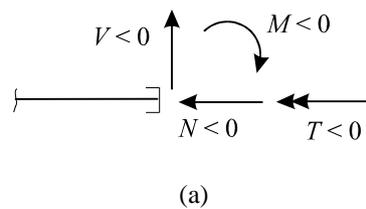


Figura 5.9

Os sinais dos esforços solicitantes devem ser considerados ao se traçar seus diagramas. Forças normais, forças cortantes e momentos de torção positivos são indicados acima do eixo que representa a viga; os negativos, abaixo do eixo.

Além disso, nos diagramas destes esforços indica-se explicitamente seu sinal.

No caso dos momentos fletores, o critério para representá-los é outro: os diagramas são sempre desenhados no lado tracionado da barra.

Como os momentos fletores são positivos quando tracionam as fibras inferiores da barra e negativos quando tracionam as fibras superiores, os momentos fletores positivos são desenhados abaixo do eixo que representa a viga e os negativos, acima do eixo. Nos diagramas de momentos fletores não se indica o seu sinal.

Na Figura 5.10 os diagramas de esforços solicitantes da viga da Figura 5.6(a) estão traçados de acordo com estas regras, estando indicados explicitamente nesta figura os sistemas de eixos utilizados em seu traçado.

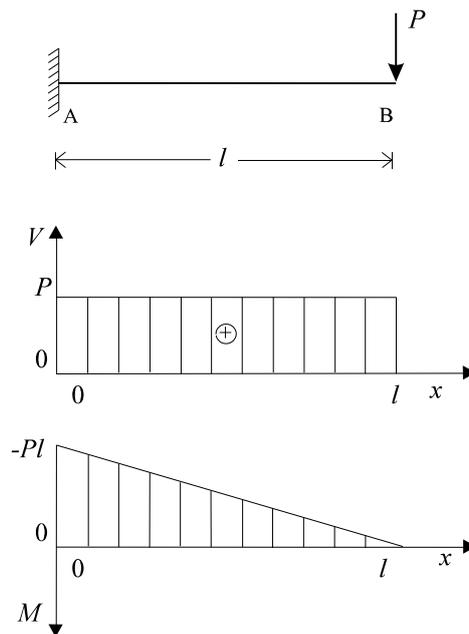


Figura 5.10

Na prática, omitem-se os eixos de referência, ficando os diagramas com o aspecto final mostrado na Figura 5.11.

No caso da viga da Figura 5.6(b), os diagramas de esforços solicitantes são os da Figura 5.12.

Os diagramas das Figuras 5.11 e 5.12 informam claramente quais são as intensidades dos esforços solicitantes e quais são suas ações físicas.

Como já se mencionou, em seções correspondentes destas duas vigas em balanço tem-se esforços solicitantes de mesma intensidade, mas com ações físicas distintas, o que leva a diagramas distintos para estas duas vigas.

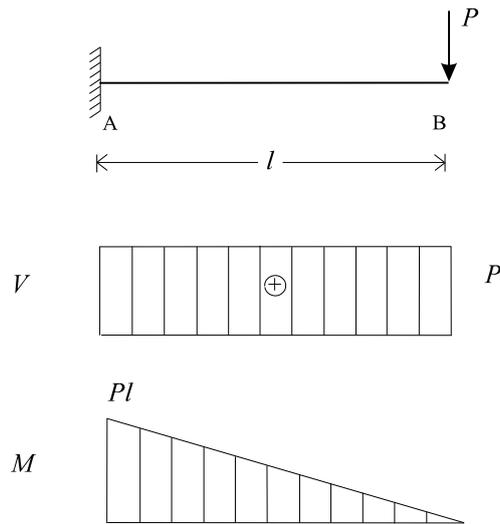


Figura 5.11

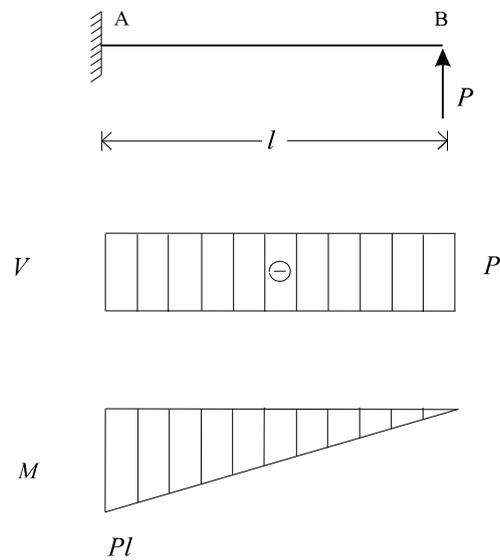


Figura 5.12

Observa-se também que a forma utilizada para representar os momentos fletores é muito eficiente: basta olhar o diagrama de momentos fletores para saber qual é o lado tracionado e qual é o lado comprimido da viga.

5.2.2 Exemplos

Serão agora apresentados vários exemplos de traçado dos diagramas de esforços solicitantes de estruturas planas, cada vez mais complexas.

Exemplo 5.1

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga em balanço da Figura 5.13(a).

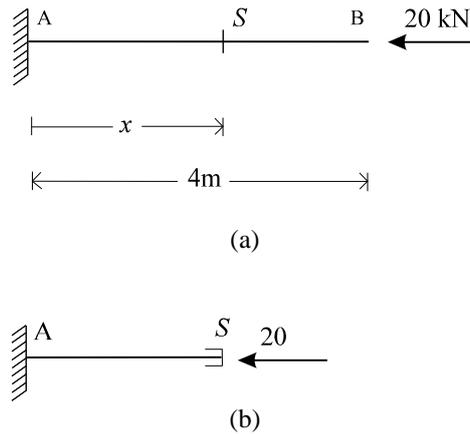


Figura 5.13

Na Figura 5.13(b) mostra-se o único esforço solicitante que atua em uma seção genérica S desta viga. Seus esforços solicitantes têm portanto as seguintes expressões analíticas:

$$\begin{aligned}N(x) &= -20 \\V(x) &= 0 \\M(x) &= 0 \\T(x) &= 0.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Os diagramas de esforços solicitantes desta viga em balanço estão na Figura 5.14.

Nota 5.1

A viga considerada neste exemplo é uma estrutura plana. Como em estruturas planas nunca se tem momentos de torção, os diagramas de torção das estruturas planas, que serão sempre nulos, podem ser omitidos.

É o que se fará nos próximos exemplos.

Nota 5.2

Na viga examinada neste exemplo as forças cortantes e os momentos fletores são nulos em todas as suas seções transversais. Quando isto ocorrer, estes diagramas inteiramente nulos podem ser omitidos.

É o que normalmente se fará nos próximos exemplos.

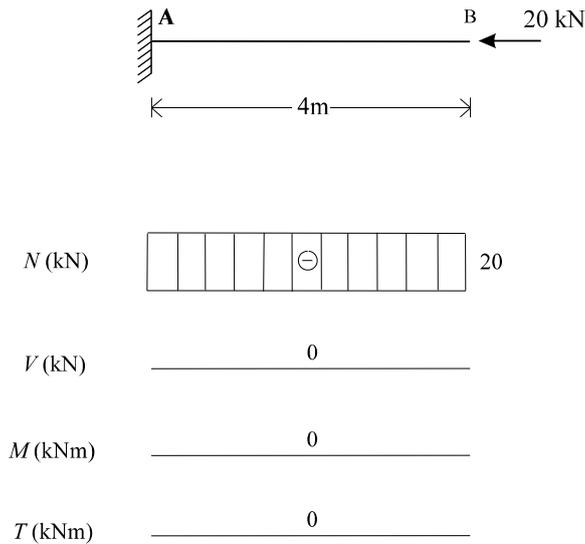


Figura 5.14

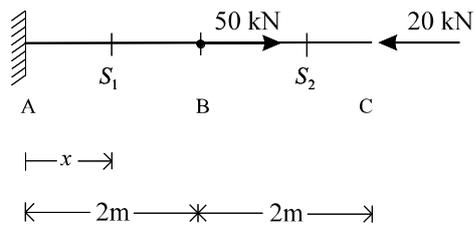
Exemplo 5.2

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga em balanço da Figura 5.15(a).

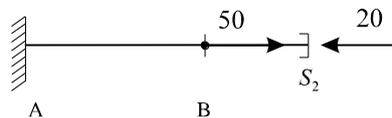
É fácil verificar que não se tem agora os mesmos esforços solicitantes ao longo de toda a viga.

Como em B há uma força aplicada, os esforços solicitantes serão distintos nos trechos AB e BC.

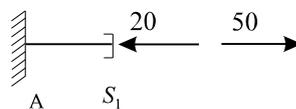
Na Figura 5.15(b) mostra-se o único esforço solicitante que se tem em uma seção genérica S_2 do trecho BC; na Figura 5.15(c) mostram-se as duas componentes do único esforço solicitante que se tem em uma seção genérica S_1 do trecho AB, decorrentes da redução nesta seção dos dois esforços externos aplicados à sua direita.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.15

Os esforços solicitantes desta viga têm então as seguintes expressões analíticas:

- trecho AB: $0 \leq x < 2\text{m}$

$$\begin{aligned} N(x) &= -20 + 50 = 30 \\ V(x) &= 0 \\ M(x) &= 0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

- trecho BC: $2\text{m} < x \leq 4\text{m}$

$$\begin{aligned} N(x) &= -20 \\ V(x) &= 0 \\ M(x) &= 0 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Nota-se que estas expressões fornecem os esforços solicitantes em toda a viga, exceto no ponto B.

A determinação dos esforços solicitantes em B apresenta um problema, decorrente do fato de nele estar aplicada uma força concentrada.

Para obter os esforços solicitantes em B deve-se cortar a barra nesta seção e nela reduzir os esforços externos que estão aplicados de um dos lados do corte.

É exatamente aí que reside o problema: ao se cortar a barra em B, de que lado do corte fica aplicada a força concentrada de 50 kN? Ela claramente não se encontra aplicada nem do lado esquerdo, nem do lado direito, nem parte do lado esquerdo e parte do lado direito do corte.

Simplemente não se consegue dizer onde está aplicada a força concentrada.

Por esta razão, não se consegue definir a força normal em B.

Os valores da força normal à esquerda e à direita do corte são, entretanto, muito bem caracterizados, tendo-se à esquerda do corte $N(B_-) = 30\text{ kN}$ e à direita do corte $N(B_+) = -20\text{ kN}$.

Não é difícil ver que a indefinição da força normal não se estende à força cortante e ao momento fletor, que claramente são nulos em B.

Os diagramas de esforços solicitantes desta viga estão na Figura 5.16, devendo-se observar que de fato o ponto B está excluído do diagrama de forças normais.

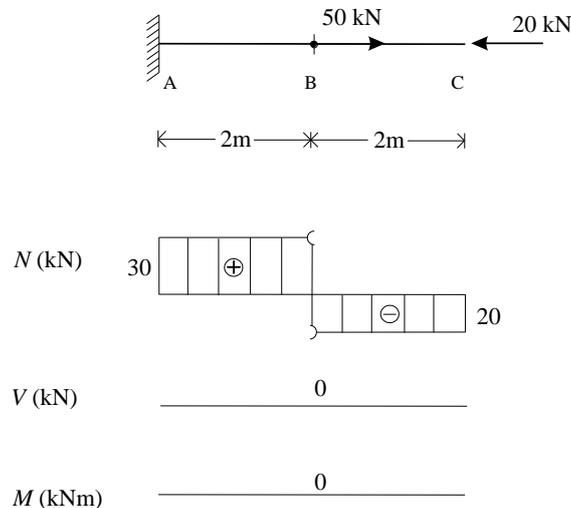


Figura 5.16

Nota 5.3

A descontinuidade no diagrama de forças normais observada na seção B decorre do modelo matemático empregado para representar esta viga, que admite a existência de uma força concentrada aplicada em B.

Forças concentradas não existem na natureza. Por menor que seja a região de aplicação de uma força ela será sempre distribuída, nunca concentrada.

É o fato de se admitir que uma força possa ser concentrada que leva à descontinuidade no diagrama de forças normais.

Na Figura 5.17(a) mostra-se uma viga real cujo modelo matemático poderia corresponder à viga em balanço examinada neste exemplo.

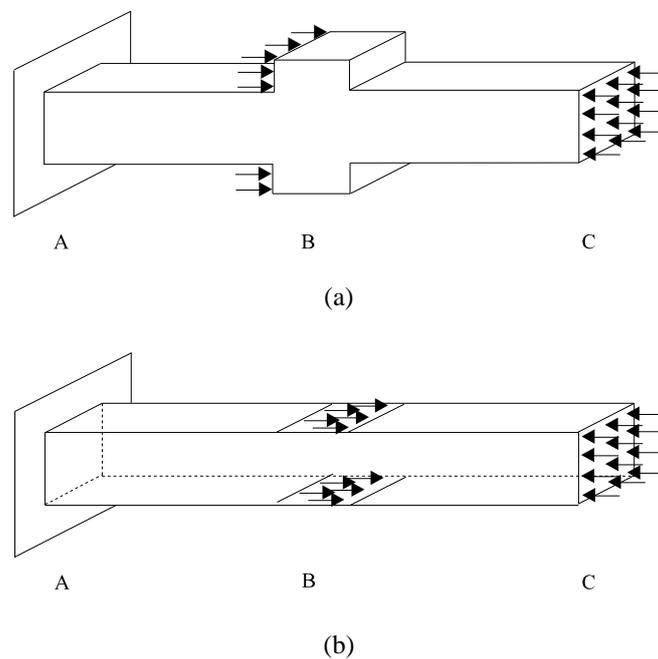


Figura 5.17

Os esforços externos ativos são aplicados nas faces de dois consolos localizados no ponto B, e na seção de extremidade livre. As forças distribuídas aplicadas nos consolos têm resultante igual a 50 kN e as aplicadas na extremidade livre, resultante igual a 20 kN.

Observa-se claramente na Figura 5.17(a) que os esforços aplicados nos consolos não são transmitidos à viga de forma concentrada, sendo transmitidos de maneira distribuída nas superfícies de contato dos consolos com a viga, como se mostra na Figura 5.17(b).

Um modelo matemático mais preciso para esta viga seria o da Figura 5.18, em que se representa com mais exatidão como os esforços externos são aplicados na viga.

No trecho em que se tem os consolos são aplicadas forças distribuídas com resultante igual à 50 kN.

Os esforços solicitantes desta viga mais exata estão apresentados na Figura 5.18, verificando-se que agora não se tem mais uma descontinuidade no diagrama de forças normais, que variam continuamente de $N = 30$ kN na face esquerda dos consolos a $N = -20$ kN na face direita.

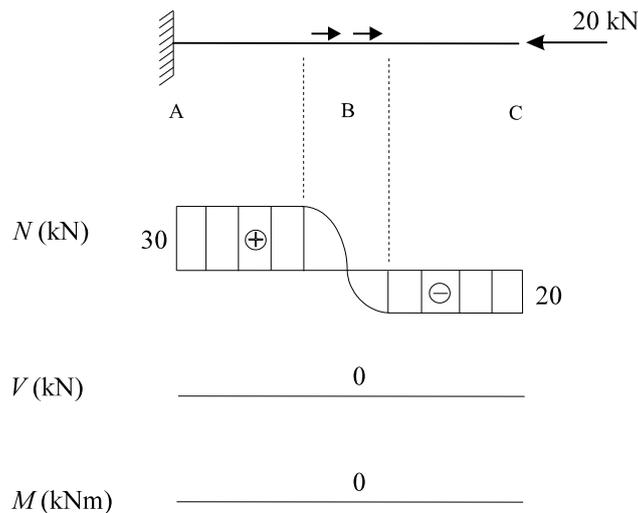


Figura 5.18

Na natureza não se tem descontinuidades, nela não ocorrem saltos. A descontinuidade observada no diagrama de forças normais da Figura 5.16 decorre exclusivamente de um defeito do modelo empregado, decorrente do fato de se substituir as forças distribuídas da natureza por sua resultante aplicada concentradamente.

Apesar de não ser o modelo matemático mais exato, é da forma considerada na Figura 5.16 que se costuma esquematizar uma viga real como a da Figura 5.17.

Comparando os diagramas das Figuras 5.16 e 5.18 verifica-se que a única diferença entre eles reside nas forças normais nas vizinhanças do ponto B.

O modelo mais exato mostra de que forma se dá a variação contínua da força normal desde o valor de 30 kN à esquerda de B ao valor de -20 kN à direita de B; já o modelo menos exato, simplesmente mostra que esta variação ocorre, sem entretanto mostrar como de fato ela se dá.

Como o trecho de viga afetado pelo defeito do modelo matemático menos exato é pequeno e como os valores extremos das forças normais neste trecho são fornecidos corretamente por ele, admite-se que, do ponto de vista de aplicação prática, o modelo matemático da Figura 5.16 seja adequado ao estudo da viga.

É importante, entretanto, que, ao utilizá-lo, se conheçam suas limitações e que se saiba claramente que nas vizinhanças de B se tem de fato uma variação contínua das forças normais de 30 kN a -20 kN.

Uma outra razão que leva a se aceitar o modelo da Figura 5.16 como sendo bom é que, embora conveniente do ponto de vista teórico, o modelo matemático da Figura 5.18 é na prática de obtenção muito difícil. As forças distribuídas que atuam nas superfícies de contato dos consolos com a viga não são constantes, distribuindo-se de forma complexa e de difícil determinação.

Uma maneira de superar essa dificuldade seria considerá-las como sendo constantes nestas superfícies, o que levaria a um modelo matemático intermediário entre os dois examinados.

Volta-se a dizer, entretanto, que não é necessário ter este trabalho, pois apenas em um trecho muito pequeno da viga o modelo matemático mais simples não fornece os esforços solicitantes exatos.

Nota 5.4

O modelo matemático mais simples não permite que se defina o valor da força normal em B, levando ao diagrama de forças normais da Figura 5.16, que mostra claramente que a força normal em B não é conhecida.

Por simplicidade, entretanto, costuma-se traçar o diagrama de forças normais como na Figura 5.19, sem mostrar explicitamente que seu valor em B não é conhecido.

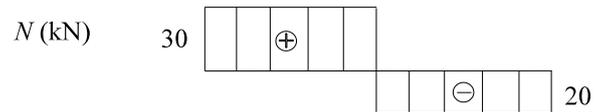


Figura 5.19

Exemplo 5.3

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga em balanço da Figura 5.20(a).

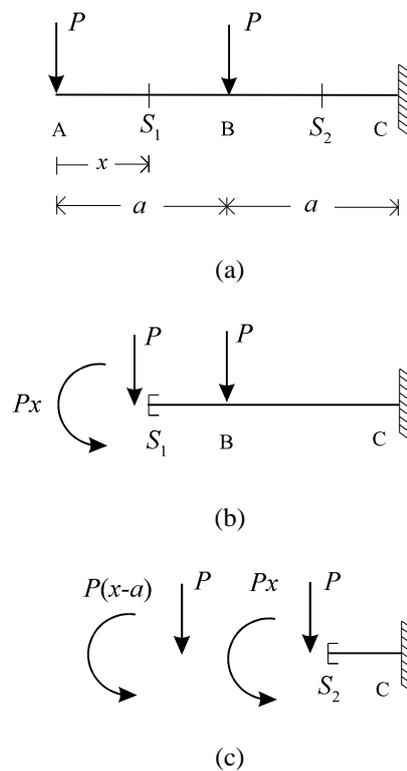


Figura 5.20

Como se tem uma força concentrada aplicada em B, os esforços solicitantes dos trechos AB e BC têm expressões algébricas distintas.

Para determiná-las, deve-se fazer dois cortes na viga, um no trecho AB e outro no trecho BC.

Na Figura 5.20(b) apresentam-se os esforços decorrentes da redução na seção S_1 da força externa aplicada à sua esquerda; na Figura 5.20(c), os esforços decorrentes da redução em S_2 das duas forças externas aplicadas a sua esquerda.

Os esforços solicitantes desta viga têm então as seguintes expressões:

- trecho AB $0 \leq x < a$

$$N(x) = 0$$

$$V(x) = -P \quad (5.6)$$

$$M(x) = -Px$$

- trecho BC $a < x \leq 2a$

$$N(x) = 0$$

$$V(x) = -2P \quad (5.7)$$

$$M(x) = -Px - P(x - a)$$

Nota-se que nestas expressões não estão definidos os esforços solicitantes em B.

O fato de se ter neste ponto uma força concentrada perpendicular ao eixo da barra impede que se consiga determinar o valor da força cortante que nele atua, por não se poder dizer de que lado do corte fica aplicada esta força quando se corta a barra em B.

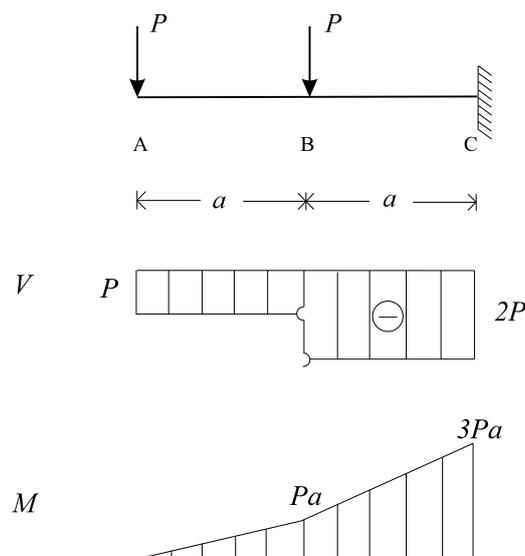


Figura 5.21

Esta indefinição não ocorre, entretanto, com a força normal, que é claramente nula em B, e com o momento fletor, que neste ponto é igual a $-Pa$.

Os diagramas de esforços solicitantes desta viga encontram-se traçados na Figura 5.21. Observa-se que no trecho AB o momento fletor varia linearmente de 0 a $-Pa$ e que no trecho BC varia linearmente de $-Pa$ a $-3Pa$.

Nota 5.5

A descontinuidade que se tem em B no diagrama de forças cortantes decorre do fato de se ter uma força concentrada aplicada neste ponto.

Novamente, este é um defeito introduzido pelo modelo matemático que está sendo empregado para representar uma viga real, na qual, como já se comentou, não ocorrem descontinuidades.

Na Figura 5.22 mostra-se uma viga real carregada em sua face superior por forças uniformemente distribuídas aplicadas próximo à extremidade livre e ao centro da viga, ambas com resultante igual a P .

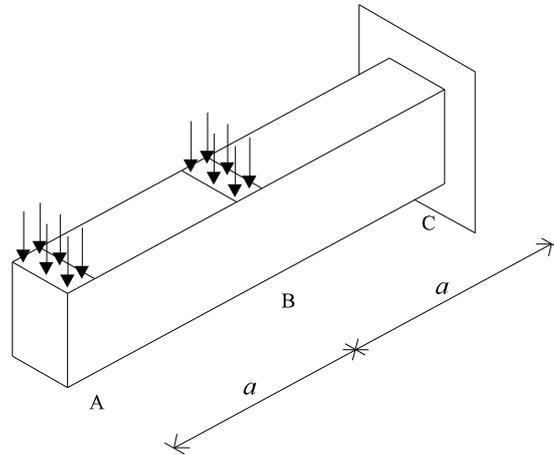


Figura 5.22

Esta viga poderia ter como modelo matemático a viga da Figura 5.20, em que se tem a descontinuidade no diagrama de forças cortantes.

Um modelo matemático mais exato para representar esta viga real é o da Figura 5.23, que leva a forças cortantes que não mais apresentam descontinuidade em B, como se observa no diagrama também apresentado na Figura 5.23.

A razão pela qual opta-se por representar a viga real da Figura 5.22 por meio do modelo matemático da Figura 5.20 é que se trata de um modelo bem simples e que leva a resultados muito próximos dos obtidos usando o modelo matemático mais exato e mais trabalhoso.

Lembra-se, entretanto, que mais uma vez é necessário saber o que se está fazendo ao utilizar o modelo matemático mais simples, tendo consciência de que a descontinuidade a que ele leva decorre de um defeito do modelo.

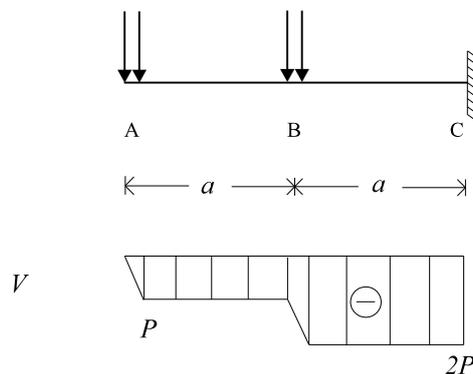


Figura 5.23

Nota 5.6

Das Notas 5.3 e 5.5 obtêm-se as seguintes regras gerais:

a) Uma força concentrada com a direção do eixo da barra leva a se ter no seu ponto de aplicação uma descontinuidade no diagrama de forças normais; esta descontinuidade tem módulo igual ao desta força concentrada.

b) Uma força concentrada perpendicular ao eixo da barra leva a se ter no seu ponto de aplicação uma descontinuidade no diagrama de forças cortantes; esta descontinuidade tem módulo igual ao desta força concentrada.

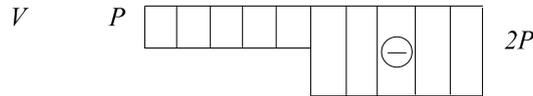


Figura 5.24

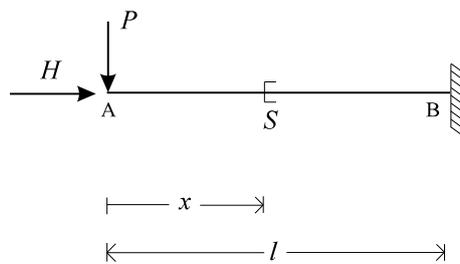
Nota 5.7

Apesar de a força cortante da Figura 5.21 não ser definida em B, habitualmente não se mostra explicitamente este fato no diagrama de forças cortantes, que costuma ter o aspecto que se vê na Figura 5.24.

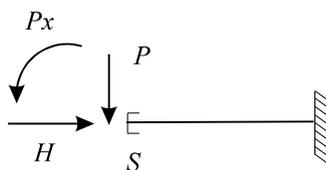
Exemplo 5.4

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga da Figura 5.25(a).

Como nesta viga não existe nenhum esforço externo aplicado entre A e B, para determinar os esforços solicitantes basta cortá-la em uma única seção genérica S, como se mostra na Figura 5.25(b).



(a)



(b)

Figura 5.25

As expressões analíticas destes esforços são

$$\begin{aligned} N(x) &= -H \\ V(x) &= -P \\ M(x) &= -Px, \end{aligned} \tag{5.8}$$

tendo-se então os diagramas de esforços solicitantes indicados na Figura 5.26.

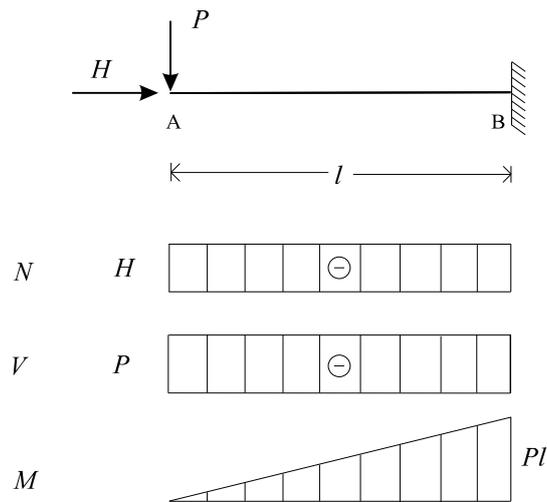


Figura 5.26

Nota 5.8

Deve-se observar que em todos estes exemplos está-se sempre considerando a viga na configuração indeformada, isto é, na configuração que apresenta antes da aplicação dos esforços externos.

Como se sabe, todos os sólidos se deformam quando submetidos a esforços externos; no caso desta viga, a configuração deformada tem o aspecto indicado na Figura 5.27.

Nota-se facilmente que os esforços solicitantes desta viga determinados para a configuração indeformada e para a configuração deformada são distintos.



Figura 5.27

Observa-se, por exemplo, que na configuração indeformada a força horizontal H não produz momentos fletores, ao passo que os produz na configuração deformada.

Para qual destas duas configurações devem ser calculados os esforços solicitantes? O mais correto é determiná-los para a configuração deformada, pois é na estrutura deformada que eles atuam.

O cálculo dos esforços solicitantes na configuração deformada, apesar de mais exato, é entretanto muito complexo. Como se verá à frente, a configuração deformada da viga depende dos momentos fletores, que, por sua vez, dependem da configuração deformada.

Esta dependência mútua entre a configuração deformada da viga e os momentos fletores que nela atuam é que dificulta a obtenção dos esforços solicitantes na estrutura deformada, exigindo que se integre uma equação diferencial para determiná-los.

Por esta razão, nos casos em que se erra muito pouco ao desprezar a deformação da viga na determinação dos esforços solicitantes, opta-se por obtê-los na configuração indeformada. É nesta situação que se enquadra a maior parte das estruturas reais.

No caso de estruturas muito flexíveis, entretanto, o erro cometido ao desprezar sua deformação passa a ser muito grande, devendo-se então levá-la em conta na determinação dos esforços solicitantes, como se mostrará em outra parte deste curso.

Tem-se, portanto, dois modelos matemáticos distintos para representar a estrutura: um em que se despreza sua deformação ao se calcular os esforços solicitantes, e outro em que ela é considerada.

Quando os dois modelos dão resultados bem próximos, opta-se pelo mais simples, que considera a estrutura indeformada, apesar de não ser o que mais se aproxima do que de fato ocorre na estrutura; quando os dois modelos dão resultados muito diferentes, opta-se pelo mais complexo, que leva em conta a deformação da estrutura, por ser aquele que consegue representar adequadamente o comportamento real da estrutura.

Na Figura 5.28 mostram-se duas vigas como a examinada neste exemplo: a da Figura 5.28(a) bastante rígida, isto é, pouco deformável, e a da Figura 5.28(b) muito flexível, isto é, muito deformável.

Do que se acaba de comentar, fica claro que na obtenção dos esforços solicitantes pode-se considerar a viga da Figura 5.28(a) na configuração indeformada, ao passo que a da Figura 5.28(b) deve ser necessariamente considerada na configuração deformada.

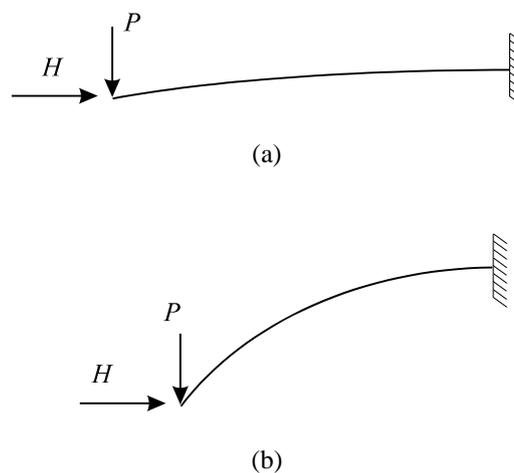


Figura 5.28

A não ser que se faça menção em contrário, neste curso sempre se utilizará o modelo matemático mais simples, em que não se leva em conta a deformação da estrutura na determinação dos esforços solicitantes.

Nota 5.9

O modelo matemático em que se despreza a deformação da estrutura ao se calcular os esforços solicitantes, além de mais simples, possui uma propriedade utilíssima: pode-se aplicar o princípio da superposição de efeitos na obtenção dos esforços solicitantes.

Considere-se novamente a viga deste exemplo. Os esforços solicitantes que nela atuam são a soma dos que se teria se nela atuasse apenas a força horizontal H com os que se teria se nela atuasse apenas a força vertical P , como se mostra na Figura 5.29.

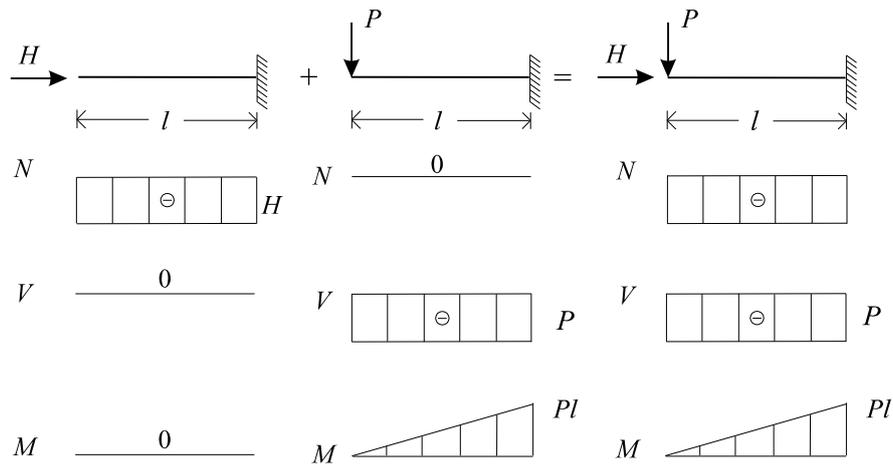


Figura 5.29

É importante notar, entretanto, que o princípio da superposição de efeitos não vale quando, na determinação dos esforços solicitantes, se leva em consideração a deformação da estrutura.

Esta mesma viga em balanço pode ser empregada para mostrar isso. Mesmo que se leve em conta a deformação da estrutura, na viga em que só atua H não há momentos fletores, que existem apenas na viga em que atua só P . O fato de não se ter momentos fletores na viga em que se tem apenas H mostra que o princípio da superposição de efeitos não mais se aplica, já que, quando se leva em conta a deformação da estrutura na determinação dos esforços solicitantes, na viga em que atuam H e P simultaneamente se tem momentos fletores devidos tanto a P como a H .

Exemplo 5.5

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga da Figura 5.30.

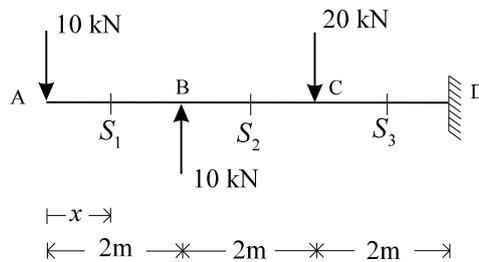


Figura 5.30

Como há forças aplicadas em B e em C, os esforços solicitantes nos trechos AB, BC e CD são dados por equações distintas, devendo-se então cortar a barra nas seções genéricas S_1 , S_2 e S_3 para determiná-los.

O corte da barra em S_1 , como se mostra na Figura 5.31(a), leva aos esforços solicitantes em AB:

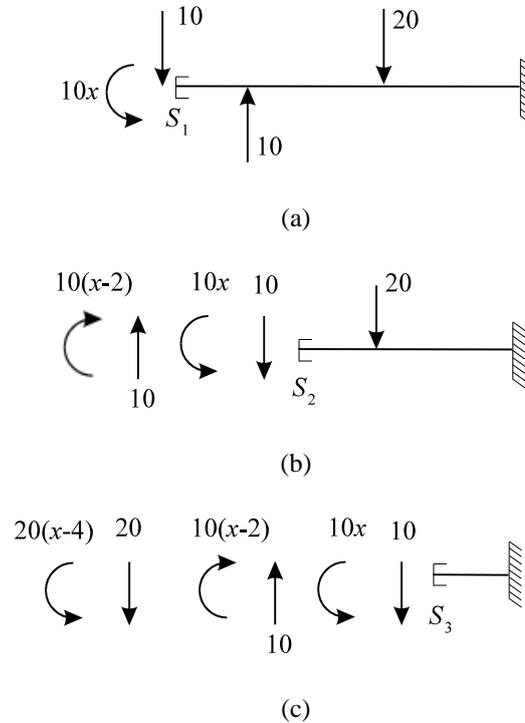


Figura 5.31

- trecho AB

$$\begin{aligned}
 V(x) &= -10, & 0 \leq x < 2 \\
 M(x) &= -10x, & 0 \leq x \leq 2 \\
 M(0) &= 0 \\
 M(2) &= -20
 \end{aligned}
 \tag{5.9}$$

Os esforços solicitantes em BC são determinados cortando-se a barra em S_2 , como se mostra na Figura 5.31(b):

- trecho BC

$$\begin{aligned}
 V(x) &= -10 + 10 = 0, & 2 < x < 4 \\
 M(x) &= -10x + 10(x - 2) = -20, & 2 \leq x \leq 4
 \end{aligned}
 \tag{5.10}$$

Cortando a barra em S_3 , obtêm-se os esforços solicitantes em CD, como se mostra na Figura 5.31(c):

- trecho CD

$$V(x) = -10 + 10 - 20 = -20, \quad 4 < x \leq 6$$

$$\begin{aligned}
 M(x) &= -10x + 10(x - 2) - 20(x - 4) = \\
 &= -20x + 60, \qquad \qquad \qquad 4 \leq x \leq 6 \qquad (5.11)
 \end{aligned}$$

$$M(4) = -20$$

$$M(6) = -60$$

Na Figura 5.32 apresentam-se os diagramas de esforços solicitantes desta viga.

Exemplo 5.6

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga em balanço da Figura 5.33.

No caso desta viga é muito fácil concluir que em suas seções transversais se tem como único esforço solicitante um momento fletor de intensidade M_0 tracionando suas fibras superiores.

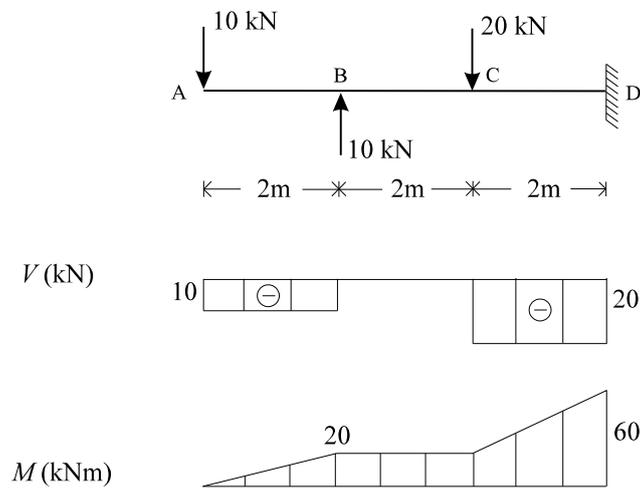


Figura 5.32

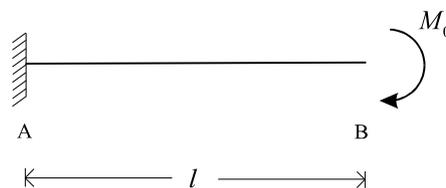


Figura 5.33

Chega-se a este resultado por meio do teorema fundamental, que, no caso desta viga tão simples, pode ser empregado mentalmente.

O diagrama de momentos fletores desta viga é apresentado na Figura 5.34.

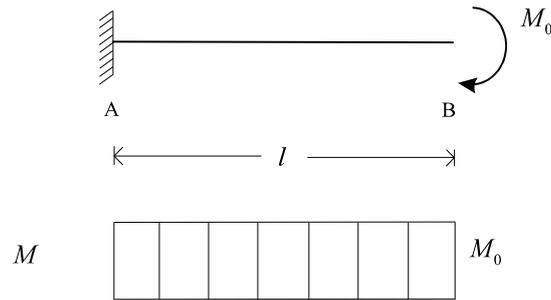


Figura 5.34

Nota 5.10

O carregamento externo ativo desta viga é constituído por um momento M_0 aplicado em sua extremidade livre.

Deve-se observar que, em situações como essa, não se tem de fato um momento M_0 aplicado na viga, mas sim um binário com momento M_0 .

Uma viga como a da Figura 5.35, em cuja extremidade atuam duas forças constituindo um binário com momento M_0 , pode ser esquematizada como na Figura 5.33.

Frisa-se mais uma vez: não se aplicam momentos em uma estrutura, mas sim forças que geram momentos.

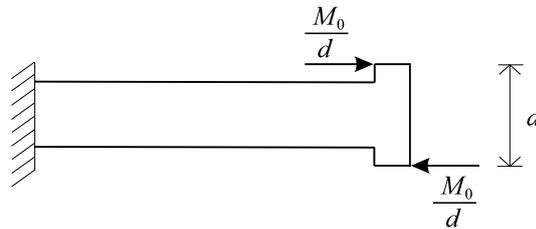


Figura 5.35

Exemplo 5.7

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga da Figura 5.36.

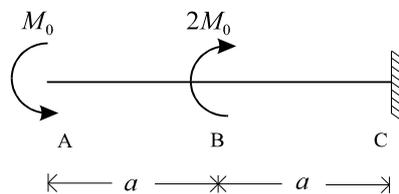


Figura 5.36

Também neste exemplo o diagrama dos únicos esforços solicitantes não nulos - os momentos fletores - pode ser obtido aplicando mentalmente o teorema fundamental. Este diagrama está apresentado na Figura 5.37.

Nota 5.11

Observações semelhantes às das Notas 5.3 e 5.5 podem ser feitas com relação à descontinuidade que se tem em B no diagrama de momentos fletores.

Ela decorre do fato de ter-se admitido a aplicação de um momento fletor concentrado em B, o que efetivamente não ocorre em uma estrutura real.

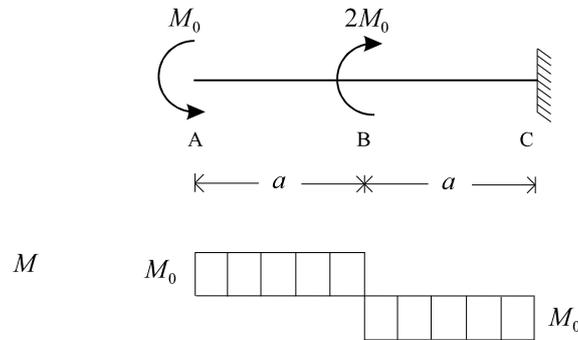


Figura 5.37

Não se define o momento fletor em B: imediatamente à sua esquerda o momento fletor é igual a $-M_0$ e imediatamente à sua direita, é igual a M_0 .

Tem-se, então, a seguinte regra geral:

Um momento concentrado aplicado em um ponto de uma barra leva a se ter neste ponto uma descontinuidade no diagrama de momentos fletores; esta descontinuidade tem módulo igual ao deste momento concentrado.

Exemplo 5.8

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga em balanço da Figura 5.38.

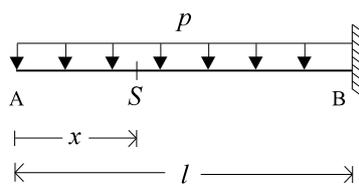
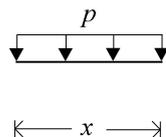


Figura 5.38

Para determinar os esforços solicitantes corta-se a viga em uma seção genérica S e reduzem-se nesta seção os esforços externos aplicados à sua esquerda, indicados na Figura 5.39(a).



(a)

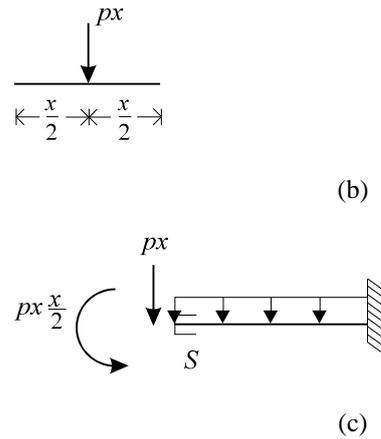


Figura 5.39

Esta redução fica muito facilitada se for feita a determinação da força mecanicamente equivalente a este carregamento, mostrada na Figura 5.39(b).

Sendo as forças das Figuras 5.39(a) e (b) mecanicamente equivalentes, suas reduções em S levam aos mesmos esforços. Como é muito mais fácil reduzir uma força concentrada que uma força distribuída, convém determinar os esforços solicitantes em S reduzindo nesta seção a força concentrada da Figura 5.39(b). Os esforços decorrentes desta redução estão mostrados na Figura 5.39(c), tendo-se então nesta viga os esforços solicitantes:

- $V(x) = -px$

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \\ V(l) &= -pl \end{aligned}$$

- $M(x) = -\frac{px^2}{2}$

$$\begin{aligned} M(0) &= 0 \\ M(l) &= -\frac{pl^2}{2} \end{aligned}$$

(5.12)

Os diagramas de esforços solicitantes da viga estão apresentados na Figura 5.40.

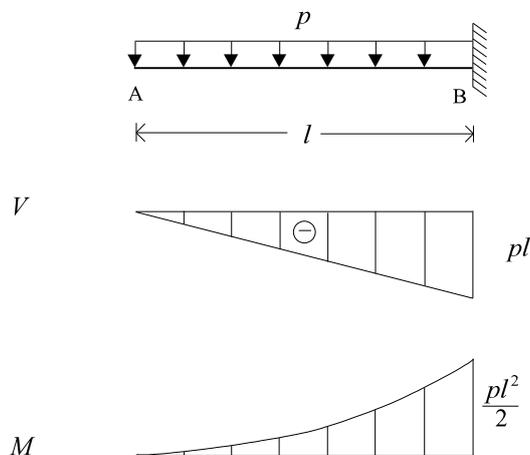


Figura 5.40

Nota 5.12

É extremamente importante salientar que só depois que se tiver cortado a barra é que se pode substituir o carregamento distribuído que será reduzido pela força concentrada mecanicamente equivalente a ele. Esta substituição não pode em hipótese alguma ser feita antes de cortar a barra, pois caso assim se procedesse se chegaria a outros esforços solicitantes.

Suponha que, antes de cortar a barra, se tivesse decidido substituir o carregamento distribuído que atua na viga pela força mecanicamente equivalente a ele, conforme se mostra na Figura 5.41.

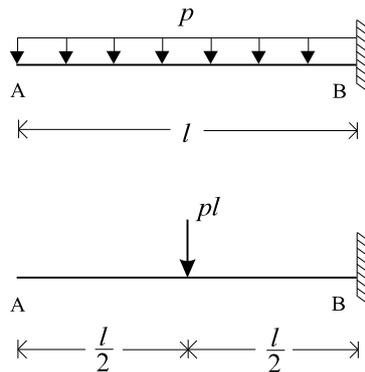


Figura 5.41

Vê-se imediatamente que a substituição da força distribuída pela força concentrada levou a uma viga completamente diferente da viga original, com esforços solicitantes totalmente distintos, comprovando-se então que não se pode fazer esta substituição antes de cortar a estrutura.

Exemplo 5.9

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga em balanço da Figura 5.42.

Os esforços solicitantes desta viga serão obtidos da mesma forma que no exemplo anterior, cortando-se a barra em uma seção genérica S e reduzindo-se nesta seção os esforços externos aplicados à direita do corte.

Para facilitar a resolução, os esforços distribuídos a serem reduzidos serão substituídos pela força concentrada mecanicamente equivalente a eles.

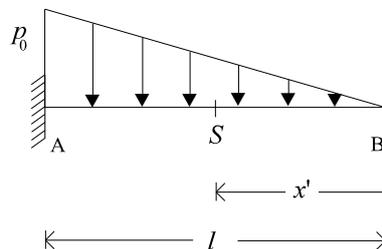


Figura 5.42

Na Figura 5.43 mostram-se os esforços externos aplicados à direita do corte, a força mecanicamente equivalente a eles e os esforços decorrentes da redução desta força em S .

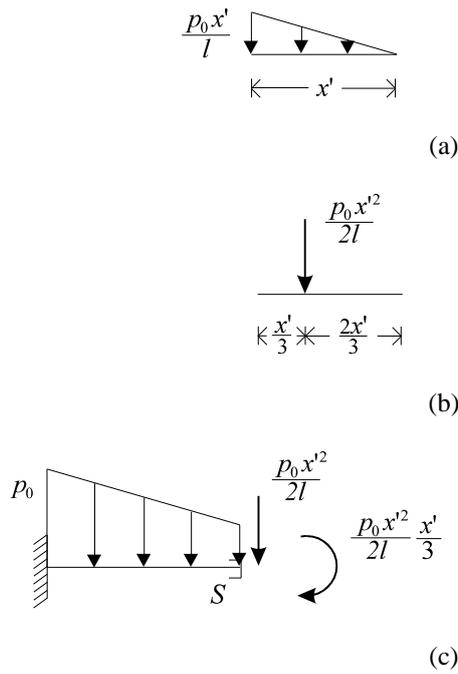


Figura 5.43

Os esforços solicitantes nesta viga são então

$$\begin{aligned}
 &\bullet V(x') = \frac{p_0 x'^2}{2l} \\
 &V(0) = 0 \\
 &V(l) = \frac{p_0 l}{2} \\
 &\bullet M(x') = -\frac{p_0 x'^3}{6l} \\
 &M(0) = 0 \\
 &M(l) = -\frac{p_0 l^2}{6}
 \end{aligned}
 \tag{5.13}$$

Os diagramas de esforços solicitantes estão apresentados na Figura 5.44.

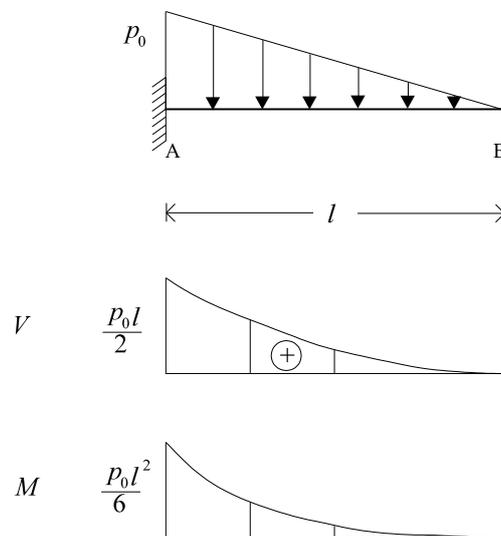


Figura 5.44

5.2.3 Equações diferenciais de equilíbrio

Vai-se agora interromper brevemente esta apresentação de exemplos de traçado de diagramas de esforços solicitantes de figuras planas para introduzir as equações diferenciais de equilíbrio, que serão empregadas na obtenção dos esforços solicitantes de algumas estruturas particulares.

Considere-se uma viga genérica como a da Figura 5.45, em que atua um carregamento distribuído $p = p(x)$.

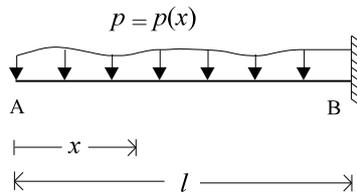


Figura 5.45

Tem-se nesta viga forças cortantes $V = V(x)$ e momentos fletores $M = M(x)$.

As equações diferenciais de equilíbrio estabelecem relações entre o carregamento distribuído $p(x)$, a força cortante $V(x)$ e o momento fletor $M(x)$.

Para obtê-las, retira-se da barra da Figura 5.45 um trecho de comprimento infinitesimal, cortando-a segundo duas seções transversais muito próximas, de abscissas x e $x + dx$, como se mostra na Figura 5.46.

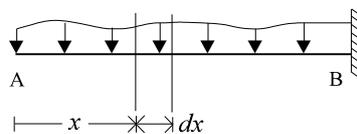


Figura 5.46

Na face esquerda deste trecho de barra, cuja vista lateral se mostra na Figura 5.47, atuam a força cortante $V(x)$ e o momento fletor $M(x)$; na face da direita atuam a força cortante $V(x + dx) = V(x) + dV(x)$ e o momento fletor $M(x + dx) = M(x) + dM(x)$. Por se tratar de um trecho de barra de comprimento infinitesimal, pode-se admitir que nele a força distribuída seja constante, igual a $p(x)$.

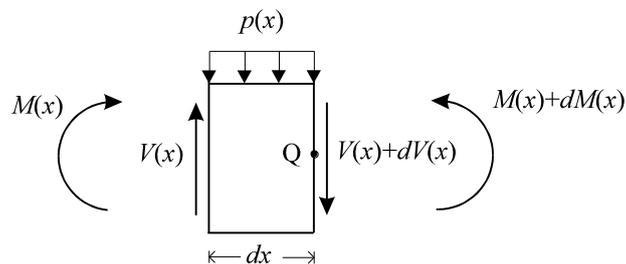


Figura 5.47

Este trecho de barra, tendo sido retirado de uma viga em equilíbrio, encontra-se também em equilíbrio sob a ação dos esforços que nele atuam: os esforços solicitantes na face da esquerda, representando a ação que o trecho da viga à esquerda desta seção tem sobre este elemento infinitesimal, os esforços solicitantes na face da direita, representando a ação que o trecho da viga à direita desta seção tem sobre este elemento, e os esforços distribuídos aplicados em sua face superior.

Os esforços aplicados neste trecho infinitesimal da barra satisfazem portanto a equação de equilíbrio

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V(x) - p(x)dx - [V(x) + dV(x)] = 0, \quad (5.14)$$

da qual decorre

$$dV(x) = -p(x)dx \quad (5.15)$$

logo

$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x) \quad (5.16)$$

Esta equação diferencial, que traduz o equilíbrio das forças verticais que atuam nos elementos infinitesimais da barra, mostra que a derivada da força cortante em relação a x é igual a menos o carregamento distribuído que atua na viga.

Os esforços que atuam no trecho infinitesimal da barra também satisfazem a equação de equilíbrio relativa a momentos. Sendo Q um ponto qualquer da face da direita do elemento, tem-se:

$$\sum M_Q = 0 \Rightarrow -M(x) - V(x)dx + \frac{p(x)dx^2}{2} + [M(x) + dM(x)] = 0, \quad (5.17)$$

logo

$$dM(x) = V(x)dx - \frac{p(x)dx^2}{2}. \quad (5.18)$$

Nesta expressão, o termo $-\frac{p(x)dx^2}{2}$ é um infinitésimo de ordem superior ao termo $V(x)dx$, podendo ser desprezado. Tem-se então

$$dM(x) = V(x)dx, \quad (5.19)$$

de onde se obtém

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x). \quad (5.20)$$

Esta segunda equação diferencial, que traduz o equilíbrio dos momentos dos esforços que atuam nos elementos infinitesimais da barra, mostra que a derivada do momento fletor em relação a x é igual à força cortante.

As duas equações diferenciais

$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x) \quad (5.21)$$

e

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

recebem o nome de equações diferenciais de equilíbrio, por traduzirem o equilíbrio dos elementos infinitesimais de uma barra.

Derivando a segunda destas equações, obtém-se uma equação diferencial de segunda ordem que relaciona $M(x)$ e $p(x)$:

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = \frac{dV(x)}{dx} = -p(x). \quad (5.22)$$

Esta expressão mostra que a derivada segunda do momento fletor em relação a x é igual a menos o carregamento distribuído que atua na viga.

As expressões das forças cortantes e dos momentos fletores em uma viga, até aqui determinadas por intermédio do teorema fundamental, podem ser alternativamente obtidas através da integração da equação diferencial de segunda ordem (5.22).

De fato, integrando uma vez a equação diferencial

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -p(x), \quad (5.23)$$

obtém-se a expressão da força cortante:

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \int -p(x)dx + C_1 \quad (5.24)$$

Integrando mais uma vez, chega-se a

$$M(x) = \int \left(\int -p(x)dx + C_1 \right) dx + C_2 = \int \left(\int -p(x)dx \right) dx + C_1 x + C_2. \quad (5.25)$$

As expressões (5.24) e (5.25) fornecem a força cortante $V(x)$ e o momento fletor $M(x)$ na viga, obtidos por integração da equação diferencial de equilíbrio de segunda ordem.

As constantes de integração C_1 e C_2 que aparecem nas expressões de $V(x)$ e $M(x)$ são determinadas através das condições de contorno, ligadas às condições de vinculação da viga, como se mostrará nos exemplos.

Antes de apresentá-los, deve-se salientar que as equações diferenciais de equilíbrio fornecem relações algébricas entre $p(x)$, $V(x)$ e $M(x)$, isto é, relações válidas em módulo e sinal. Os sinais de $V(x)$ e $M(x)$ nestas equações são os da convenção de sinais introduzida no início deste capítulo.

Quanto ao sinal do carregamento distribuído, a convenção empregada é a da Figura 5.48: o carregamento distribuído é considerado positivo quando orientado para baixo e negativo quando orientado para cima.

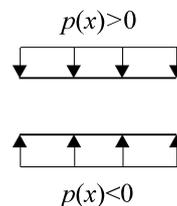


Figura 5.48

Observa-se que na Figura 5.47, da qual foram obtidas as equações diferenciais de equilíbrio, todos os esforços têm os sentidos considerados positivos; por esta razão, os sinais de $p(x)$, $V(x)$ e $M(x)$ nas equações diferenciais de equilíbrio são os das convenções de sinais da Tabela 5.1 e da Figura 5.48.

Exemplo 5.10

Utilizando as equações diferenciais de equilíbrio, determinar os esforços solicitantes da viga em balanço da Figura 5.49.

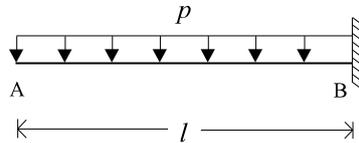


Figura 5.49

Esta é a viga já examinada no Exemplo 5.8, em que os esforços solicitantes foram obtidos por meio do teorema fundamental.

Eles serão agora determinados por intermédio da integração da equação diferencial de equilíbrio de segunda ordem.

Tem-se neste caso

$$p(x) = p \quad (5.26)$$

logo

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -p. \quad (5.27)$$

Integrando esta equação, obtém-se

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) = \int -p \, dx + C_1 = -px + C_1 \quad (5.28)$$

Integrando mais uma vez, chega-se a

$$M(x) = \int (-px + C_1) \, dx + C_2 = -\frac{px^2}{2} + C_1x + C_2. \quad (5.29)$$

Como já se comentou, as constantes de integração C_1 e C_2 são determinadas pelas condições de contorno, decorrentes da vinculação da estrutura.

Em casos como o desta viga, em que se tem uma extremidade livre, sempre serão conhecidos os esforços solicitantes que atuam nesta extremidade não vinculada.

No caso particular deste exemplo, tem-se na extremidade livre força cortante e momento fletor nulos, logo as condições de contorno são neste caso:

- Condições de contorno

$$V(0) = 0 \quad (5.30)$$

$$M(0) = 0$$

A força cortante dada por (5.28) e o momento fletor dado por (5.29) devem portanto se anular para $x = 0$, condições que permitem obter C_1 e C_2 :

$$V(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \tag{5.31}$$

$$M(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

As expressões analíticas dos esforços solicitantes desta viga são então

$$V(x) = -px$$
$$M(x) = -\frac{px^2}{2} \tag{5.32}$$

Comparando estas expressões com as equações (5.12), verifica-se que foram obtidos exatamente a mesma força cortante $V(x)$ e o mesmo momento fletor $M(x)$ determinados empregando o teorema do corte.

Nota 5.13

Considerem-se as equações diferenciais de equilíbrio

$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)$$

e (5.33)

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x).$$

De forma imediata, destas equações decorre a seguinte propriedade:

Propriedade 5.1

Se o carregamento $p(x)$ que atua na viga for dado por um polinômio de grau n , então a força cortante $V(x)$ será dada por um polinômio de grau $n + 1$, e o momento fletor, por um polinômio de grau $n + 2$.

Em outras palavras, sendo $p(x)$ dado por um polinômio, a força cortante $V(x)$ será dada por outro polinômio um grau maior e o momento fletor, por um polinômio dois graus maior. Assim, se $p(x)$ for linear, $V(x)$ será de segundo grau e $M(x)$, de terceiro grau.

No caso do exemplo que se acaba de examinar verifica-se a validade desta propriedade. Tem-se

$$p(x) = p$$

$$V(x) = -px \tag{5.34}$$

$$M(x) = -\frac{px^2}{2},$$

observando-se então que o carregamento distribuído tem por expressão um polinômio de grau zero, a força cortante, um polinômio de primeiro grau e o momento fletor, um polinômio de segundo grau.

Os diagramas de esforços solicitantes desta viga estão rerepresentados na Figura 5.50.

Observa-se que, sendo o carregamento distribuído uniforme, de grau zero, a força cortante é linear e o momento fletor, dado por uma parábola.

Para traçar o diagrama de forças cortantes basta determinar seus valores em A e B e uní-los por um segmento de reta. Já para traçar o diagrama de momentos fletores, além de determinar seus valores em A e B, deve-se conhecer o lado da concavidade do diagrama: se para cima, ou se para baixo.

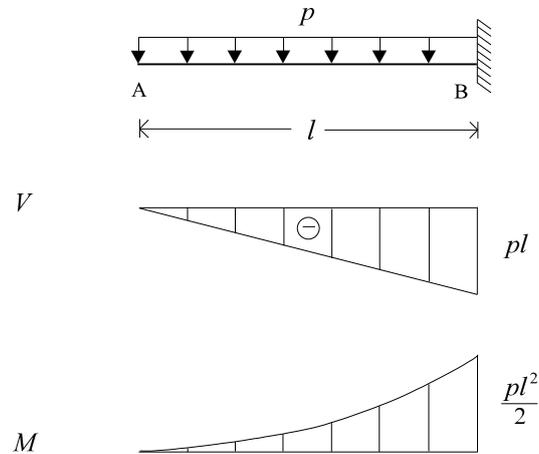


Figura 5.50

A obtenção da concavidade do gráfico de uma função costuma ser feita por meio da derivada segunda da função. Sabe-se, do cálculo diferencial, que o gráfico de uma função $y(x)$ tem concavidade para cima (no sentido de y) nos trechos em que a derivada segunda $y''(x) = \frac{d^2y(x)}{dx^2}$ é positiva e concavidade para baixo (no sentido contrário ao de y) nos trechos em que a derivada segunda $y''(x) = \frac{d^2y(x)}{dx^2}$ é negativa; os pontos em que se tem $y''(x) = \frac{d^2y(x)}{dx^2} = 0$ são pontos de inflexão. Estes resultados estão apresentados na Figura 5.51.

Antes de empregar estes resultados no traçado dos diagramas de momentos fletores, deve-se recordar que, no caso destes diagramas, o eixo das ordenadas é orientado para baixo, como se mostra na Figura 5.52. Nos trechos em que se tem $M'' < 0$ a concavidade é portanto para cima e nos em que se tem $M'' > 0$ ela é para baixo.

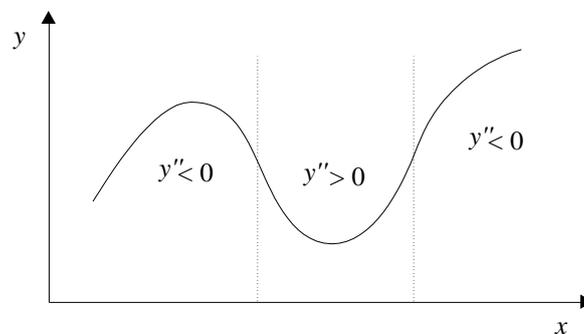


Figura 5.51

Voltando agora à viga em exame, observa-se que se tem

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -p(x) < 0, \quad (5.35)$$

já que $p(x) = p$ é positivo.

Do que se acaba de comentar, conclui-se que a concavidade do diagrama de momentos fletores é então para cima, como indicado na Figura 5.50.

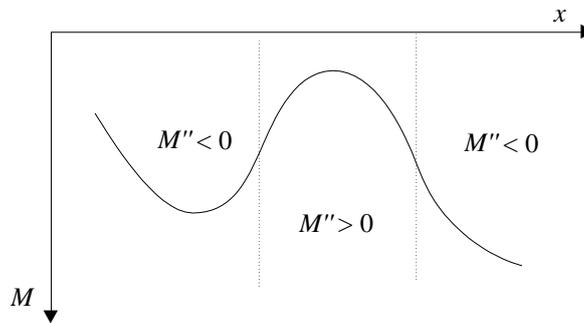


Figura 5.52

Desta análise que se acaba de fazer decorre uma regra muito simples para determinar a concavidade do diagrama de momentos fletores de uma viga, conhecida como a “regra do barbante”.

A “regra do barbante” é a seguinte: para obter a concavidade do diagrama de momentos fletores de um trecho de uma barra procede-se da seguinte maneira:

- 1) Determinam-se os valores dos momentos fletores nas extremidades deste trecho, indicando-os no diagrama de momentos fletores.

No caso da viga em análise, estes valores são

$$M(0) = 0 \quad (5.36)$$

$$M(l) = -\frac{pl^2}{2}.$$

- 2) Imagina-se que um barbante fictício seja estendido entre estes dois momentos fletores nas extremidades do trecho já indicados no diagrama, como se mostra na Figura 5.53(a) para a viga em balanço em estudo.
- 3) Supõe-se aplicado no barbante o carregamento distribuído que atua neste trecho de viga (Figura 5.53(b)).
- 4) Sob a ação do carregamento distribuído o barbante se encurva (Figura 5.53(c)).
- 5) A concavidade do diagrama de momentos fletores é a mesma apresentada pelo barbante fictício curvado pela carga distribuída que o solicita.

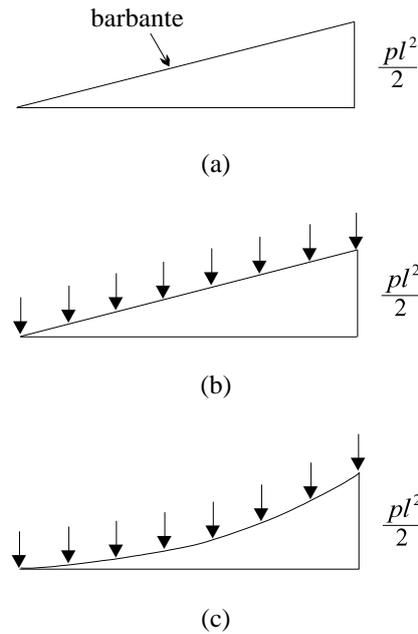


Figura 5.53

□

A demonstração desta regra é muito simples: em um trecho de barra em que $p(x)$ é orientado para baixo, ou seja, positivo, tem-se $\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -p(x) < 0$, logo neste trecho de barra o diagrama de momentos fletores tem concavidade para cima. Ora, um barbante estendido entre dois pontos e solicitado por um carregamento orientado para baixo se encurva com concavidade para cima, demonstrando-se assim a regra. Para carregamentos distribuídos negativos tem-se uma situação análoga, mas agora com a concavidade para baixo.

Esta regra é extremamente útil, e pode ser utilizada não apenas para barras horizontais, mas também para barras em qualquer outra posição; a única restrição que se impõe é que estas barras sejam retas.

Dada a utilidade da “regra do barbante” optou-se por apresentá-la neste texto. Deve-se lembrar, entretanto, que uma regra só deve ser aplicada depois que se souber de onde ela decorre. Solicita-se portanto ao leitor que só empregue a “regra do barbante” depois de compreender claramente porque ela funciona.

Exemplo 5.11

Utilizando as equações diferenciais de equilíbrio, determinar os esforços solicitantes da viga em balanço da Figura 5.54.

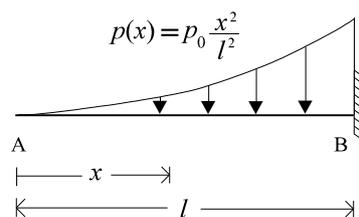


Figura 5.54

Tem-se

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -p(x) = -p_0 \frac{x^2}{l^2}, \quad (5.37)$$

logo

$$V(x) = \int -p_0 \frac{x^2}{l^2} dx + C_1 = -\frac{p_0 x^3}{3l^2} + C_1 \quad (5.38)$$

e

$$M(x) = \int -\frac{p_0 x^3}{3l^2} dx + C_1 x + C_2 = -\frac{p_0 x^4}{12l^2} + C_1 x + C_2 \quad (5.39)$$

As condições de contorno são

$$V(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad (5.40)$$

e

$$M(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

portanto

$$V(x) = -\frac{p_0 x^3}{3l^2}, \quad \therefore \begin{cases} V(0) = 0 \\ V(l) = -\frac{p_0 l}{3} \end{cases} \quad (5.41)$$

$$M(x) = -\frac{p_0 x^4}{12l^2}, \quad \therefore \begin{cases} M(0) = 0 \\ M(l) = -\frac{p_0 l^2}{12} \end{cases}$$

Observa-se que, sendo $p(x)$ um polinômio de segundo grau, $V(x)$ e $M(x)$ são respectivamente polinômios de terceiro e quarto grau, como se podia prever.

Os diagramas de esforços solicitantes desta viga estão desenhados na Figura 5.55.

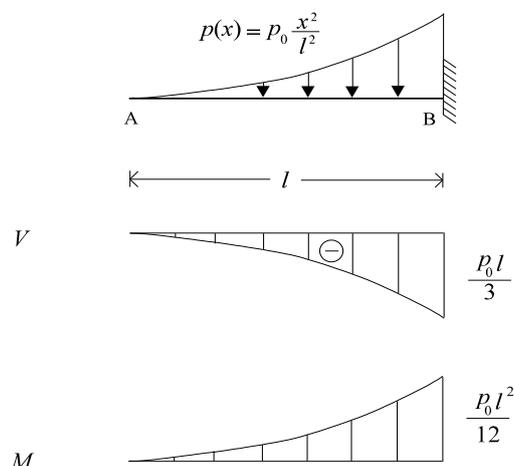


Figura 5.55

Nota 5.14

A concavidade do diagrama de momentos fletores pode ser determinada pela “regra do barbante”. Não existe, entretanto, regra semelhante que forneça a concavidade do diagrama de forças cortantes, que deve ser então determinada pela derivada segunda de $V(x)$:

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -\frac{2p_0x}{l^2}. \quad (5.42)$$

Para $0 < x \leq l$ tem-se $\frac{d^2V(x)}{dx^2} < 0$, e a concavidade do diagrama de forças cortantes é então para baixo.

A concavidade do diagrama de forças cortantes também pode ser obtida por uma análise da viga do ponto de vista físico.

Considerem-se dois pares de seções transversais muito próximas da viga, como indicado na Figura 5.56.

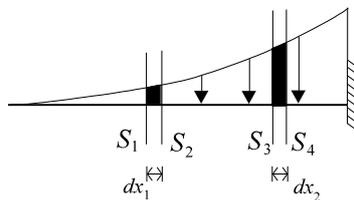


Figura 5.56

Quando se passa da seção S_1 para a seção S_2 a força cortante aumenta em módulo; este acréscimo é igual à resultante do carregamento distribuído que atua no trecho dx_1 , dada pela área escura no diagrama. Da mesma forma, quando se passa da seção S_3 para a seção S_4 a força cortante também aumenta em módulo, sendo o acréscimo igual à outra área escura no diagrama.

Fica claro destas considerações que, quanto mais próximo se estiver do engastamento, mais acentuado será o crescimento da força cortante - em módulo -, o que justifica a concavidade para baixo do diagrama de forças cortantes.

Deve-se notar que uma análise física análoga a esta pode ser feita relativamente à concavidade do diagrama de momentos fletores.

Recomenda-se ao leitor que, ao resolver um problema estrutural, procure usar sua intuição física. Ouça o que sua intuição tem a dizer com relação ao comportamento da estrutura em estudo, e procure compreender qualitativamente como ela funciona.

Após ter examinado o problema de forma intuitiva, qualitativa e física, depois de ter procurado entender como funciona a estrutura, passe então a sua resolução quantitativa.

Terminando-a, compare as conclusões obtidas por via matemática com as previsões a que havia chegado por meio da análise qualitativa.

É muito provável que você venha então a se surpreender com a descoberta de que possui uma intuição estrutural bem mais desenvolvida do que a que supunha ter.

Nota 5.15

Foram vistas duas formas de obter os esforços solicitantes de uma barra: pelo teorema fundamental e pela integração das equações diferenciais de equilíbrio.

A determinação pelo teorema fundamental é muito mais física que pela integração das equações diferenciais de equilíbrio, que é matemática e muito abstrata.

Por esta razão, sugere-se ao leitor que só em último caso recorra à integração das equações diferenciais de equilíbrio ao determinar os esforços solicitantes de uma estrutura. Além de este procedimento nada ter de físico, é bastante sujeito a erros, por envolver integrações de equações diferenciais, determinação de constantes de integração, etc..

Em casos como o do Exemplo 5.10, em que os esforços solicitantes podem ser facilmente obtidos pelo teorema fundamental, já que o carregamento distribuído que atua na viga é simples, deve-se sempre utilizar o teorema fundamental na determinação destes esforços.

Já no caso do Exemplo 5.11, em que o carregamento distribuído que atua na viga é complexo, a resolução pelo teorema fundamental torna-se trabalhosa, pela necessidade de determinar a força estaticamente equivalente a um carregamento distribuído parabólico. É em casos como este que se deve obter os esforços solicitantes integrando as equações diferenciais de equilíbrio.

Mesmo nestes casos, entretanto, seria também possível determinar os esforços solicitantes por meio do teorema fundamental.

Na Figura 5.57 reapresenta-se a viga do Exemplo 5.11. Estão indicados agora dois eixos de abcissas: o eixo x , que caracteriza a seção transversal S cujos esforços solicitantes se deseja obter, e o eixo z , utilizado na definição do carregamento distribuído que atua na viga.

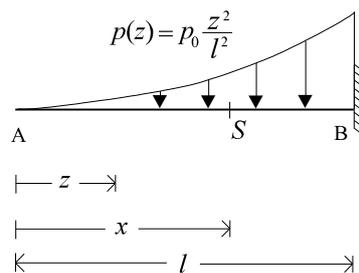


Figura 5.57

Os esforços solicitantes em S podem ser obtidos reduzindo nesta seção o carregamento aplicado à sua esquerda, mostrado na Figura 5.58(a). Em um elemento dz deste trecho da barra atuam os esforços indicados na Figura 5.58(b), cuja redução em S leva à força cortante e ao momento fletor da Figura 5.58(c).

Fica claro da Figura 5.58 que os esforços solicitantes em S se obtêm por meio das expressões

$$V(x) = \int_0^x -p(z)dz = \int_0^x -p_0 \frac{z^2}{l^2} dz = -\frac{p_0 x^3}{3l^2} \quad (5.43)$$

$$M(x) = \int_0^x -p(z)(x-z)dz = \int_0^x -p_0 \frac{z^2}{l^2} (x-z)dz = -\frac{p_0 x^4}{12l^2}$$

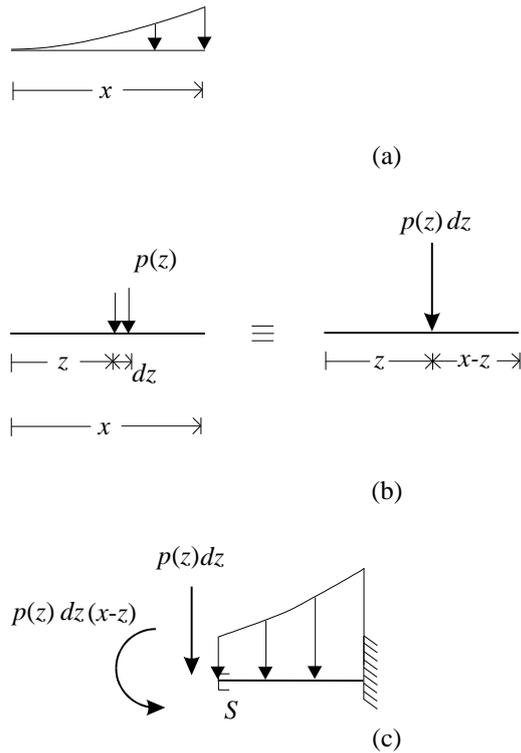


Figura 5.58

Comparando estas expressões com as (5.41) observa-se que se chegou aos mesmos resultados que haviam sido obtidos por meio da integração das equações diferenciais de equilíbrio.

Como já se comentou, é em casos como o desta viga, submetida a um carregamento distribuído complexo, que há interesse em se recorrer às equações diferenciais de equilíbrio para determinar os esforços solicitantes, visto que a resolução do problema por meio do teorema fundamental também é trabalhosa e também exige que se façam algumas integrações.

Volta-se agora aos exemplos de traçado de diagrama de esforços solicitantes de estruturas planas.

5.2.4 Continuando os exemplos

Exemplo 5.12

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga em balanço da Figura 5.59.

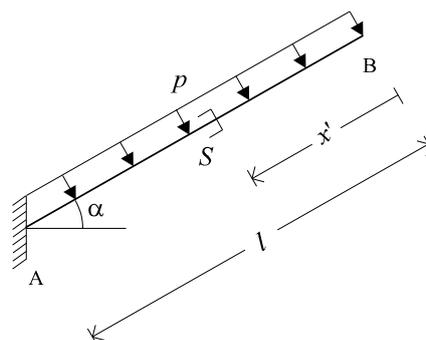


Figura 5.59

Os esforços solicitantes podem ser obtidos pelo teorema fundamental. Na Figura 5.60(a) mostram-se os esforços externos aplicados à direita da seção S , na Figura 5.60(b), a força mecanicamente equivalente a esse carregamento e na Figura 5.60(c), os esforços decorrentes da redução desta força em S .

Os esforços solicitantes desta viga são então

$$V(x') = px' \tag{5.44}$$

$$M(x) = -\frac{px'^2}{2}.$$

Os diagramas destes esforços estão na Figura 5.61.

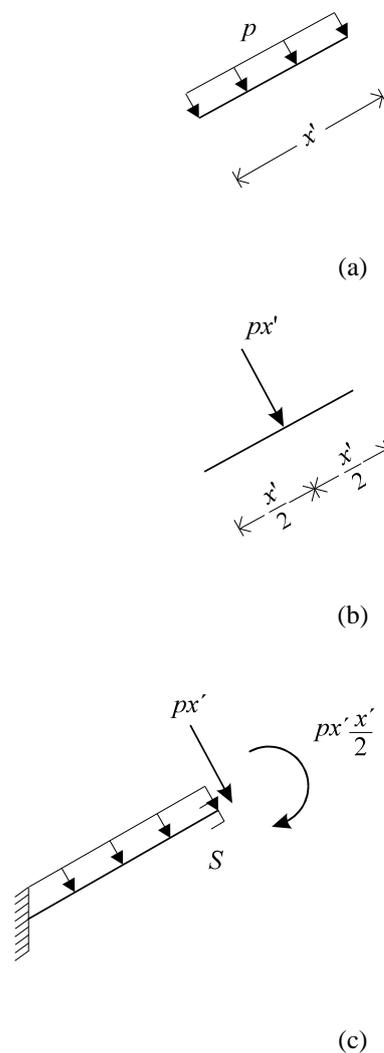


Figura 5.60

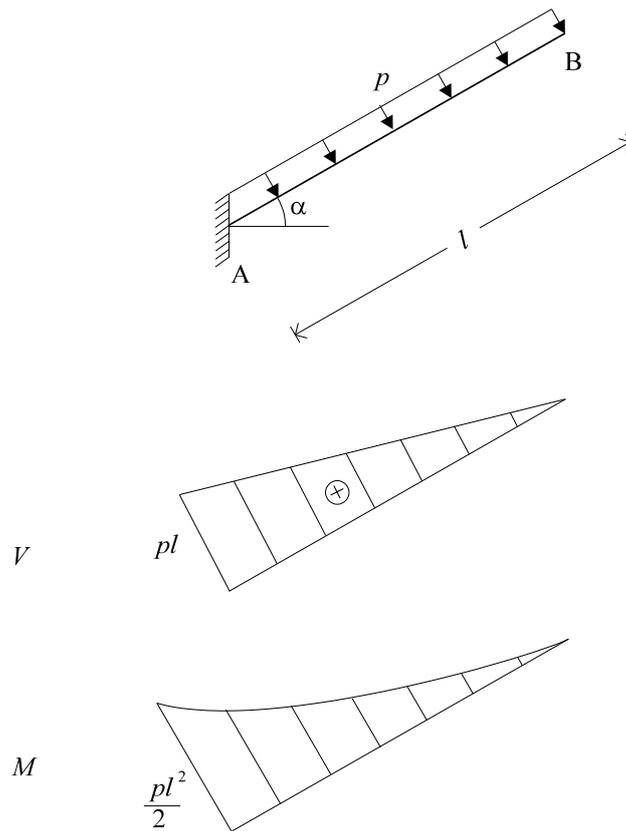


Figura 5.61

Nota 5.16

Nos diagramas de esforços solicitantes, os valores dos esforços que atuam em uma determinada seção transversal são sempre indicados sobre a perpendicular ao eixo da barra que passa por essa seção. Por esta razão, como o eixo da barra deste exemplo é inclinado, os diagramas de esforços solicitantes também ficam inclinados, já que são desenhados perpendicularmente a um eixo inclinado.

Nota 5.17

Comparando esta viga com a do Exemplo 5.8 nota-se que, apesar de uma ser horizontal e a outra inclinada, elas são intrinsicamente muito semelhantes: ambas são vigas em balanço solicitadas por um carregamento distribuído uniforme perpendicular a seu eixo. Por esta razão, os diagramas de esforços solicitantes destas duas vigas também são muito semelhantes.

O que influi nos esforços solicitantes é a posição do carregamento em relação à viga, não a posição da viga em relação a um dado referencial.

É interessante mencionar que um carregamento como o da viga deste exemplo é o devido ao vento: a pressão (ou sucção) do vento sobre um telhado ou uma parede é normal à superfície em que atua.

Exemplo 5.13

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga em balanço da Figura 5.62. Esta é a viga do exemplo anterior, mas agora solicitada por um carregamento distribuído vertical. O peso próprio da viga é um carregamento deste tipo.

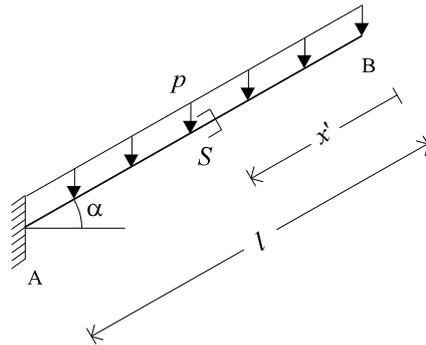


Figura 5.62

Antes de aplicar o teorema fundamental para determinar os esforços solicitantes de uma viga, procure sempre examiná-la qualitativamente, para ter uma primeira idéia de como devem ser seus esforços solicitantes.

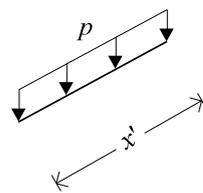
Posteriormente, após ter utilizado o teorema fundamental, confira os esforços solicitantes encontrados, comparando-os com os previstos nesta análise preliminar.

É o que se fará neste exemplo.

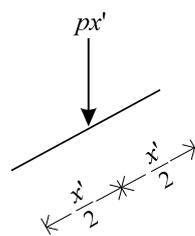
Observando a viga, nota-se que sendo o carregamento distribuído oblíquo em relação ao eixo da barra, pode ser decomposto em uma componente normal ao eixo, que produzirá forças cortantes e momentos fletores, e em uma componente na direção do eixo da barra, que produzirá forças normais. Nesta viga, portanto, além de forças cortantes e momentos fletores, haverá também forças normais.

Para determinar estes esforços utiliza-se o teorema fundamental. Na Figura 5.63(a) indicam-se os esforços externos aplicados no trecho de barra à direita da seção de corte S ; na Figura 5.63(b) mostra-se a força mecanicamente equivalente a esse carregamento e na Figura 5.63(c), os esforços decorrentes da redução dessa força em S .

Nota-se que a força px' indicada na Figura 5.63(c) é oblíqua em relação ao eixo da barra, não sendo portanto nem a força cortante nem a força normal. A força cortante em S é a componente de px' normal ao eixo da barra e a força normal em S é a componente de px' na direção do eixo da barra, mostradas na Figura 5.63(d).



(a)



(b)

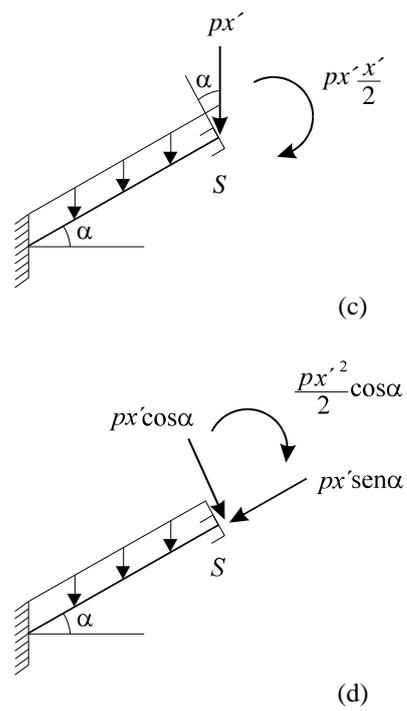


Figura 5.63

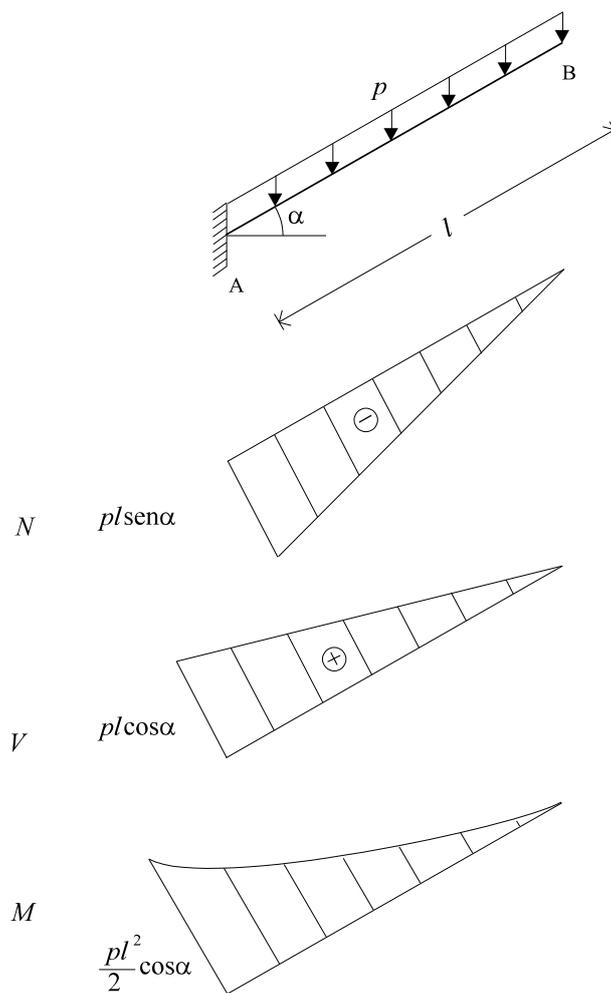


Figura 5.64

Os esforços solicitantes em S são portanto

$$\begin{aligned} N(x') &= -px' \operatorname{sen} \alpha \\ V(x') &= px' \operatorname{cos} \alpha \\ M(x') &= -\frac{px'^2}{2} \operatorname{cos} \alpha. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Os correspondentes diagramas de esforços solicitantes estão traçados na Figura 5.64.

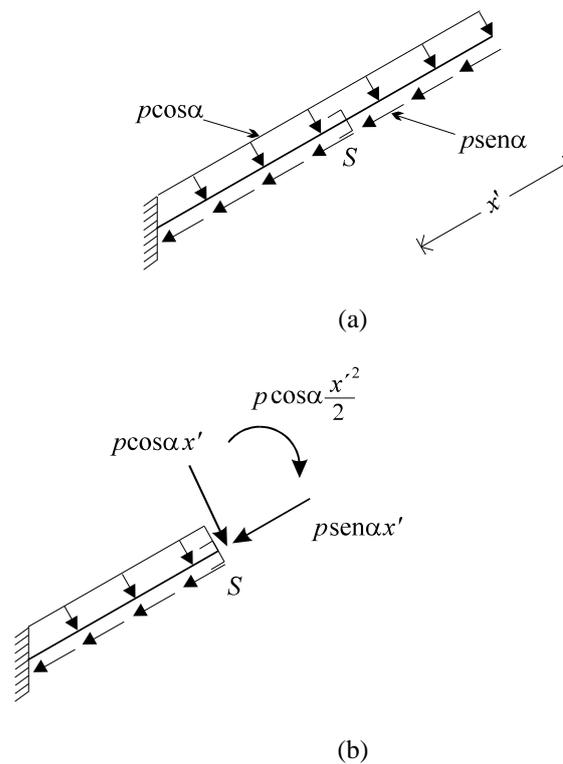


Figura 5.65

Nota 5.18

Alternativamente, pode-se determinar os esforços solicitantes desta viga decompondo inicialmente o carregamento distribuído em sua componente normal ao eixo da barra e em sua componente na direção do eixo da barra, aplicando em seguida o teorema fundamental.

Na Figura 5.65(a) mostram-se as componentes do carregamento distribuído: a componente $p \operatorname{cos} \alpha$ normal ao eixo da barra e a componente $p \operatorname{sen} \alpha$ na direção do eixo da barra. A redução em S dos esforços externos aplicados à sua direita já leva diretamente aos esforços solicitantes, como se mostra na Figura 5.65(b).

Estes esforços solicitantes, é claro, são os mesmos determinados anteriormente.

Exemplo 5.14

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga da Figura 5.66.

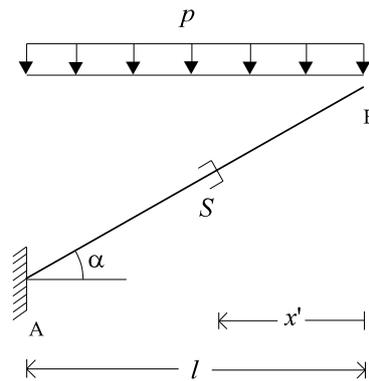


Figura 5.66

Esta viga é como a do exemplo anterior: uma viga inclinada em balanço, solicitada por uma força uniformemente distribuída vertical.

A diferença entre estas duas vigas reside na forma de apresentar o carregamento distribuído: no Exemplo 5.13 dá-se a força distribuída por unidade de comprimento da viga; neste exemplo, ela é dada por unidade de comprimento da projeção horizontal da viga.

Uma situação em que se costuma representar uma viga como neste exemplo é a das escadas, cuja carga distribuída normalmente é dada por unidade de comprimento da projeção horizontal da escada. Isto, porque tanto o peso das pessoas como o do revestimento dos degraus horizontais são conhecidos por unidade de área da projeção horizontal da escada.

Nestes casos também se costuma considerar como comprimento da viga o da sua projeção horizontal.

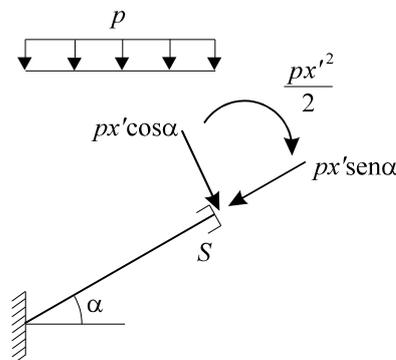


Figura 5.67

É claro que se os esquemas dos exemplos 5.13 e 5.14 forem utilizados para representar uma mesma viga, os valores das cargas distribuídas nos dois esquemas serão distintos, maior no do Exemplo 5.14 que no do Exemplo 5.13. Se se chamar de p_1 a carga distribuída do esquema do Exemplo 5.13 e de p_2 a do esquema deste exemplo, ter-se-á a seguinte relação entre elas:

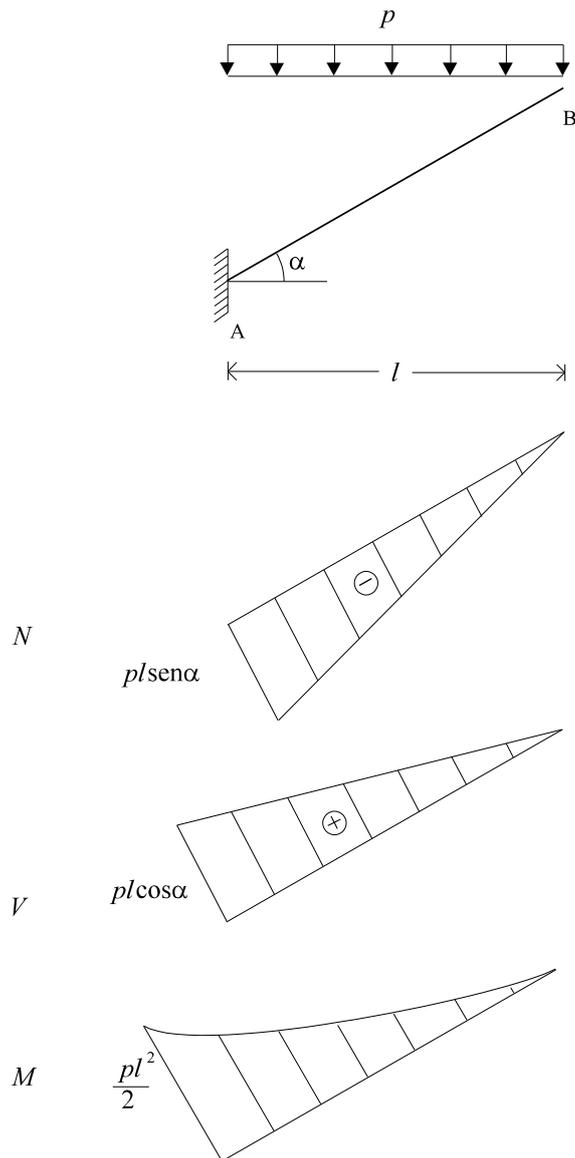


Figura 5.68

$$p_2 = \frac{p_1}{\cos \alpha} \quad (5.46)$$

A determinação dos esforços solicitantes na seção S desta viga é feita por intermédio do teorema fundamental, reduzindo nesta seção os esforços externos aplicados à sua direita, obtendo-se os esforços solicitantes indicados na Figura 5.67. Observa-se que nesta figura a força vertical decorrente da redução do carregamento distribuído já foi decomposta na força cortante e na força normal.

Tem-se então em S :

$$\begin{aligned} N(x') &= -px' \operatorname{sen} \alpha \\ V(x') &= px' \cos \alpha \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$M(x') = -\frac{px'^2}{2}.$$

Os diagramas correspondentes são os da Figura 5.68.

Exemplo 5.15

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da estrutura da Figura 5.69.

Trata-se de uma barra curva, cujo eixo é um segmento de uma circunferência de raio r .

O fato desta barra ser curva em nada muda a forma de determinar os esforços solicitantes, que continuarão a ser obtidos por meio do teorema fundamental.

Nesta determinação se alterará apenas o sistema de coordenadas utilizado para caracterizar a seção genérica S em que se corta a estrutura. Por se tratar de uma barra de eixo curvo, a solução do problema ficará facilitada se se empregar um sistema coordenadas polares em lugar de um sistema de coordenadas cartesianas para identificar a seção do corte.

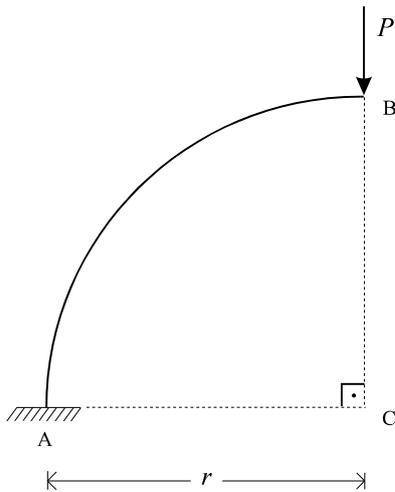


Figura 5.69

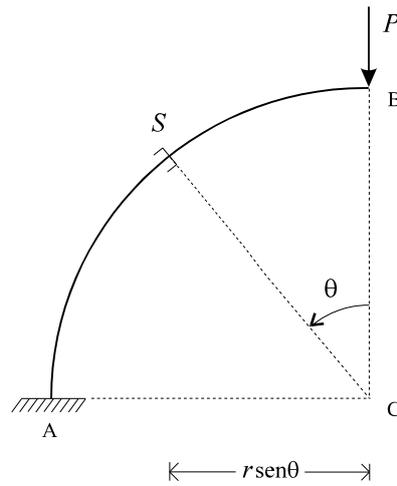
Na Figura 5.70(a) mostra-se a seção genérica S da barra em que se fará o corte; na Figura 5.70(b) mostra-se o trecho da barra à direita do corte e na Figura 5.70(c), os esforços decorrentes da redução em S desta única força aplicada à direita do corte.

A força P da Figura 5.70(c) é oblíqua à seção S , devendo então ser decomposta em sua componente normal e em sua componente tangencial a esta seção, como mostrado na Figura 5.70(d).

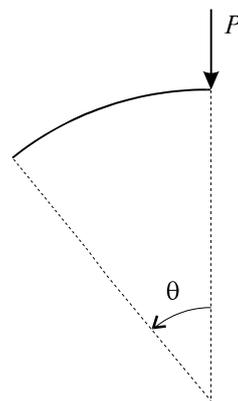
Os esforços solicitantes desta barra são então

$$\begin{aligned} N(\theta) &= -P \operatorname{sen} \theta \\ V(\theta) &= P \cos \theta \\ M(\theta) &= -Pr \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \tag{5.48}$$

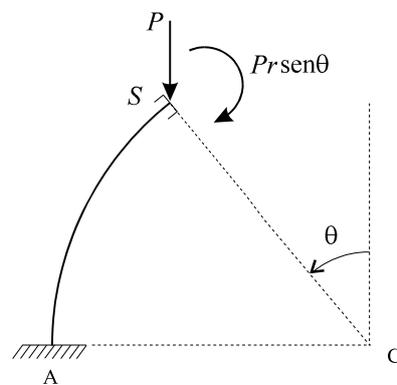
A força normal e o momento fletor são senoidais; a força cortante, cossenoidal.



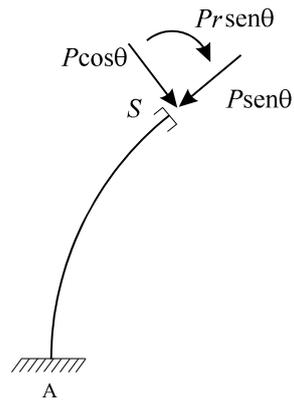
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.70

Os diagramas dos esforços solicitantes desta viga estão traçados na Figura 5.71. Observa-se que os valores dos esforços solicitantes continuam sendo sempre indicados perpendicularmente ao eixo da barra.

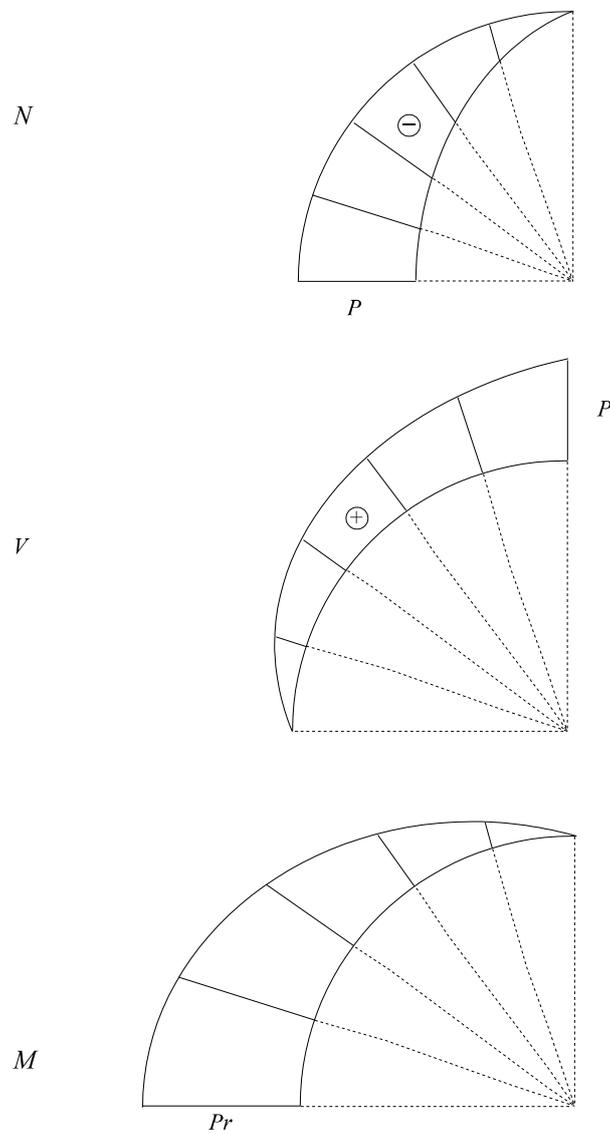


Figura 5.71

Exemplo 5.16

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga poligonal da Figura 5.72.

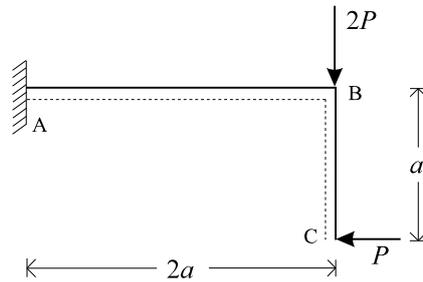


Figura 5.72

Os esforços solicitantes desta viga serão determinados por meio do teorema fundamental.

Como a barra BC é vertical, não existe sentido em se falar em tração das fibras superiores ou inferiores desta barra. Por esta razão, vai-se introduzir uma nova convenção de sinais para os momentos fletores: traceja-se um dos lados das barras da estrutura - como se mostra na Figura 5.72 - e considera-se que os momentos fletores sejam positivos quando tracionam o lado tracejado e negativos no caso contrário. É esta a convenção de sinais que se utilizará para os momentos fletores neste exemplo.

Para determinar os esforços solicitantes do trecho CB, corta-se esta barra em uma seção genérica S_1 - caracterizada pela coordenada y - e transfere-se para esta seção a única força aplicada abaixo do corte (Figura 5.73).

Tem-se então no trecho CB da viga poligonal:

$$\begin{aligned} N &= 0 \\ V &= P \\ M &= -Py \end{aligned} \tag{5.49}$$

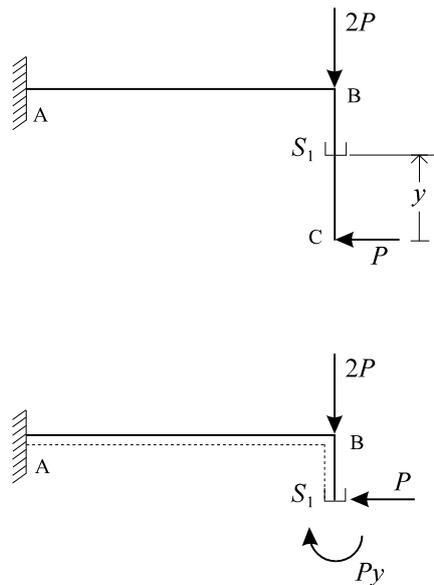


Figura 5.73

Procede-se de forma semelhante para determinar os esforços solicitantes do trecho BA (Figura 5.74).

Tem-se neste trecho da viga:

$$\begin{aligned} N &= -P \\ V &= 2P \\ M &= -Pa - 2Px' \end{aligned} \tag{5.50}$$

Os diagramas de esforços solicitantes estão na Figura 5.75.

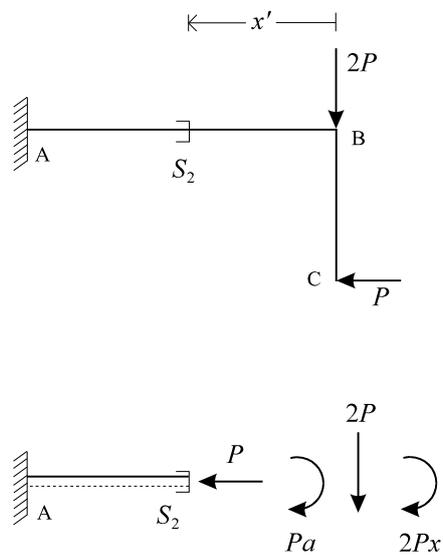


Figura 5.74

Nota 5.19

Na determinação dos momentos fletores desta estrutura foi utilizada uma nova convenção de sinais, ligada ao lado da estrutura que foi traçado. Tendo-se neste exemplo traçado o lado interno da viga, obtiveram-se momentos fletores negativos tanto na barra AB como na BC. Caso se tivesse traçado o lado externo da estrutura, os momentos nestas duas barras seriam positivos. Chegar-se-ia, entretanto, ao mesmo diagrama de momentos fletores da Figura 5.75, pois continua-se sempre indicando os momentos fletores no lado tracionado da barra.

Tem-se, por isso, total liberdade de escolha do lado que se irá traçar, já que em qualquer caso se chegará sempre ao mesmo diagrama de momentos fletores.

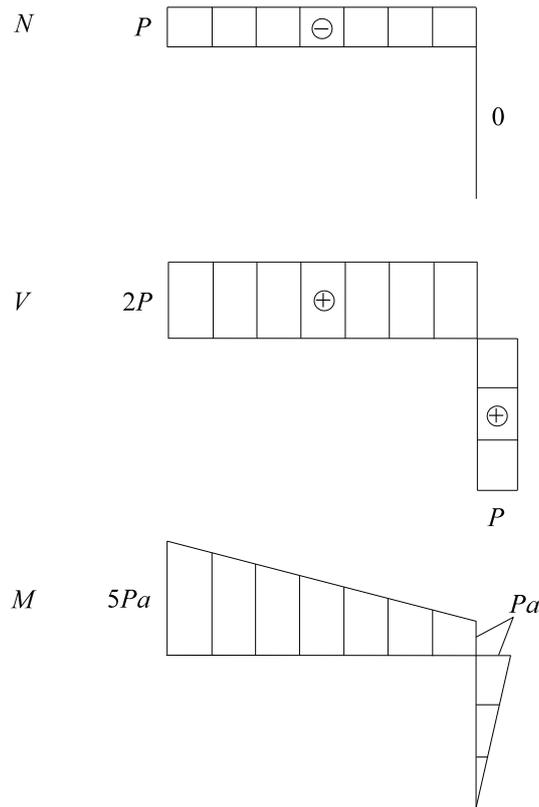


Figura 5.75

Nota 5.20

Nos exemplos anteriores, tanto nos diagramas de forças normais como nos de forças cortantes os valores positivos eram desenhados acima do eixo que representa a estrutura e os valores negativos, abaixo deste eixo.

Isto, porque as estruturas até aqui estudadas eram simples, constituídas por uma única barra, não havendo a possibilidade de se ter superposições de diagramas.

Quando as estruturas forem formadas por mais de uma barra deve-se traçar os diagramas de força normais e de forças cortantes de forma que eles sejam os mais claros possíveis, sem se prender a nenhuma regra rígida com relação ao lado das barras em que valores positivos e negativos devem ser traçados, evitando-se desta maneira superposições que seriam inevitáveis caso não se tivesse esta flexibilidade.

Assim, neste exemplo, as forças normais na barra AB foram desenhadas acima do eixo, apesar de negativas.

Como nos diagramas de forças normais e de forças cortantes sempre se coloca o sinal do esforço, esta maior liberdade no traçado dos diagramas não leva a nenhuma perda de informação.

Nota 5.21

Sugere-se que, à medida que cada trecho de uma estrutura for estudado, sejam traçados os respectivos diagramas de esforços solicitantes. Assim, após obter as expressões (5.49) dos esforços solicitantes da barra BC, deve-se imediatamente traçar os diagramas de esforços solicitantes desta barra, e só depois analisar a barra AB e traçar os respectivos diagramas.

Nota 5.22

Como já se mencionou anteriormente, a função de uma estrutura sempre é permitir que esforços externos ativos aplicados em alguns de seus pontos caminhem até os apoios, onde são equilibrados.

No caso desta viga poligonal, a força P aplicada em C caminha por toda a estrutura até chegar ao apoio A, solicitando tanto a barra BC como a barra AB. Já a força $2P$ aplicada em B só solicita a barra AB, ao caminhar desde seu ponto de aplicação até o engastamento. A força $2P$ não solicita a barra BC, pois não a percorre em seu trajeto até o engastamento.

Exemplo 5.17

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga poligonal da Figura 5.76.

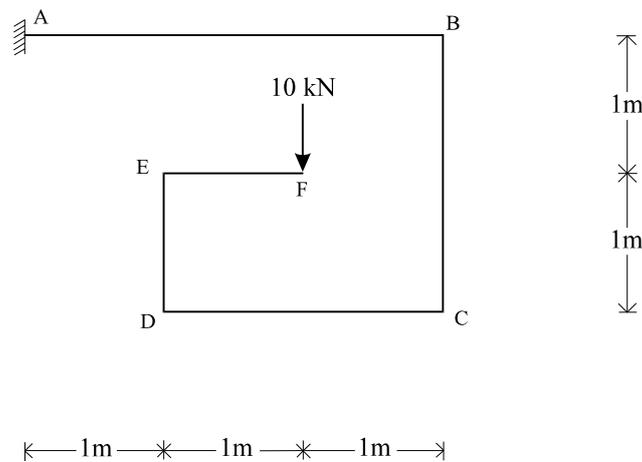


Figura 5.76

Os esforços solicitantes do trecho FE são determinados por intermédio do teorema fundamental, cortando-se esta barra na seção S_1 da Figura 5.77.

Tem-se na barra FE:

$$\begin{aligned} N &= 0 \\ V &= 10 \\ M &= -10x' \end{aligned} \tag{5.51}$$

Obtidas estas equações, deve-se em seguida traçar os diagramas de esforços solicitantes desta barra.

É importante observar que, sendo estes diagramas muito simples, pode-se traçá-los diretamente, sem a obtenção das expressões analíticas (5.51). É como se deve proceder à medida que se vai adquirindo prática no traçado de diagramas de esforços solicitantes.

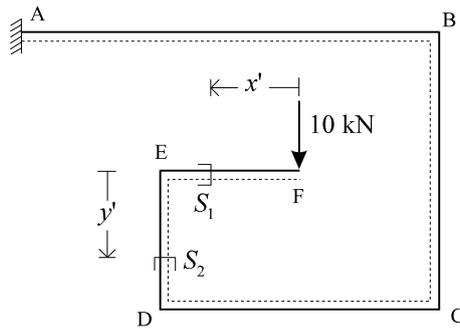


Figura 5.77

Para determinar os esforços solicitantes na barra ED pode-se proceder de duas maneiras. A primeira delas é a tradicional, cortando-se a estrutura na seção S_2 da Figura 5.77 e transferindo-se para ela a força aplicada em F.

Obtém-se para esta barra:

$$\begin{aligned} N &= -10 \\ V &= 0 \\ M &= -10. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Mais uma vez, deve-se traçar imediatamente os diagramas de esforços solicitantes desta barra.

A outra maneira de determinar os esforços solicitantes em ED é a seguinte:

- Corta-se a barra FE em uma seção imediatamente à direita de E, a seção S_3 da Figura 5.78(a), e reduz-se nesta seção a força aplicada em F.

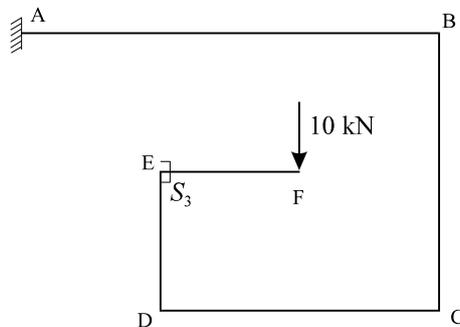
Os esforços decorrentes desta redução, indicados na Figura 5.78(b), representam a ação que a barra FE tem sobre o restante da viga poligonal.

- Corta-se agora a estrutura na seção genérica S_2 da barra ED, reduzindo-se nesta seção os esforços atuantes em S_3 , como se mostra na Figura 5.78(c).

Obtém-se novamente como esforços solicitantes em ED os dados pelas expressões (5.52).

Esta forma de determinar os esforços solicitantes, com a eliminação das partes já analisadas da estrutura, facilita muito a obtenção dos esforços solicitantes de estruturas complexas.

Este procedimento se baseia no seguinte fato: a ação que a barra FE tem sobre o restante da viga poligonal é representada pelos esforços que a barra FE aplica em ABCDE através da seção S_3 .



(a)

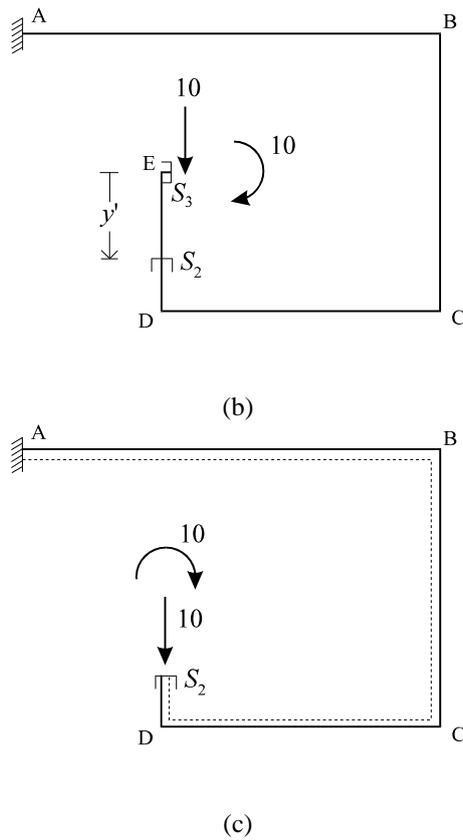


Figura 5.78

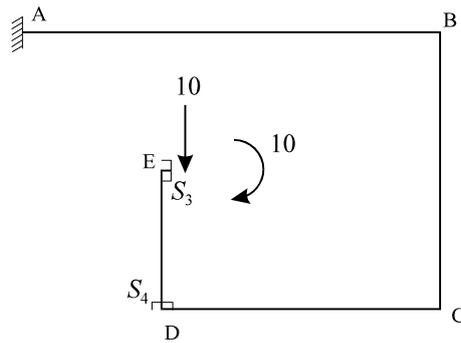
É por esta razão que se pode retirar a barra FE da estrutura, substituída pelos esforços que aplica em S_3 , e prosseguir a determinação dos esforços solicitantes da viga poligonal.

Emprega-se agora este método na determinação dos esforços solicitantes em uma seção genérica da barra DC:

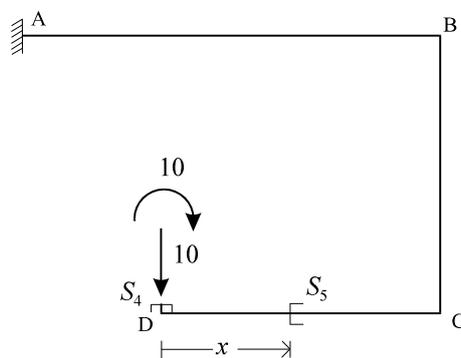
- Corta-se a barra ED em uma seção imediatamente acima de D, a seção S_4 da Figura 5.79(a), e reduzem-se nesta seção os esforços atuantes em S_3 . Obtêm-se os esforços indicados na Figura 5.79(b).
- Corta-se a barra DC em uma seção genérica S_5 , reduzindo-se nesta seção os esforços atuantes em S_4 , como se mostra na Figura 5.79(c).

Os esforços solicitantes em DC são portanto

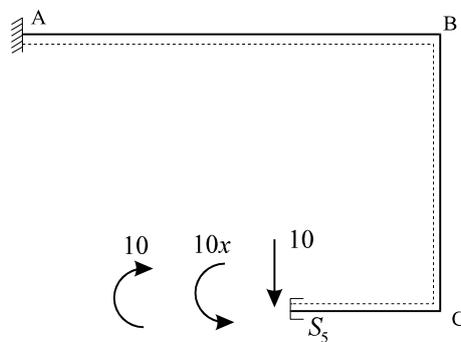
$$\begin{aligned}
 N &= 0 \\
 V &= -10 \\
 M &= 10x - 10
 \end{aligned}
 \tag{5.53}$$



(a)



(b)



(c)

Figura 5.79

O mesmo procedimento pode ser utilizado para determinar os esforços solicitantes das barras CB e BA, e sugere-se que o leitor os obtenha como exercício.

Os diagramas de esforços solicitantes desta viga poligonal estão na Figura 5.80.

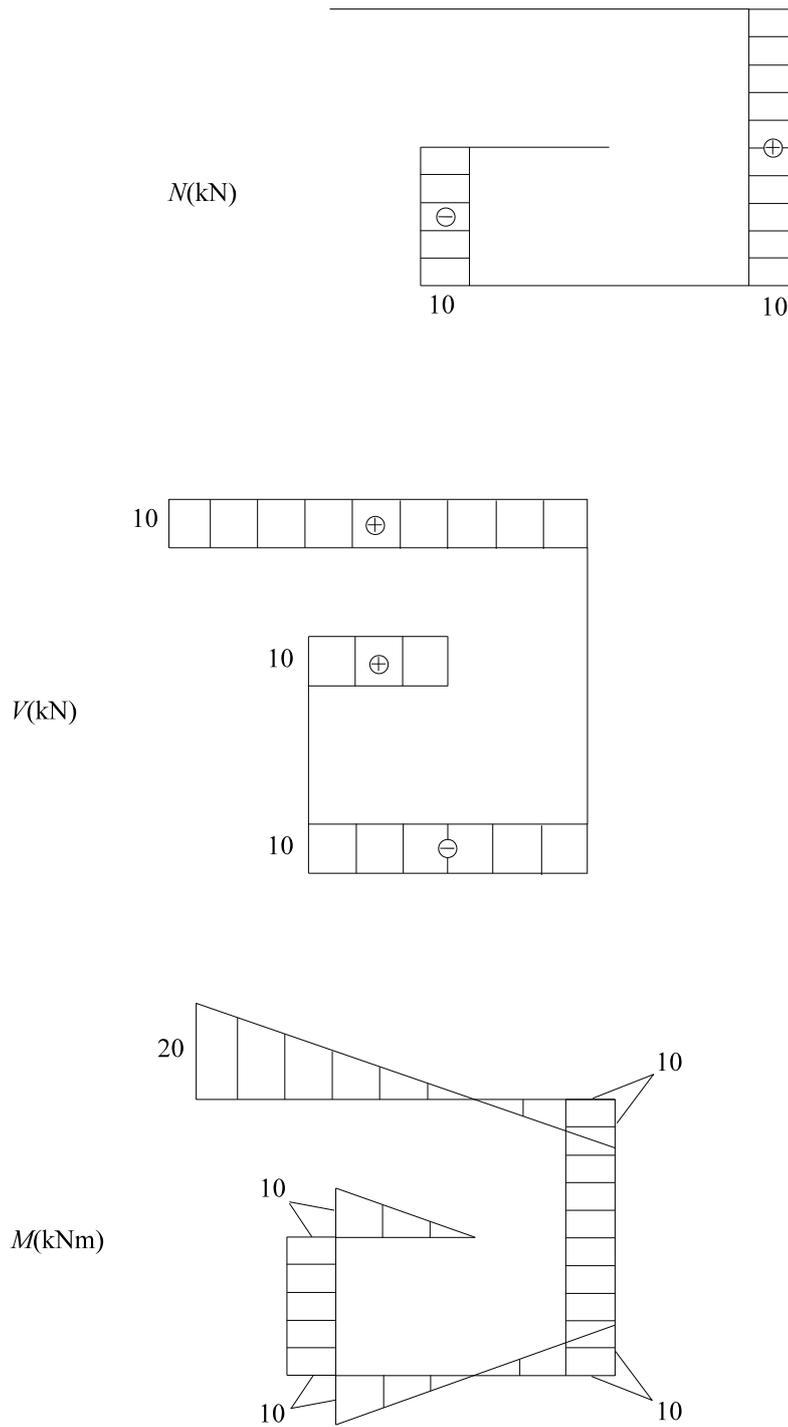


Figura 5.80

Nota 5.23

Observou-se no exemplo anterior que, no caso de estruturas formadas por mais de uma barra, tem-se total liberdade para traçar os diagramas de forças normais e cortantes no lado que se quiser das barras, de forma a evitar superposições de diagramas.

No caso dos diagramas de momentos fletores, entretanto, não existe nenhuma flexibilidade: eles devem ser sempre desenhados no lado tracionado das barras. As superposições observadas no diagrama de momentos fletores da Figura 5.80 são, portanto, inevitáveis.

Exemplo 5.18

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga simplesmente apoiada da Figura 5.81.

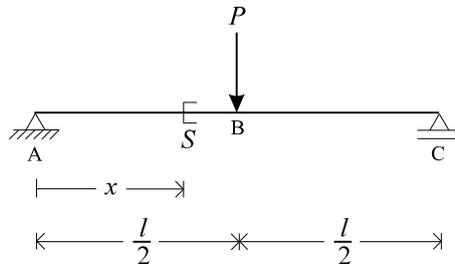


Figura 5.81

Todas as estruturas até aqui examinadas tinham como único apoio um engastamento. Por esta razão, foi possível determinar seus esforços solicitantes sem antes calcular as reações de apoio, visto que sempre de um dos lados de qualquer corte todos os esforços externos aplicados na estrutura eram conhecidos.

No caso das vigas simplesmente apoiadas isto não mais ocorre. Por exemplo, tanto no lado esquerdo como no lado direito da seção S da Figura 5.81 existem aplicadas reações de apoio, que precisam então ser determinadas para se poder utilizar o teorema fundamental e obter os esforços solicitantes nessa seção.

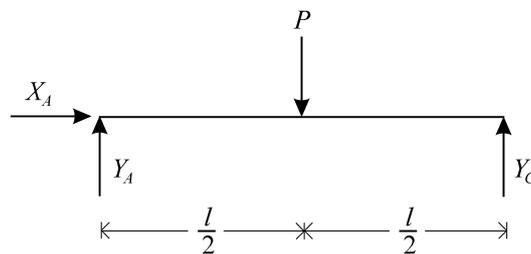


Figura 5.82

Para obter as reações de apoio desta viga, mostradas na Figura 5.82, utilizam-se as três equações de equilíbrio da estática:

$$\begin{aligned} \sum X = 0 &\Rightarrow X_A = 0 \\ \sum Y = 0 &\Rightarrow Y_A + Y_C = P \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow -P \frac{l}{2} + Y_C = 0. \end{aligned} \tag{5.54}$$

Decorrem destas equações as reações

$$\begin{aligned} X_A &= 0 \\ Y_A &= Y_C = \frac{P}{2}. \end{aligned} \tag{5.55}$$

Os esforços externos que atuam nesta viga simplesmente apoiada estão mostrados na Figura 5.83(a).

Os esforços solicitantes do trecho AB podem ser obtidos cortando a viga em uma seção genérica S_1 deste trecho de barra, e reduzindo nesta seção a única força externa aplicada à esquerda do corte, como se indica na Figura 5.83(b).

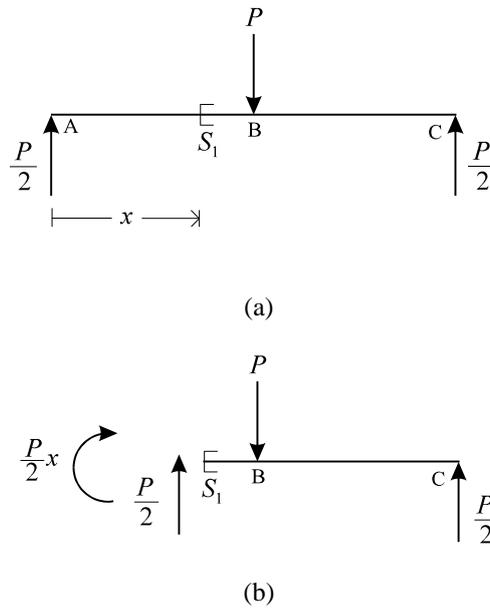


Figura 5.83

Tem-se então no trecho AB

$$\begin{aligned}
 N &= 0 \\
 V &= \frac{P}{2} \\
 M &= \frac{P}{2} x.
 \end{aligned}
 \tag{5.56}$$

A obtenção dos esforços solicitantes do trecho CB é feita de forma análoga, cortando a viga em uma seção genérica S_2 e nela reduzindo a única força externa aplicada à sua direita, como mostrado na Figura 5.84(b).

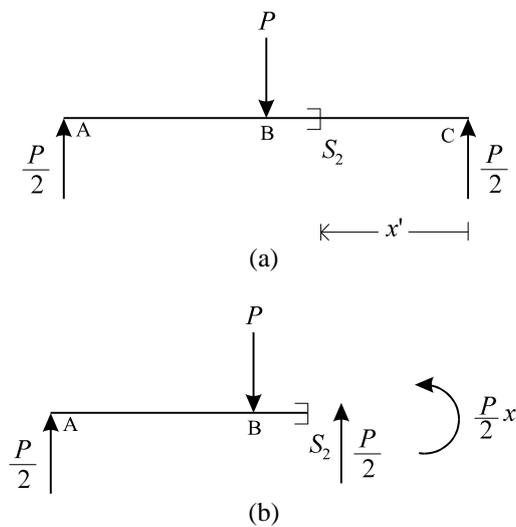


Figura 5.84

Tem-se no trecho CB

$$N = 0$$

$$V = -\frac{P}{2} \quad (5.57)$$

$$M = \frac{P}{2} x'.$$

Os diagramas de esforços solicitantes desta viga simplesmente apoiada estão traçados na Figura 5.85.

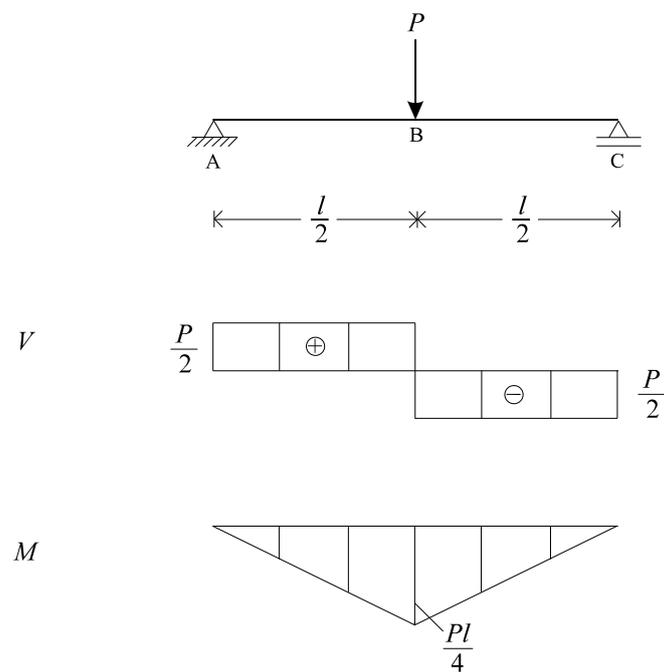


Figura 5.85

Nota 5.24

Para obter os esforços solicitantes na seção S_1 foi reduzida nesta seção a única força externa aplicada à esquerda do corte; é claro que, alternativamente, poderiam ter sido reduzidas nesta seção as duas forças externas aplicadas à sua direita. Optou-se pelo primeiro procedimento, por ser o mais simples.

Observação totalmente análoga se aplica à obtenção dos esforços solicitantes em S_2 .

Nota 5.25

Como no ponto B está aplicada uma força concentrada perpendicular ao eixo da viga, nele a força cortante não se define, e nele ocorre uma descontinuidade no diagrama de forças cortantes.

Exemplo 5.19

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga simplesmente apoiada da Figura 5.86.

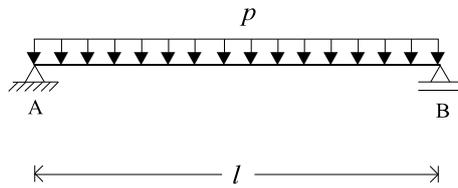


Figura 5.86

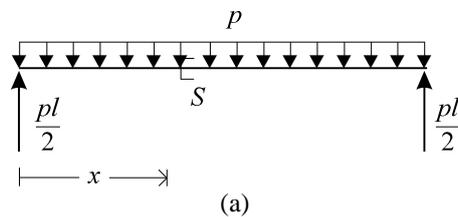
As reações de apoio desta viga estão mostradas na Figura 5.87(a).

Tem-se então nesta viga

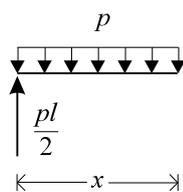
$$V = \frac{pl}{2} - px \tag{5.58}$$

$$M = \frac{pl}{2}x - \frac{px^2}{2}.$$

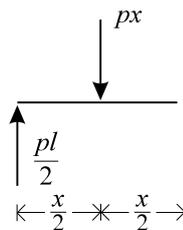
Os diagramas de esforços solicitantes estão traçados na Figura 5.88.



(a)



(b)



(c)

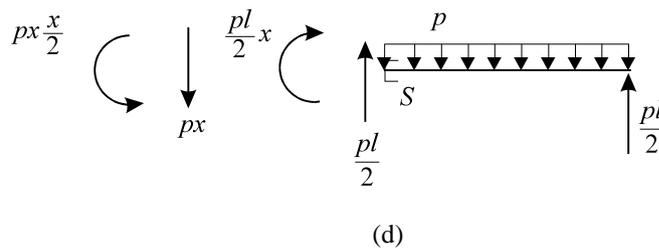


Figura 5.87

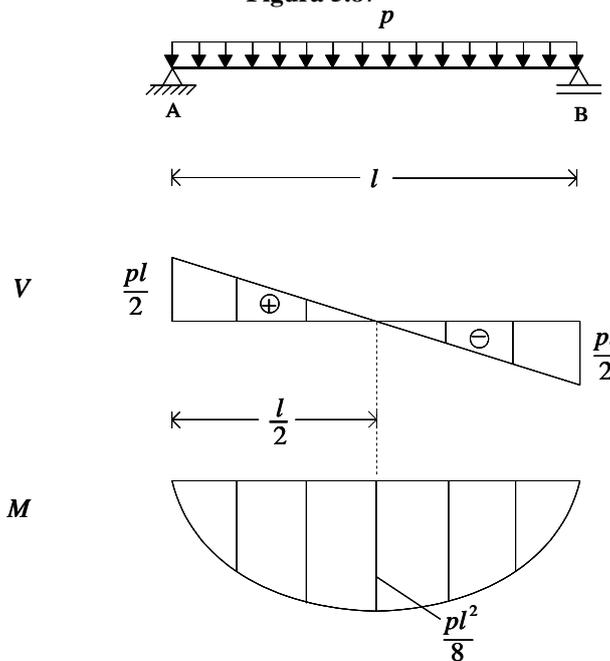


Figura 5.88

Nota 5.26

O máximo momento fletor desta viga se dá no ponto em que se tem

$$\frac{dM}{dx} = 0. \quad (5.59)$$

Como $\frac{dM}{dx} = V(x)$, o máximo momento fletor se dá no ponto em que a força cortante se anula.

Isto ocorre no meio do vão, logo

$$\max M(x) = M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{pl^2}{8}. \quad (5.60)$$

Nota 5.27

No exemplo anterior o momento máximo também se dá no meio do vão. Embora a força cortante neste ponto não seja definida, pode-se considerar que nele ela se “anula”, já que passa de um valor positivo em uma seção imediatamente à sua esquerda para um negativo imediatamente à sua direita.

Como se observou anteriormente, o fato da força cortante no centro da viga do Exemplo 5.18 não ser definida decorre de um defeito do modelo matemático empregado para representar a viga real, com a substituição de um carregamento distribuído aplicado em uma área muito pequena por uma força concentrada. Se se utilizasse um modelo matemático mais exato, com consideração do carregamento distribuído, como se mostrou na Nota 5.5, verificar-se-ia que a força cortante se anulava de fato no centro da viga ou muito próximo a ele.

Pode-se então afirmar que nos pontos em que o momento fletor apresenta um extremo - máximo ou mínimo - a força cortante se anula de fato ou figuradamente, como no Exemplo 5.18.

No caso dos Exemplos 5.18 e 5.19, os pontos em que a força cortante se “anula” são pontos de máximo.

Nota 5.28

Os esforços solicitantes da viga deste exemplo foram determinados por meio da aplicação direta do teorema fundamental.

Alternativamente, poderiam ter sido obtidos por intermédio da integração das equações diferenciais de equilíbrio:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 M(x)}{dx^2} &= -p(x) = -p \\ V(x) &= \frac{dM(x)}{dx} = -px + C_1 \\ M(x) &= -\frac{px^2}{2} + C_1x + C_2.\end{aligned}\tag{5.61}$$

As condições de contorno desta viga, que permitem determinar as constantes de integração C_1 e C_2 , são:

$$\begin{aligned}M(0) &= 0 \\ M(l) &= 0,\end{aligned}\tag{5.62}$$

visto que os apoios articulados nas extremidades desta viga não introduzem momentos como reações de apoio.

Destas condições de contorno, obtém-se

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{pl}{2} \\ C_2 &= 0,\end{aligned}\tag{5.63}$$

logo

$$\begin{aligned}V(x) &= \frac{pl}{2} - px \\ M(x) &= \frac{pl}{2}x - \frac{px^2}{2},\end{aligned}\tag{5.64}$$

que coincidem com as expressões (5.58) obtidas anteriormente.

Como já se comentou, em situações como a desta viga deve-se obter os esforços solicitantes pelo teorema fundamental, não por meio da integração das equações diferenciais de equilíbrio.

Exemplo 5.20

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga da Figura 5.89.

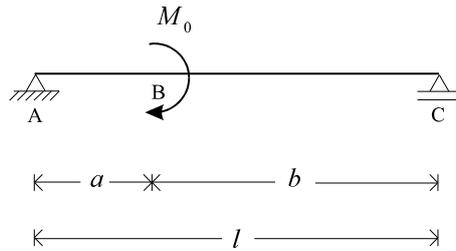


Figura 5.89

As reações de apoio desta viga estão indicadas na Figura 5.90.

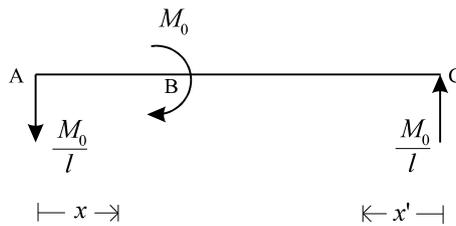


Figura 5.90

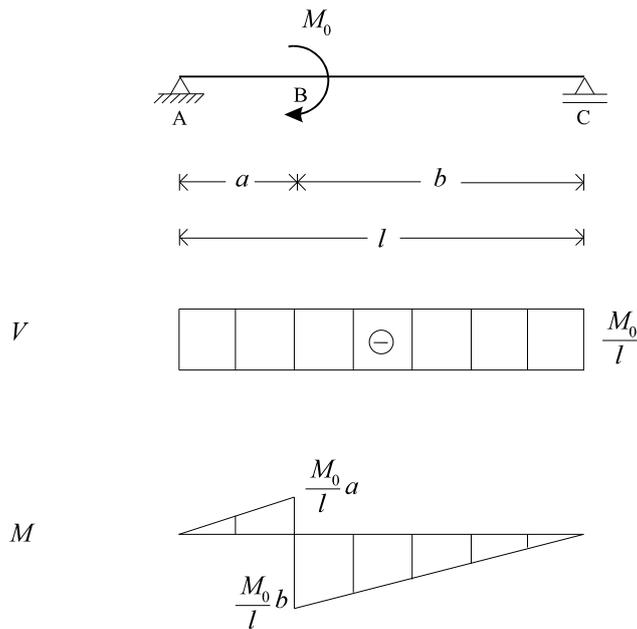


Figura 5.91

Os esforços solicitantes do trecho AB são

$$V(x) = -\frac{M_0}{l} \tag{5.65}$$

$$M(x) = -\frac{M_0}{l} x$$

e os do trecho CB são

$$V(x') = -\frac{M_0}{l} \tag{5.66}$$

$$M(x') = \frac{M_0}{l} x'.$$

Os diagramas de esforços solicitantes desta viga simplesmente apoiada estão traçados na Figura 5.91.

Nota 5.29

No ponto B desta viga é aplicado um momento concentrado, o que introduz no diagrama de momento fletores uma descontinuidade com módulo igual ao do momento aplicado M_0 , como se observa na Figura 5.91. O momento fletor em B não se define.

Exemplo 5.21

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga da Figura 5.92.

O momento M_0 aplicado em A é um esforço externo ativo introduzido, por exemplo, como se mostra na Figura 5.93.

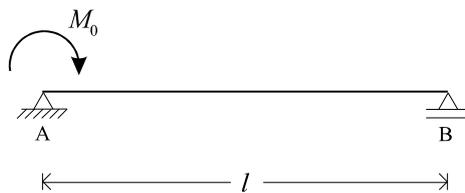


Figura 5.92

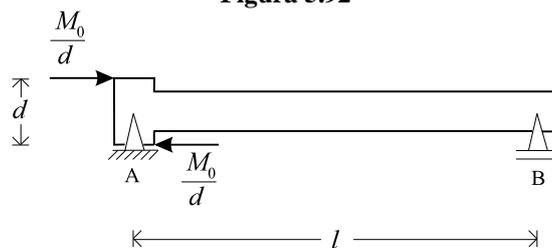


Figura 5.93

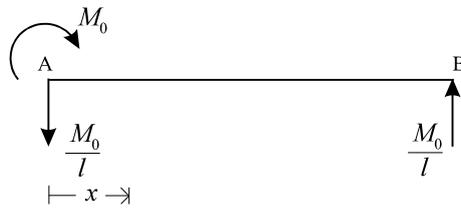


Figura 5.94

As reações de apoio desta viga estão mostradas na Figura 5.94.

Os esforços solicitantes são

$$V(x) = -\frac{M_0}{l}$$

$$M(x) = M_0 - \frac{M_0}{l}x.$$
(5.67)

Os diagramas de esforços solicitantes estão traçados na Figura 5.95.

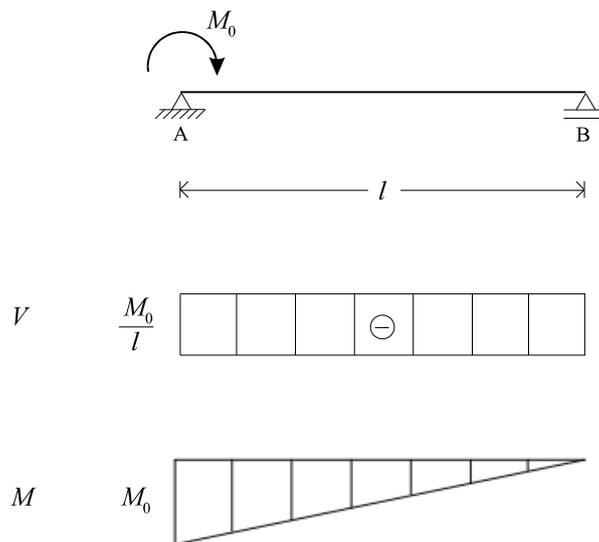


Figura 5.95

Nota 5.30

Observou-se há pouco que o momento M_0 aplicado em A é um momento externo ativo, introduzido, por exemplo, como se indica na Figura 5.93.

É extremamente importante perceber que tanto em A como em B não podem atuar momentos externos reativos. Isto, porque tanto a articulação fixa em A como a articulação móvel em B são apoios que

permitem a livre rotação da viga em torno dos pontos vinculados, não introduzindo portanto momentos como reações de apoio.

Na Figura 5.96 mostra-se como se deforma a viga deste exemplo, ficando claro que as rotações de suas extremidades são livres, não sendo impedidas pelos apoios. O ângulo de rotação da extremidade esquerda da viga é φ_A , no sentido horário, e o da extremidade direita é φ_B , no sentido anti-horário.

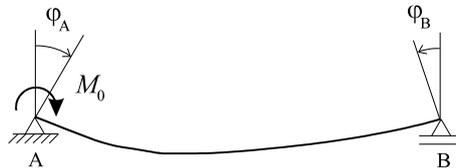


Figura 5.96

Sempre que não houver momentos externos ativos aplicados nas extremidades articuladas de uma estrutura, os momentos fletores nestas extremidades serão nulos. É o que ocorre em ambas as extremidades das vigas simplesmente apoiadas dos Exemplos 5.18, 5.19 e 5.20 e na extremidade direita da viga simplesmente apoiada deste exemplo.

Na extremidade articulada de uma estrutura o momento fletor só poderá ser diferente de zero se nesta extremidade for aplicado um momento externo ativo, como no caso da extremidade esquerda da viga deste exemplo.

Estes comentários são importantíssimos, e podem ser resumidos na seguinte frase:

Na extremidade articulada de uma estrutura o momento fletor só não será nulo se nela for aplicado um momento externo ativo. Neste caso, o momento fletor nesta extremidade terá módulo igual ao deste momento externo aí aplicado.

Exemplo 5.22

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga simplesmente apoiada da Figura 5.97.

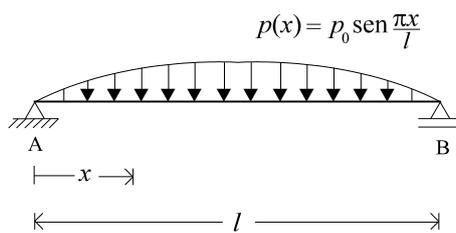


Figura 5.97

Esta viga é daquelas que devem ter os esforços solicitantes determinados por meio da integração das equações diferenciais de equilíbrio, visto que o carregamento distribuído que nela atua é senoidal.

Tem-se, então,

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -p(x) = -p_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$$

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = p_0 \frac{l}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l} + C_1 \quad (5.68)$$

$$M(x) = p_0 \frac{l^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} + C_1 x + C_2.$$

As constantes de integração são determinadas por meio das condições de contorno:

$$\begin{aligned} M(0) = 0 & \quad C_1 = 0 \\ \Rightarrow & \\ M(l) = 0 & \quad C_2 = 0 \end{aligned} \quad (5.69)$$

Tem-se, portanto,

$$V(x) = p_0 \frac{l}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l} \quad (5.70)$$

$$M(x) = p_0 \frac{l^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}.$$

Os diagramas de esforços solicitantes estão traçados na Figura 5.98.

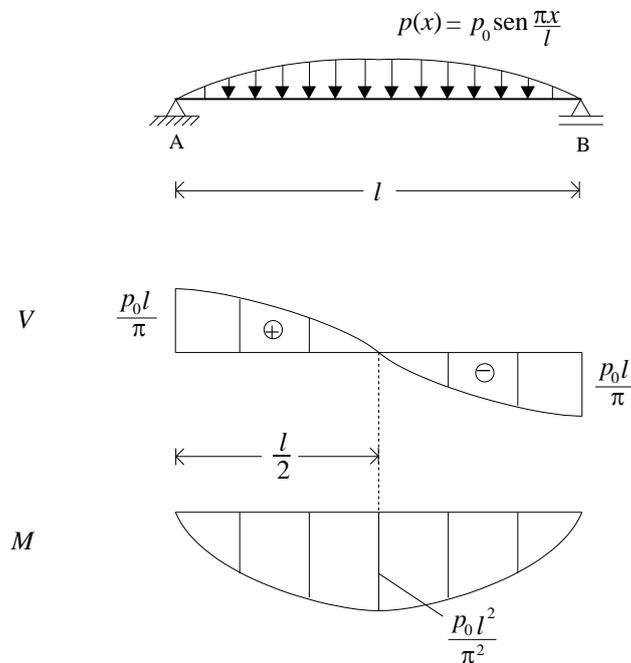


Figura 5.98

O máximo momento fletor se dá no meio do vão, onde a força cortante se anula.

$$\max M = M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{p_0 l^2}{\pi^2}. \quad (5.71)$$

Nota 5.31

Observa-se neste exemplo que a determinação dos esforços solicitantes pela integração das equações diferenciais de equilíbrio não exige o cálculo prévio das reações de apoio.

Ao contrário, são as reações de apoio que podem ser obtidas a partir das expressões dos esforços solicitantes. Tem-se nas extremidades desta viga $V(0) = \frac{p_0 l}{\pi}$ e $V(l) = -\frac{p_0 l}{\pi}$, o que mostra que nestas duas extremidades atuam forças verticais orientadas para cima, como se indica na Figura 5.99. Estas duas forças verticais nas extremidades da barra são as reações de apoio, ou seja, $Y_A = Y_B = \frac{p_0 l}{\pi}$.

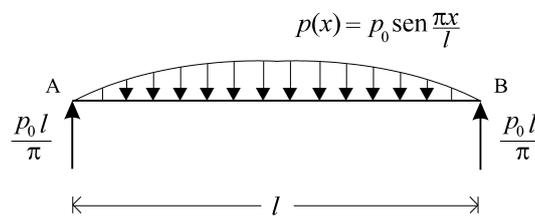


Figura 5.99

Exemplo 5.23

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga simplesmente apoiada com um balanço à esquerda indicada na Figura 5.100.

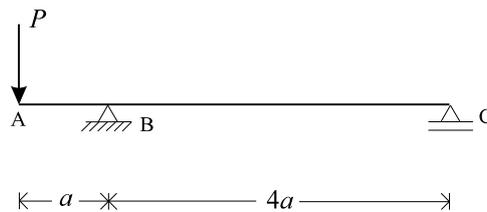


Figura 5.100

As reações de apoio desta viga estão apresentadas na Figura 5.101.

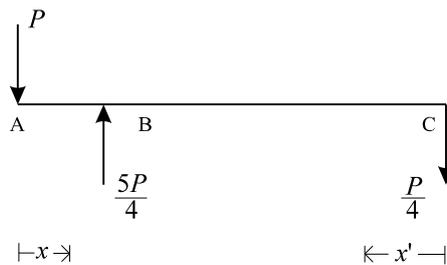


Figura 5.101

Os esforços solicitantes do trecho AB são

$$\begin{aligned} V(x) &= -P \\ M(x) &= -Px \end{aligned} \tag{5.72}$$

e os do trecho CB são

$$\begin{aligned} V(x') &= \frac{P}{4} \\ M(x') &= -\frac{P}{4} x'. \end{aligned} \tag{5.73}$$

Os correspondentes diagramas estão traçados na Figura 5.102.

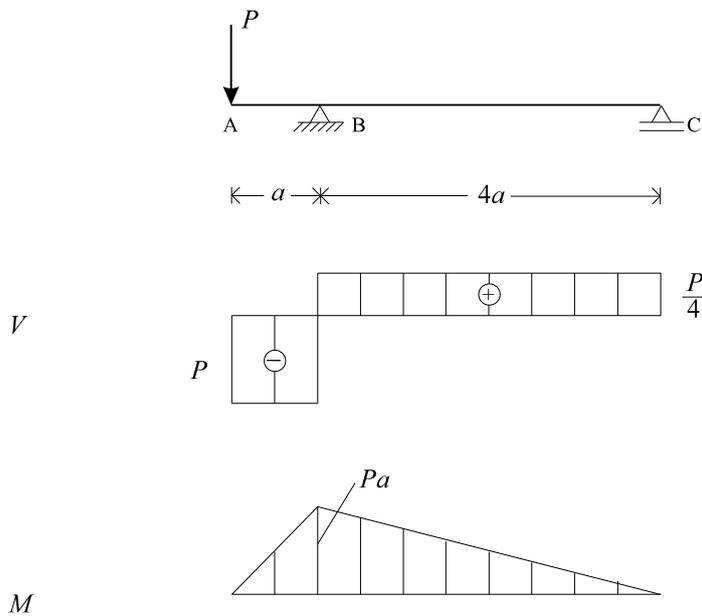


Figura 5.102

Nota 5.32

Observa-se que neste exemplo há momento fletor em B, apesar de se ter neste ponto uma articulação.

A explicação para este fato é muito simples, e para entendê-la observe-se a Figura 5.103, em que se apresenta uma vista lateral bidimensional desta viga.

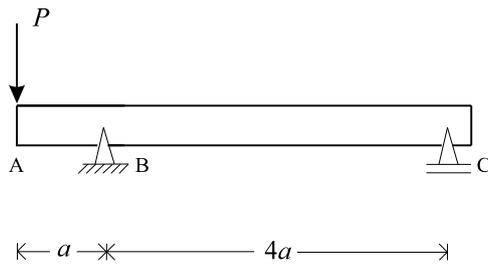


Figura 5.103

Cortando esta barra em uma seção imediatamente à esquerda de B e nela reduzindo a força externa P aplicada à sua esquerda, obtêm-se os esforços indicados na Figura 5.104.

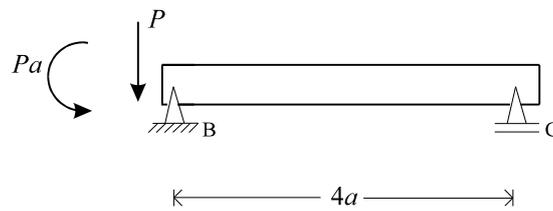


Figura 5.104

Como se observa, o momento fletor em B é o momento transferido pelo trecho em balanço AB ao trecho simplesmente apoiado BC da viga.

Nota 5.33

O esquema de representação desta viga mostrado na Figura 5.100 é uma simplificação da representação mais rigorosa da Figura 5.105.

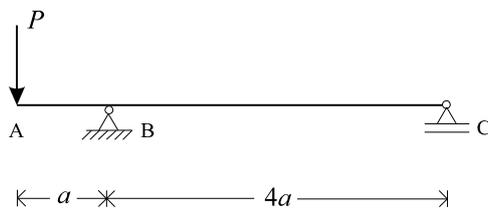


Figura 5.105

Observa-se que neste último esquema as articulações estão explicitamente indicadas, tendo-se colocado a articulação em B abaixo do eixo da viga, para mostrar que existe continuidade de rotação entre os trechos AB e BC, ou seja, que nestes dois trechos se tem a mesma rotação em B.

Esta continuidade fica mais clara ao se considerar a viga deformada, mostrada na Figura 5.106.



Figura 5.106

Ter-se-ia situação completamente diferente no caso da viga mostrada na Figura 5.107, em que não existe continuidade de rotação entre os trechos AB e BC, não se tendo nestes dois trechos as mesmas rotações em B.

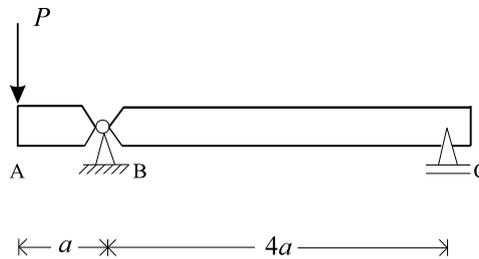


Figura 5.107

O esquema empregado para representar esta última viga é o da Figura 5.108, em que a articulação em B é colocada sobre o eixo da viga, indicando que não existe continuidade de rotação nesse ponto.

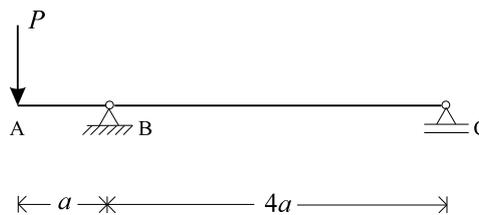


Figura 5.108

Esta viga é hipostática, não fica em equilíbrio, apresentando o movimento sugerido na Figura 5.109.



Figura 5.109

Recomenda-se ao leitor que mais uma vez observe as vigas das Figuras 5.103 e 5.107, analise as diferenças de seu comportamento físico, e compare seus esquemas de representação das Figuras 5.105 e 5.108.

As vigas em que existe continuidade de rotação em B costumam ser indicadas da forma mais simples apresentada na Figura 5.100; aquelas em que não existe continuidade de rotação em B são indicadas como na Figura 5.108.

Exemplo 5.24

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga simplesmente apoiada com dois balanços da Figura 5.110, determinando a seção em que se tem o máximo momento fletor positivo e calculando o seu valor.

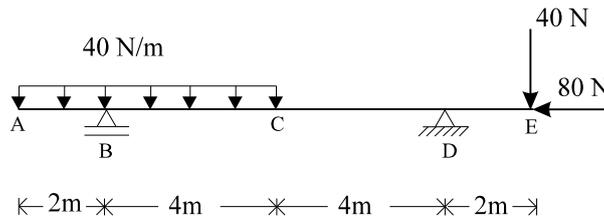


Figura 5.110

As reações de apoio desta viga estão indicadas na Figura 5.111.

No balanço da esquerda, isto é, entre A e B, tem-se

$$N = 0$$

$$V = -40x \quad (5.74)$$

$$M = -\frac{40x^2}{2}$$

e no da direita, isto é, entre E e D, tem-se

$$N = -80$$

$$V = 40 \quad (5.75)$$

$$M = -40x'$$

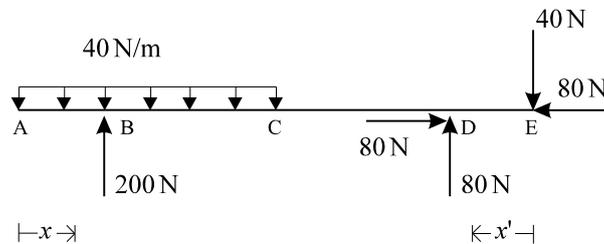


Figura 5.111

Como já se comentou, convém traçar os diagramas de esforços solicitantes de um trecho de barra assim que suas expressões analíticas tenham sido obtidas.

Já se deve, portanto, traçar os diagramas correspondentes aos dois balanços, como se mostra na Figura 5.112.

A obtenção dos esforços solicitantes do trecho simplesmente apoiado desta viga fica facilitada se se utilizar o procedimento apresentado no Exemplo 5.17.

Como os dois balanços desta viga já foram estudados, eles podem ser retirados da barra, cortando-a em uma seção imediatamente à esquerda de B e em uma seção imediatamente à direita de D, aplicando-se nestas seções os esforços transmitidos por estes balanços, como mostrado na Figura 5.113.

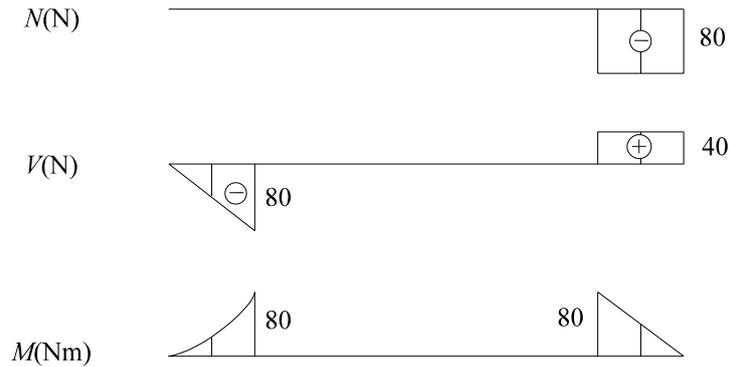


Figura 5.112

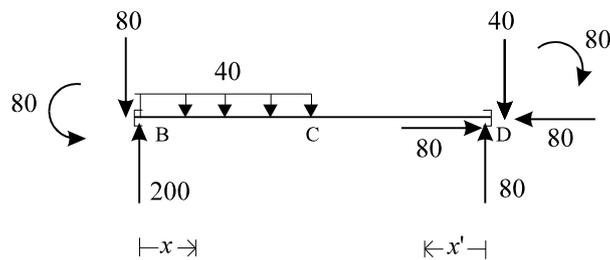


Figura 5.113

Os esforços solicitantes entre B e C são

$$N = 0$$

$$V = 120 - 40x \quad (5.76)$$

$$M = -80 + 120x - \frac{40x^2}{2}$$

e entre D e C são

$$N = 0$$

$$V = -40 \quad (5.77)$$

$$M = -80 + 40x'$$

Pode-se agora terminar o traçado dos diagramas de esforços solicitantes, o que se faz na Figura 5.114.

Nos diagramas de momentos fletores deve-se sempre indicar onde se dão e que valor têm os máximos momentos fletores. A razão para isto é muito simples, e já foi mencionada no início deste capítulo: via de regra, as seções críticas de uma estrutura, isto é, aquelas em que se tem as máximas tensões e nas quais ela poderia vir a romper-se, são aquelas em que se tem os máximos esforços solicitantes, motivo pelo qual se deve sempre obtê-los e indicá-los nos diagramas.

Para determinar as seções em que se tem os momentos fletores máximos, lembra-se que $\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$, logo que se tem $V(x) = 0$ nos pontos em que os momentos fletores apresentam um extremo.

Observa-se no diagrama de forças cortantes da Figura 5.114 que no trecho BC da barra há uma seção em que a força cortante se anula. Tem-se então nesta seção um extremo do momento fletor. A posição desta seção crítica pode ser determinada por meio de (5.76):

$$V(x) = 120 - 40x = 0 \Rightarrow x = 3\text{m} . \quad (5.78)$$

A 3m à direita do ponto B tem-se então um momento fletor extremo, cujo valor também é obtido através de (5.76):

$$M(3) = -80 + 120 \cdot 3 - \frac{4 \cdot 3^2}{2} . \quad (5.79)$$

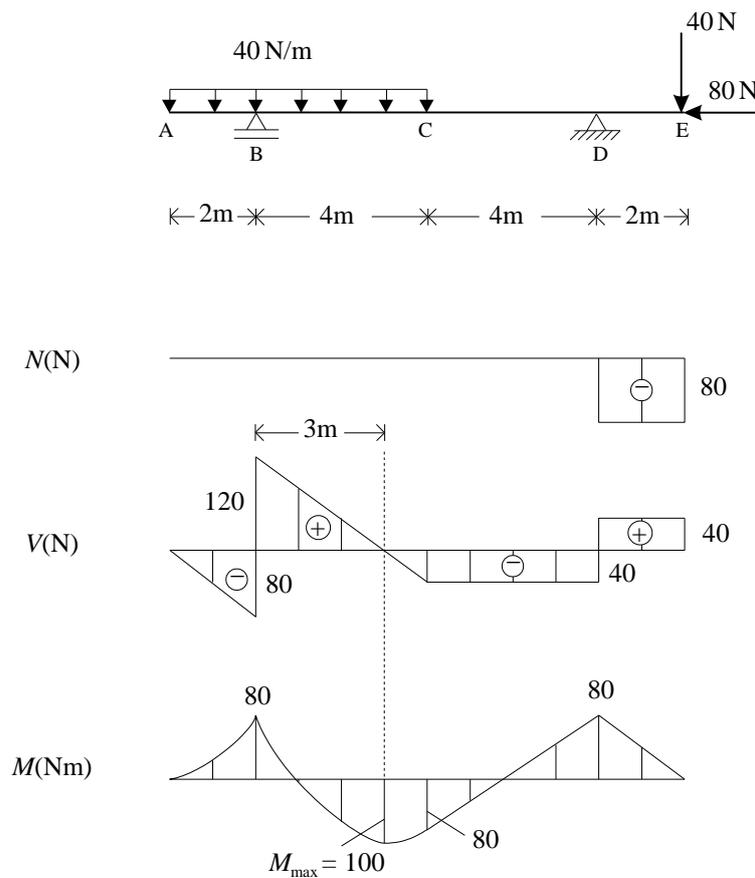


Figura 5.114

Este extremo é portanto um máximo, o máximo momento fletor positivo nesta viga. Sua posição e seu valor estão indicados nos diagramas da Figura 5.114.

Nota 5.34

Nas expressões (5.74) e (5.75) dos esforços solicitantes nos balanços faz-se referência às abscissas x e x' indicadas na Figura 5.111; nas expressões (5.76) e (5.77) dos esforços solicitantes no trecho simplesmente apoiado da viga faz-se referência às abscissas x e x' indicadas na Figura 5.113. Apesar de se tratar de dois conjuntos de referenciais com origens diferentes, por simplicidade optou-se por identificá-los com a mesma letra, para não introduzir outras duas abscissas adicionais.

Nenhuma confusão irá ocorrer, desde que sempre se associe cada um dos dois conjuntos de expressões à figura a ele relacionada.

Nota 5.35

Apresenta-se nesta nota uma forma alternativa de determinar os esforços solicitantes do trecho CD da viga.

A Figura 5.113 mostra o trecho simplesmente apoiado da viga, tendo-se a partir dela obtido os esforços solicitantes em BC e em DC - expressões (5.76) e (5.77).

Cortando a viga em C e aplicando nesta seção os esforços transferidos pelo trecho da barra à esquerda deste corte, tem-se o segmento de viga mostrado na Figura 5.115.

Tem-se então como esforços solicitantes no trecho CD:

$$N = 0$$

$$V = -40 \tag{5.80}$$

$$M = 80 - 40x$$

As expressões (5.80) apresentam os esforços solicitantes em CD como funções de x , enquanto as expressões (5.77) os apresentavam como funções de x' .

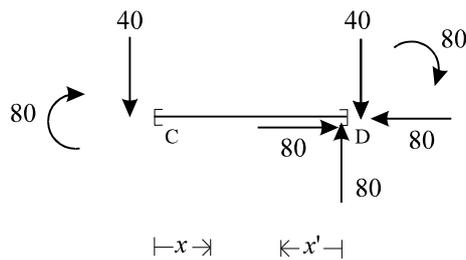


Figura 5.115

É claro que um procedimento análogo a este pode ser também utilizado para obter as expressões dos esforços solicitantes em CB como funções de x' .

Deixa-se a critério do leitor optar por uma ou outra forma de chegar às expressões dos esforços solicitantes no trecho central desta viga, lembrando que nesta opção deve-se sempre escolher a mais simples e menos sujeita a erros.

Exemplo 5.25

Traçar o diagrama de momentos fletores da viga simplesmente apoiada da Figura 5.116.

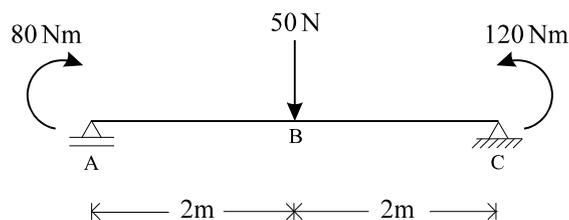


Figura 5.116

Neste exemplo pede-se apenas o diagrama de momentos fletores. Em seu traçado se utilizará o princípio da superposição de efeitos, decompondo-se o carregamento externo ativo que atua na viga conforme indicado na Figura 5.117.

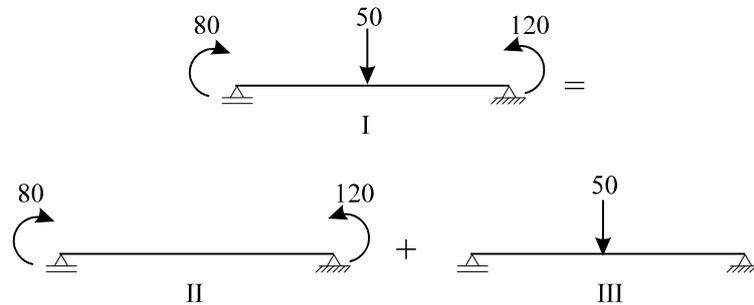


Figura 5.117

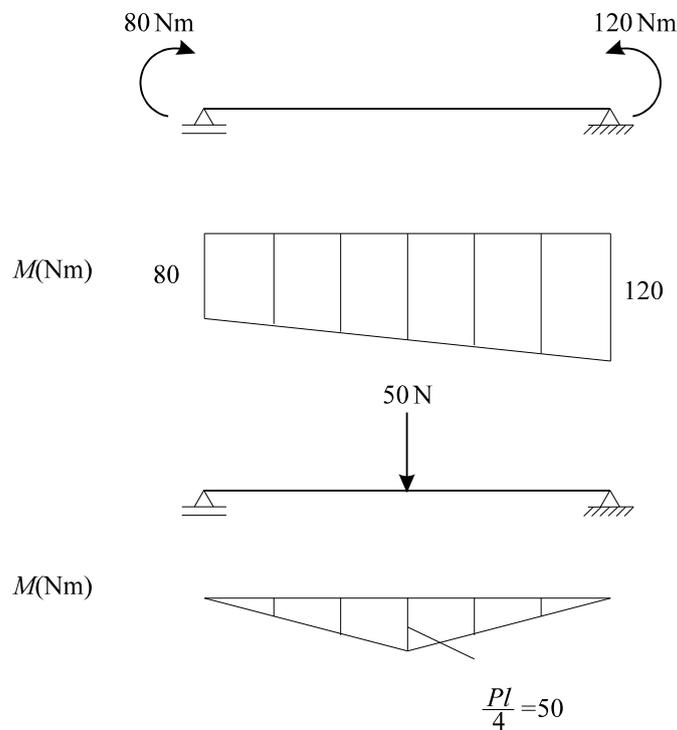


Figura 5.118

De acordo com o princípio da superposição de efeitos, pode-se obter os efeitos da viga I somando os das vigas II e III. Em particular, os momentos fletores da viga I podem ser determinados somando os das vigas II e III. Os diagramas de momentos fletores destas duas vigas estão apresentados na Figura 5.118.

Somando estes dois diagramas, obtém-se o diagrama de momentos fletores procurado. Esta soma pode ser feita graficamente, por meio do procedimento abaixo, ilustrado na Figura 5.119:

- Traça-se inicialmente o diagrama de momentos fletores da viga II, que é um segmento de reta unindo os momentos fletores nas extremidades da barra.

Este segmento de reta que liga os momentos fletores nas extremidades da barra - o segmento \overline{OP} da Figura 5.119 - recebe o nome de linha de fecho da viga I.

- Dependura-se na linha de fecho o diagrama de momentos fletores da viga III. Este diagrama dependurado encontra-se hachurado na Figura 5.119.

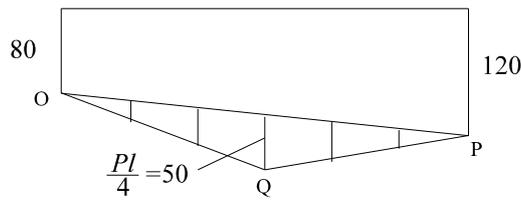


Figura 5.119

c) O diagrama de momentos final é o diagrama OQP da Figura 5.119.

Na Figura 5.120 apresenta-se o diagrama de momentos fletores pedido neste exemplo.

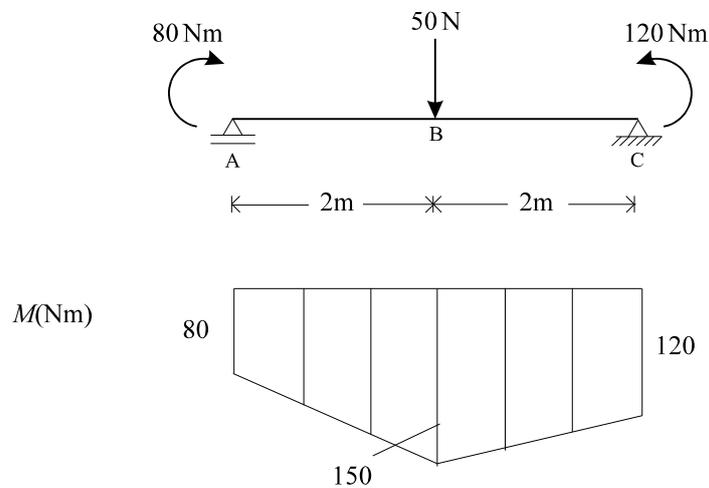


Figura 5.120

Exemplo 5.26

Traçar o diagrama de momentos fletores da viga simplesmente apoiada da Figura 5.121.

A resolução deste problema será feita empregando o mesmo procedimento que no exemplo anterior.

O carregamento ativo da viga é decomposto conforme se indica na Figura 5.122, separando-se os momentos aplicados nas extremidades da viga do restante do carregamento.

Os diagramas de momentos fletores das vigas II e III estão na Figura 5.123; observa-se que os momentos fletores da viga II são negativos e os da viga III, positivos.

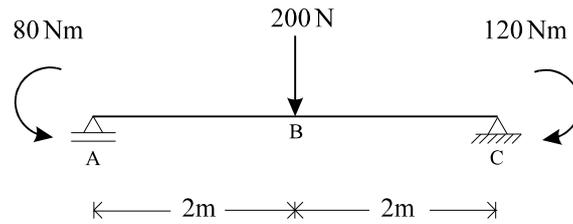


Figura 5.121

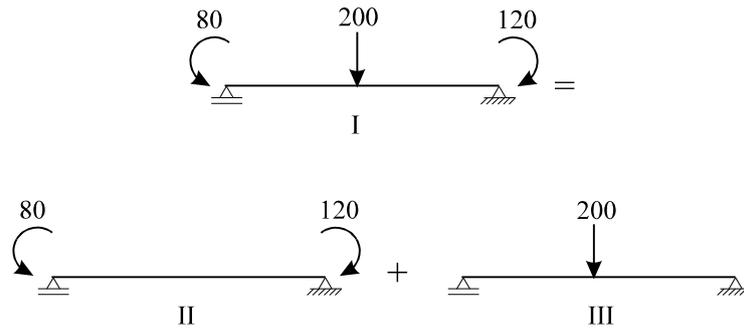


Figura 5.122

Para obter o diagrama de momentos fletores procurado devem-se somar os dois diagramas da Figura 5.123, o que se fará graficamente, dependurando o diagrama de momentos fletores da viga III na linha de fecho da viga I. Esta construção é mostrada na Figura 5.124, em que o diagrama dependurado encontra-se hachurado.

O diagrama de momentos fletores que se está querendo obter, isto é, o diagrama de momentos fletores da viga I, é o delimitado pelo diagrama dependurado OQP e pelo eixo das abcissas, hachurado na Figura 5.125

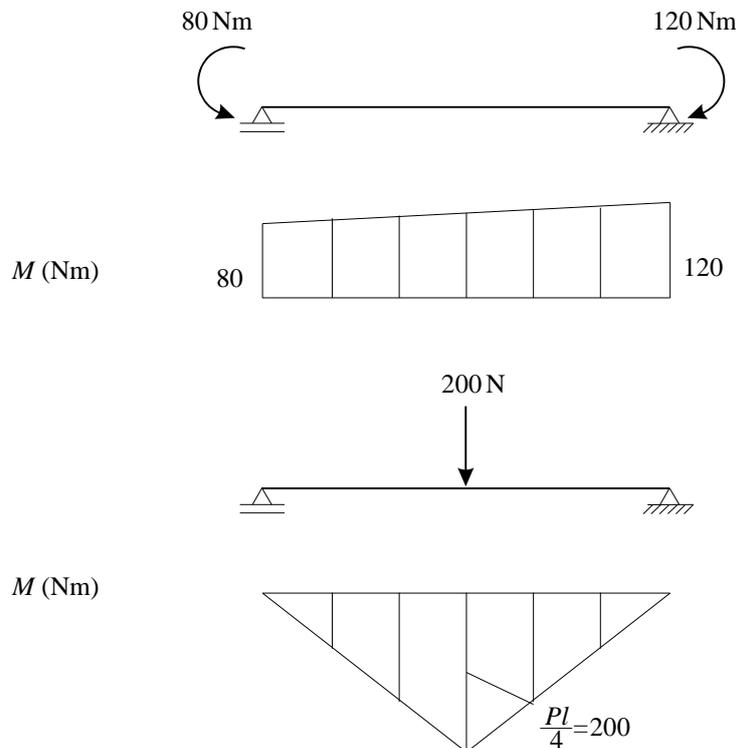


Figura 5.123

Não é difícil mostrar que o diagrama da Figura 5.125 é o diagrama procurado. Lembrando que $M_I = M_{II} + M_{III}$, que M_{II} é negativo e M_{III} é positivo, verifica-se que, na região central da viga, como $|M_{II}| < M_{III}$, então $M_I > 0$, devendo ser desenhado abaixo do eixo das abcissas. Na Figura 5.126(a) evidencia-se claramente que na região central da viga I o diagrama de momentos fletores é o delimitado pelo diagrama dependurado e pelo eixo das abcissas.

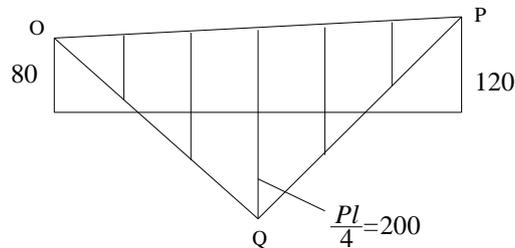


Figura 5.124

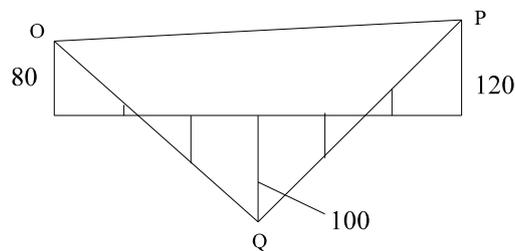
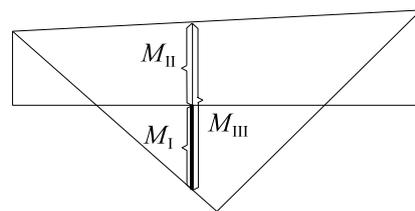


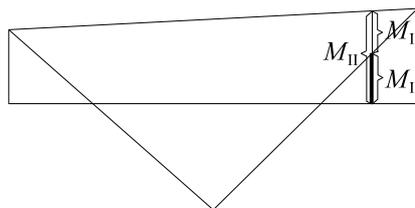
Figura 5.125

Nas laterais da viga tem-se $|M_{II}| > M_{III}$, logo $M_I < 0$, devendo então ser desenhado acima do eixo das abcissas. A Figura 5.126(b) mostra que novamente o diagrama de momentos fletores da viga I é o delimitado pelo diagrama dependurado e pelo eixo das abcissas.

O diagrama de momentos fletores da viga da Figura 5.121 é portanto o apresentado na Figura 5.127.



(a)



(b)

Figura 5.126

Nota 5.36

Nestes dois últimos exemplos utilizou-se uma mesma técnica para traçar o diagrama de momentos fletores de uma viga simplesmente apoiada, que consiste em dependurar na linha de fecho da viga o diagrama de momentos fletores dos esforços aplicados entre os apoios agindo isoladamente na viga, obtendo como diagrama de momentos fletores final o delimitado pelo diagrama dependurado e pelo eixo das abscissas.

A grande utilidade desta técnica fica bem mais patente neste último exemplo que no anterior.

O próximo exemplo ilustra mais uma vez o emprego desta técnica.

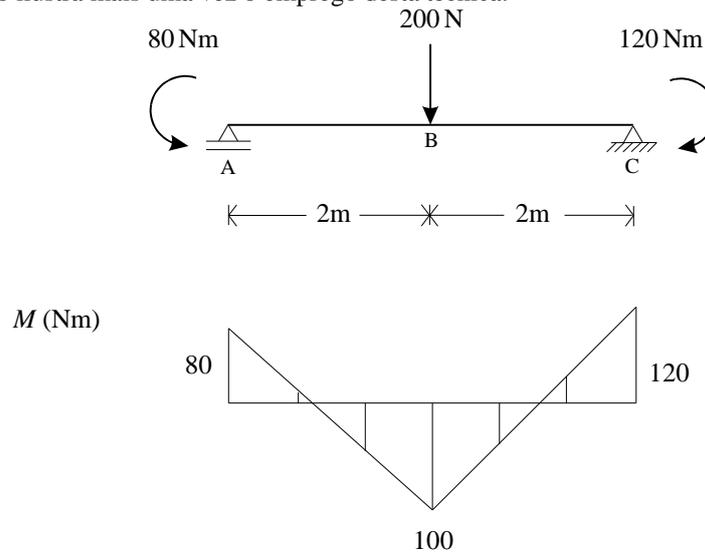


Figura 5.127

Exemplo 5.27

Traçar o diagrama de momentos fletores da viga da Figura 5.128

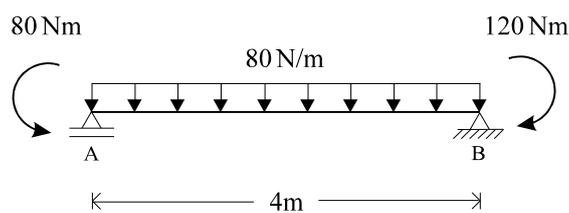


Figura 5.128

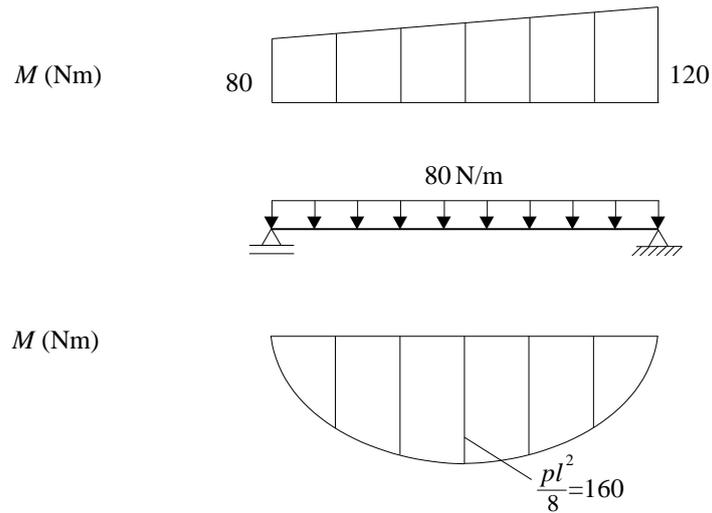


Figura 5.129

Na Figura 5.129 apresentam-se a linha de fecho da viga da Figura 5.128 e o diagrama de momentos fletores da viga simplesmente apoiada submetida exclusivamente ao carregamento distribuído.

O diagrama de momentos fletores procurado é então o hachurado na Figura 5.130.

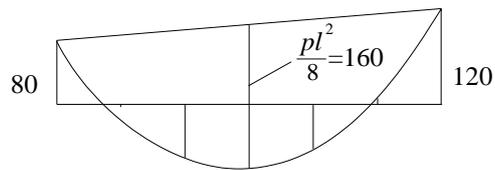


Figura 5.130

O diagrama de momentos pedido neste exemplo é assim o da Figura 5.131.

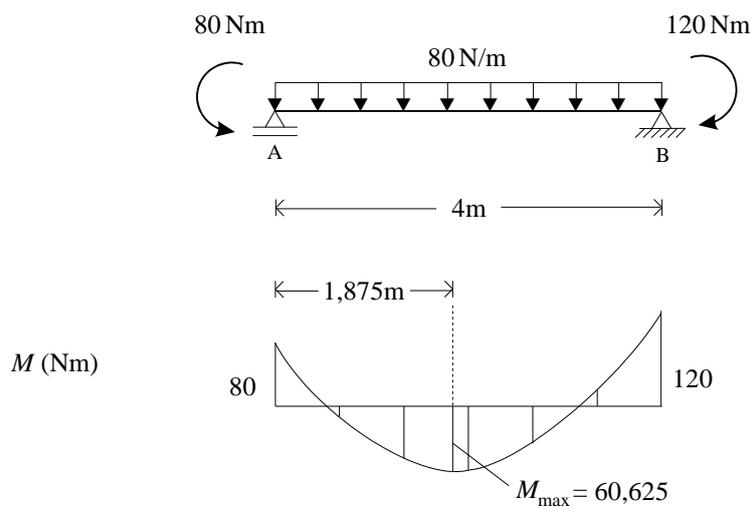


Figura 5.131

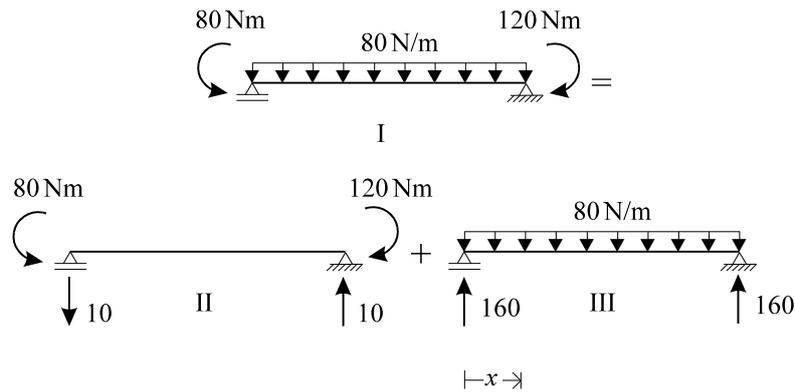


Figura 5.132

Como já se comentou, no diagrama de momentos fletores deve-se indicar o máximo momento fletor positivo.

Sua obtenção se faz determinando inicialmente o seção em a força cortante se anula.

Para isto, pode-se utilizar a mesma superposição de efeitos empregada para chegar ao diagrama de momentos fletores, indicada na Figura 5.132, em que também figuram as reações de apoio das vigas II e III.

Tem-se então

$$V_{II} = -10$$

$$V_{III} = 160 - 80x$$

(5.81)

$$V_I = V_{II} + V_{III} = 150 - 80x$$

$$V_I = 150 - 80x = 0 \Rightarrow x = 1,875 \text{ m}$$

A seção em que se tem o máximo momento fletor está portanto a 1,875m à direita do apoio da esquerda. Tem-se nesta seção:

$$M_{II} = -80 - 10 \cdot 1,875$$

$$M_{III} = 160 \cdot 1,875 - 80 \cdot \frac{1,875^2}{2} \quad (5.82)$$

$$\max M_I = M_{II} + M_{III} = 60,625 \text{ Nm}$$

Nota 5.37

Para obter com precisão um diagrama de momentos fletores como o da Figura 5.131 deve-se traçá-lo por pontos: quanto mais pontos forem empregados, tanto mais preciso ele será.

Uma forma alternativa de traçar um diagrama de momentos fletores parabólico, bastante simples e com boa precisão, será apresentada a seguir.

Ela consiste em traçá-lo utilizando como guia seis parâmetros: os momentos fletores em três pontos e as tangentes ao diagrama nestes mesmos três pontos.

Sua apresentação se faz na Figura 5.133, em que se considera uma viga simplesmente apoiada submetida a um carregamento uniformemente distribuído.

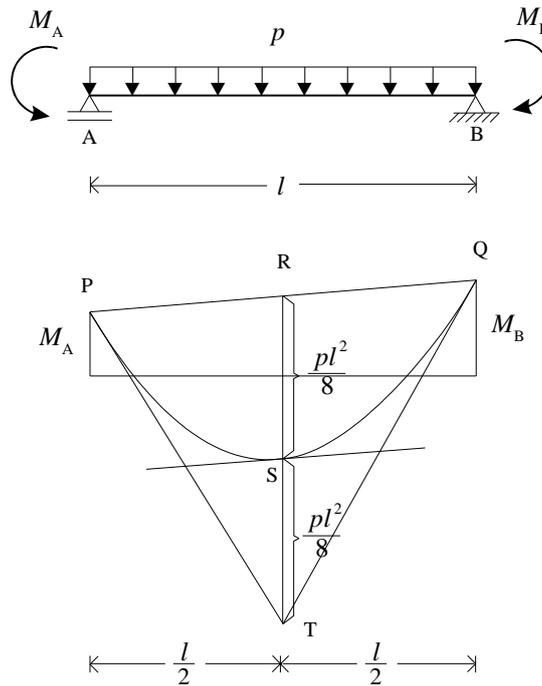


Figura 5.133

Os três pontos pelos quais passa o diagrama de momentos fletores são os pontos P, Q e S da Figura 5.133(b). Nas extremidades da viga, os momentos fletores são M_A e M_B ; no centro do vão, como se viu há pouco, obtém-se o momento fletor dependurando na linha de fecho PQ o segmento RS, de valor $\frac{pl^2}{8}$.

Pode-se demonstrar que as retas TP e TQ são as tangentes ao diagrama em suas extremidades, e que no ponto S a tangente ao diagrama é paralela à linha de fecho PQ. Observa-se que o ponto T está sobre a mesma vertical que o ponto S, a uma distância $\frac{pl^2}{8}$ deste.

Conhecidos os momentos fletores nas extremidades da barra e no meio do vão e as tangentes ao diagrama nestes mesmos pontos, fica fácil traçá-lo de forma aproximada, como se faz na Figura 5.133(b).

Como normalmente se determina analiticamente a posição do máximo momento fletor positivo e seu valor, tem-se assim outro parâmetro adicional para o traçado aproximado do diagrama de momentos fletores da viga.

Exemplo 5.28

Traçar o diagrama de momentos fletores da viga da Figura 5.134.

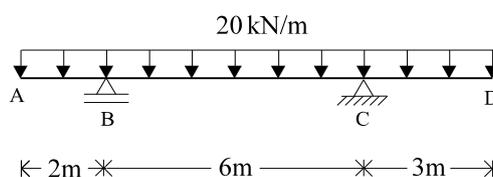


Figura 5.134

No traçado do diagrama de momentos fletores desta viga serão utilizadas as técnicas apresentadas nos últimos exemplos.

Os momentos fletores nos apoios são provenientes dos dois balanços da viga, tendo-se $M_B = -40 \text{ kNm}$ e $M_C = -90 \text{ kNm}$.

Definiu-se anteriormente a linha de fecho de uma viga simplesmente apoiada: é a linha que une os momentos fletores nas extremidades da viga. Generaliza-se agora esta definição para uma viga qualquer: linha de fecho de uma viga é a linha que une os momentos fletores nas extremidades e nos apoios da viga.

A linha de fecho da viga que está sendo analisada é então a linha OPQR mostrada na Figura 5.135.

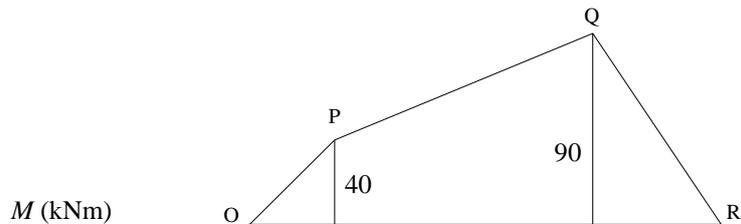
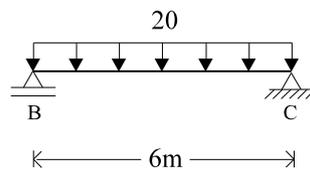


Figura 5.135

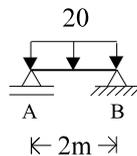
O diagrama de momentos fletores do trecho central desta viga se obtém dependurando na linha de fecho PQ o diagrama de momentos fletores da viga simplesmente apoiada da Figura 5.136(a).

Não é difícil mostrar que a mesma construção pode ser utilizada para traçar os diagramas de momentos fletores dos balanços, ou seja, que eles podem ser obtidos dependurando respectivamente nas linhas de fecho OP e QR os diagramas de momentos fletores das vigas simplesmente apoiadas das Figuras 5.136(b) e (c).

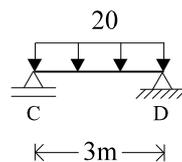
Vai-se demonstrar esta afirmação para o balanço da esquerda. Para isto, retira-se da viga este balanço, cortando-a em uma seção transversal imediatamente à esquerda do apoio B e aplicando na seção do corte os esforços que nela atuam. Na Figura 5.137(a) apresenta-se o balanço assim retirado da viga.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.136

O que se deseja provar é que o diagrama de momentos fletores deste balanço é igual ao da viga simplesmente apoiada da Figura 5.137(b); este, por sua vez, pode ser obtido empregando as técnicas apresentadas nos últimos exemplos.

Determinando as reações de apoio da viga da Figura 5.137(b), obtém-se $Y_A = 0$ e $Y_B = 40$, como se indica na figura. Uma comparação das duas barras da Figura 5.136 mostra que nela atuam exatamente os mesmos esforços, logo que nelas se tem os mesmos esforços solicitantes.

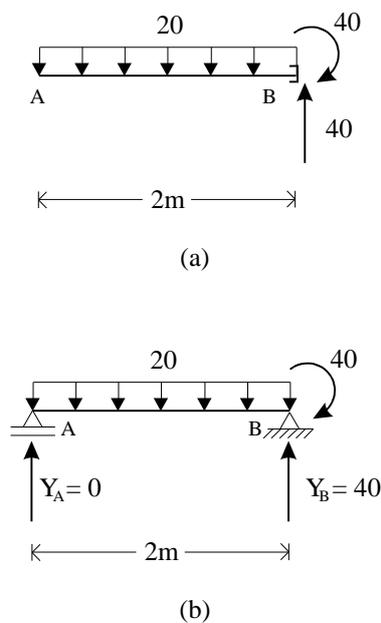
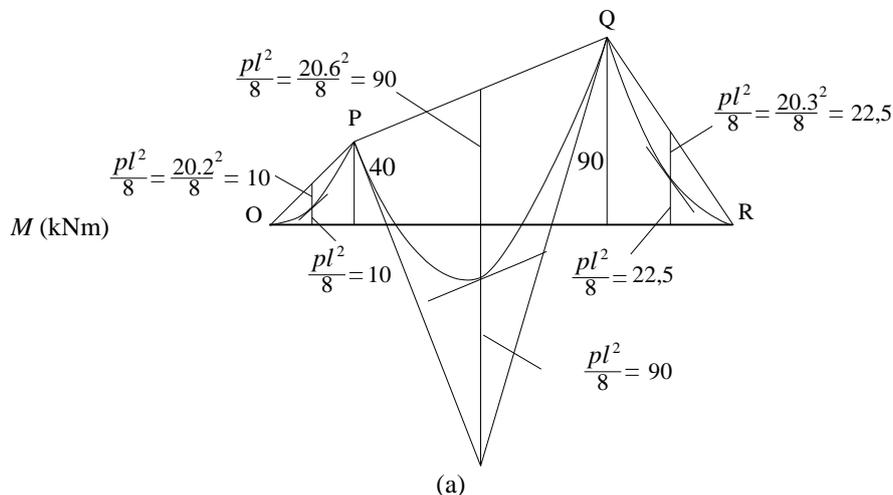


Figura 5.137

Fica assim demonstrado que se pode obter o diagrama de momentos fletores do balanço esquerdo dependurando na linha de fecho OP o diagrama de momentos fletores da viga da Figura 5.136(b). O mesmo se pode provar relativamente ao balanço da direita.

A técnica que acaba de ser descrita será agora empregada para obter o diagrama de momentos fletores procurado, conforme se mostra na Figura 5.138(a). Como nos três trechos os momentos fletores são parabólicos, utiliza-se em seu traçado o procedimento descrito na Nota 5.37.

O diagrama de momentos fletores da viga deste exemplo é então o da Figura 5.138(b).



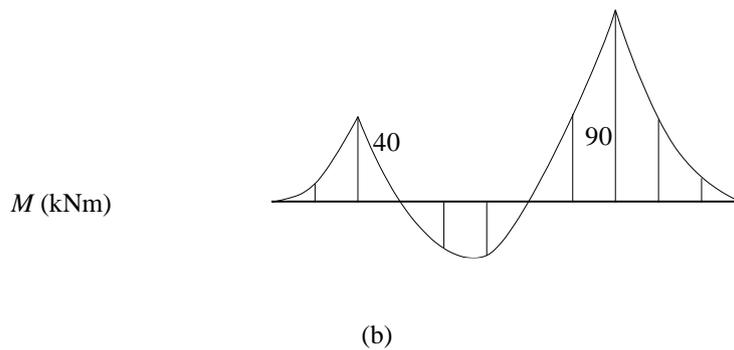


Figura 5.138

Exemplo 5.29

Traçar o diagrama de momentos fletores da viga da Figura 5.139.

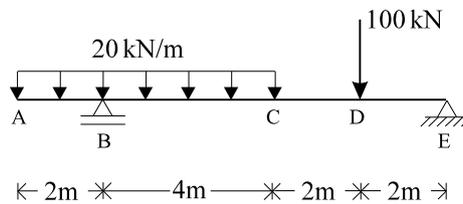


Figura 5.139

Todas as técnicas vistas nos últimos exemplos serão aplicadas na resolução deste problema. Na verdade, os Exemplos 5.25 a 5.28 foram propostos como uma forma de se ir introduzindo aos poucos a técnica geral que será empregada na resolução deste exemplo, e que pode ser utilizada para resolver qualquer outra viga.

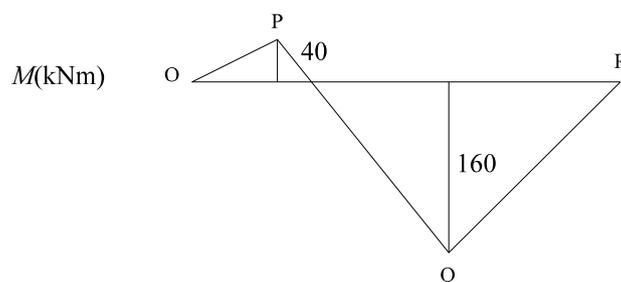


Figura 5.140

As reações de apoio da viga são $Y_B = 130 \text{ kN}$ e $Y_E = 90 \text{ kN}$; os momentos fletores em B e em C são respectivamente -40 kNm e 160 kNm .

Nos pontos A, B, C e E desta viga os momentos fletores são então 0 , -40 kNm , 160 kNm e 0 ; a linha de fecho correspondente a estes momentos é a linha OPQR da Figura 5.140.

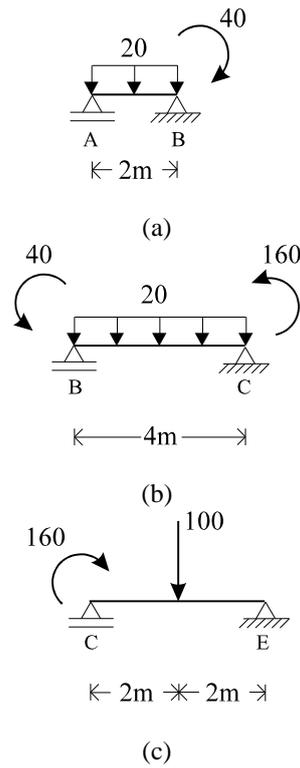


Figura 5.141

Observa-se que o conceito de linha de fecho já apresentado está sendo agora ainda mais generalizado, pois, além dos momentos fletores nas extremidades da viga e nos apoios, está sendo considerado em seu traçado um ponto interno de um tramo. Chega-se assim à definição mais abrangente de linha de fecho de uma viga: é a linha que une as ordenadas dos momentos fletores nas extremidades dos trechos sucessivos em que se supõe dividida esta viga; os momentos fletores nas extremidades e nos apoios da viga devem obrigatoriamente figurar na linha de fecho.

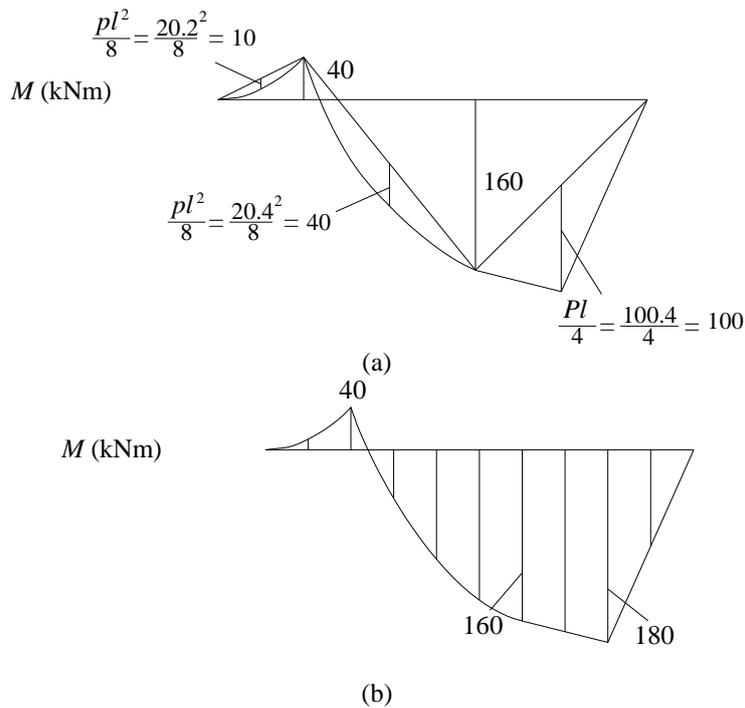


Figura 5.142

A técnica que será utilizada para traçar o diagrama de momentos fletores desta viga é uma generalização da empregada no exemplo anterior, e consiste em se dependurar respectivamente nos trechos OP, PQ e QR da linha de fecho os diagramas de momentos fletores das vigas simplesmente apoiadas das Figuras 5.141(a), (b) e (c), chegando-se assim ao diagrama procurado.

A demonstração de que esta técnica leva aos diagramas de momentos fletores do balanço já foi feita no exemplo anterior; a demonstração de que ela também se aplica aos trechos BC e CE da viga segue caminho inteiramente análogo, e por isso não será feita aqui. Sugere-se que o leitor a faça como exercício.

Na Figura 5.142(a) mostra-se como traçar o diagrama de momentos fletores da viga, que é apresentado na Figura 5.142(b).

Nota 5.38

A técnica geral para o traçado de diagramas de momentos fletores que se acaba de apresentar pode ser resumida da seguinte forma:

- a) Divide-se a viga cujo diagrama de momentos fletores se pretende obter em n trechos delimitados por suas extremidades e por $n - 1$ pontos internos.
- b) Determinam-se os momentos fletores nas extremidades da viga e nos $n - 1$ pontos internos que a dividem em n trechos.
- c) Constrói-se a linha de fecho da viga, que une os momentos fletores nas suas extremidades e nos $n - 1$ pontos internos.
- d) Dependura-se em cada um dos trechos da linha de fecho o diagrama de momentos fletores da viga simplesmente apoiada de mesmo vão e com carregamento igual ao que atua neste trecho da viga.
- e) O diagrama de momentos fletores procurado é então o delimitado pelo eixo das abcissas e pelos diagramas dependurados na linha de fecho.

Exemplo 5.30

A partir dos diagramas de esforços solicitantes, determinar os esforços externos que atuam na viga da Figura 5.143.

Neste exemplo tem-se um problema “ao contrário”, em que se procuram os carregamentos externos a partir dos esforços solicitantes que eles produzem.

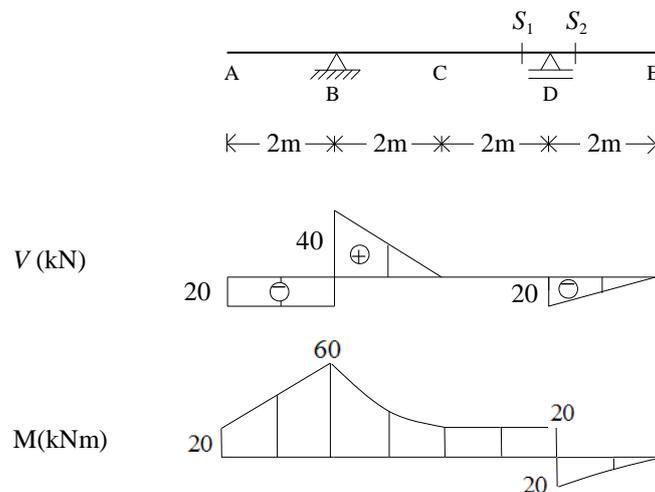


Figura 5.143

Do diagrama de forças cortantes obtêm-se as forças transversais aplicadas na barra. Lembrando que uma descontinuidade no diagrama de forças cortantes indica que neste ponto é aplicada uma força concentrada, verifica-se que existe uma força concentrada para cima de 60 kN aplicada em B e uma de 20 kN para baixo aplicada em D.

Observa-se ainda que na extremidade esquerda da barra há uma força cortante de -20 kN. Isto indica que neste ponto é aplicada uma força concentrada para baixo de 20 kN.

O diagrama de forças cortantes apresenta dois trechos lineares, indicando que neles se tem forças uniformemente distribuídas. Observando que no trecho BC a força cortante varia 40 kN em 2m - de 40 kN em B a 0 kN em C-, conclui-se que nele a força distribuída aplicada é de 20 kN/m. Raciocínio análogo mostra que em DE a força uniformemente distribuída é de 10 kN/m.

Como já se mostrou ao apresentar a “regra do barbante”, os sentidos das forças distribuídas se ligam às concavidades do diagramas de momentos fletores.

Analisando o diagrama de momentos fletores desta viga, verifica-se que no trecho BC o carregamento distribuído é para baixo e que no trecho DE, é para cima.

No trecho BC da viga atua portanto uma força uniformemente distribuída para baixo de 20 kN/m e no trecho DE, uma força uniformemente distribuída para cima de 10 kN/m.

Passando agora ao diagrama de momentos fletores, pergunta-se: que informações ele pode dar que o diagrama de forças cortantes não é capaz de fornecer?

A resposta a esta pergunta é simples: os momentos concentrados aplicados na viga.

Como se sabe, uma descontinuidade no diagrama de momentos fletores indica que neste ponto existe aplicado um momento concentrado. Assim, tem-se no ponto D da viga um momento concentrado de 40 kNm.

Para determinar o sentido deste momento, retira-se da barra o ponto D e examina-se o seu equilíbrio. Para retirá-lo, corta-se a barra em duas seções imediatamente próximas do ponto D, uma à sua esquerda e outra à sua direita, as seções S_1 e S_2 indicadas na Figura 5.143. Os momentos fletores que atuam nestas duas seções em que se fizeram os cortes são respectivamente -20 kNm e 20 kNm, como se depreende do diagrama de momentos fletores e se indica na Figura 5.144.

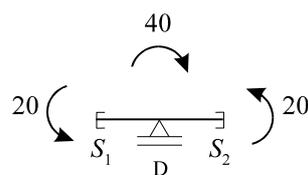


Figura 5.144

Qualquer trecho de uma estrutura em equilíbrio encontra-se em equilíbrio, portanto o trecho de barra indicado na Figura 5.144 está em equilíbrio. Os momentos que nele atuam - os momentos fletores em S_1 e S_2 e o momento externo de 40 kNm aplicado em D - estão então em equilíbrio, de onde se conclui que o momento externo aplicado em D tem o sentido horário, como mostrado na Figura 5.144.

Além do momento aplicado em D, o diagrama de momentos fletores revela que existe um momento de 20 kNm aplicado em A, já que nele se tem um momento fletor tracionando as fibras superiores da barra; este momento aplicado em A tem sentido anti-horário.

Está assim encerrada a determinação dos esforços externos que atuam na viga da Figura 5.143, mostrados na Figura 5.145.

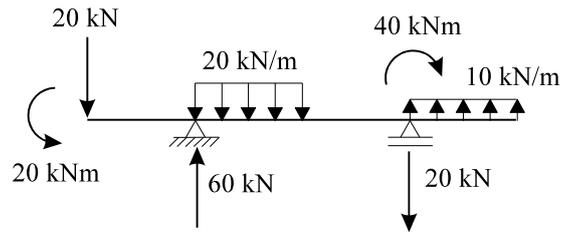


Figura 5.145

Exemplo 5.31

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga poligonal da Figura 5.146.

As reações de apoio desta viga estão indicadas na Figura 5.147.

Tem-se em AB

$$\begin{aligned} N &= -50 \\ V &= -60 \\ M &= -60y \end{aligned} \quad (5.83)$$

e em ED

$$\begin{aligned} N &= 10 \\ V &= 0 \\ M &= 0; \end{aligned} \quad (5.84)$$

obtidas estas expressões, já se deve traçar os respectivos diagramas.

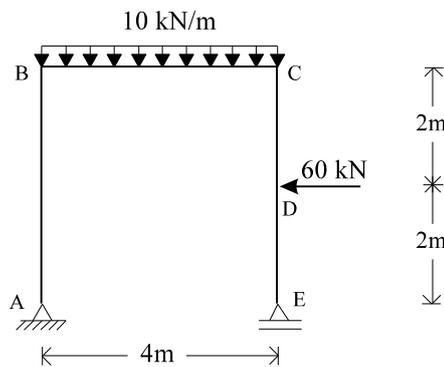


Figura 5.146

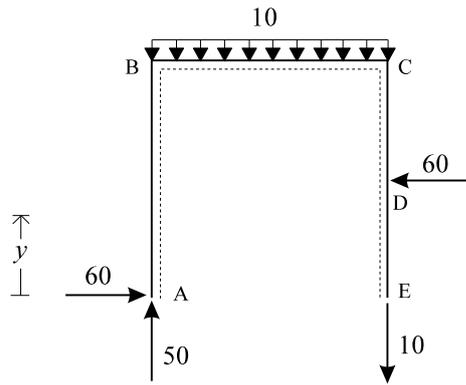


Figura 5.147

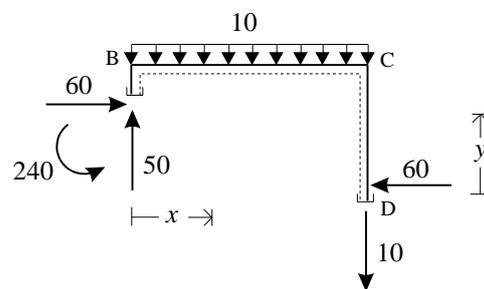


Figura 5.148

Cortando agora as barras verticais nas seções imediatamente abaixo de B e D, tem-se o trecho de estrutura apresentado na Figura 5.148.

Tem-se então em BC

$$N = -60$$

$$V = 50 - 10x \quad (5.85)$$

$$M = -240 + 50x - \frac{10x^2}{2}$$

e em DC

$$N = 10$$

$$V = 60 \quad (5.86)$$

$$M = -60y.$$

Observa-se que no trecho BC a força cortante não se anula, sendo sempre positiva, indicando que nesta barra o momento não apresenta um extremo, sendo então uma função crescente ou decrescente. Analisando as expressões (5.85), verifica-se que ele é sempre crescente, variando de -240 kNm em B para -120 kNm em C.

Os diagramas de esforços solicitantes desta viga poligonal estão na Figura 5.149.

Nota 5.39

Acredito que neste ponto o leitor já esteja sendo capaz de determinar de cabeça alguns dos diagramas dos esforços solicitantes, sem a necessidade de obter suas expressões analíticas.

É o que naturalmente acaba ocorrendo depois que se adquire alguma prática no traçado de diagramas de esforços solicitantes.

Se este já for seu caso, trace de cabeça os diagramas que puder, continuando a utilizar as expressões analíticas nos casos mais complicados.

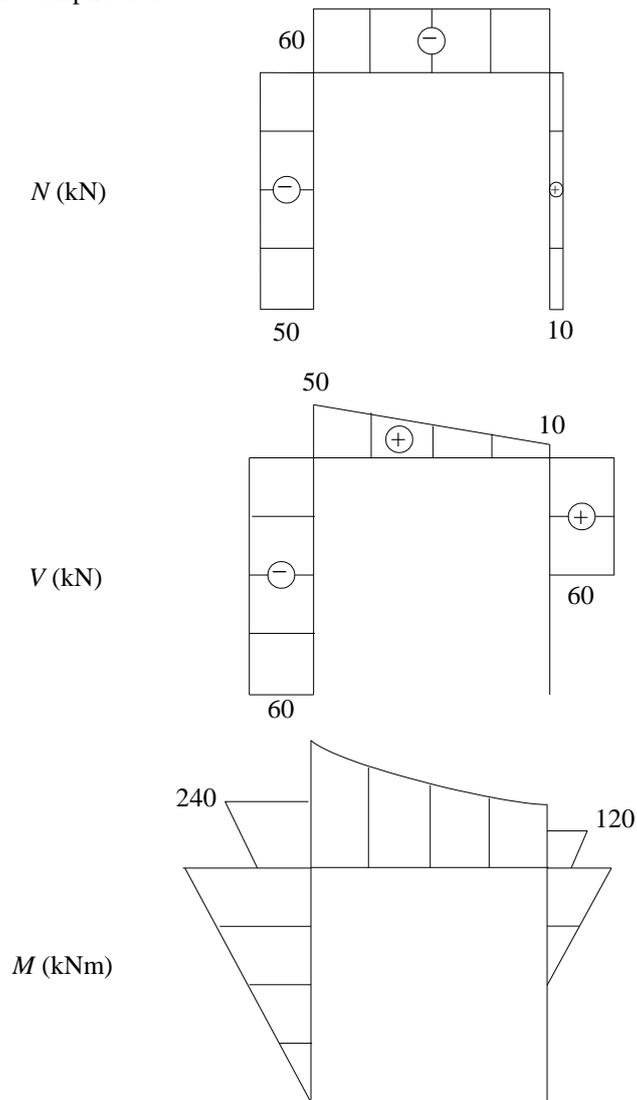


Figura 5.149

Exemplo 5.32

A partir dos diagramas de esforços solicitantes da Figura 5.151, determinar os esforços externos que atuam na estrutura da Figura 5.150.

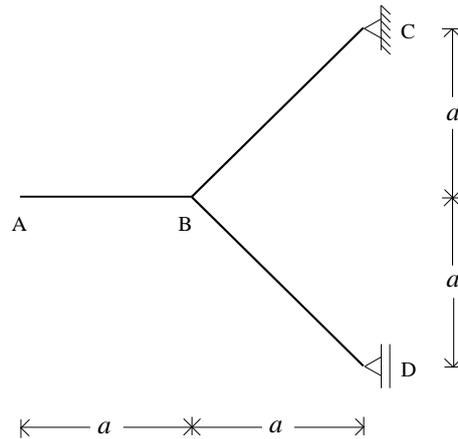


Figura 5.150

Como nos diagramas de forças normais, forças cortantes e momentos fletores não há descontinuidades, não existem esforços concentrados aplicados entre os pontos extremos das três barras que constituem a estrutura.

Como as forças normais e cortantes nestas três barras são constantes, não existem forças distribuídas aplicadas na estrutura.

Nela só podem atuar portanto esforços aplicados nas extremidades de suas barras.

Do diagramas de forças normais verifica-se que em A, C e D estão aplicadas as forças concentradas indicadas na Figura 5.152(a); analogamente, do diagrama de forças cortantes conclui-se que nestes pontos estão aplicadas as forças concentradas mostradas na Figura 5.152(b). Finalmente, do diagrama de momentos fletores nota-se que nas extremidades A, C e D não há momentos aplicados.

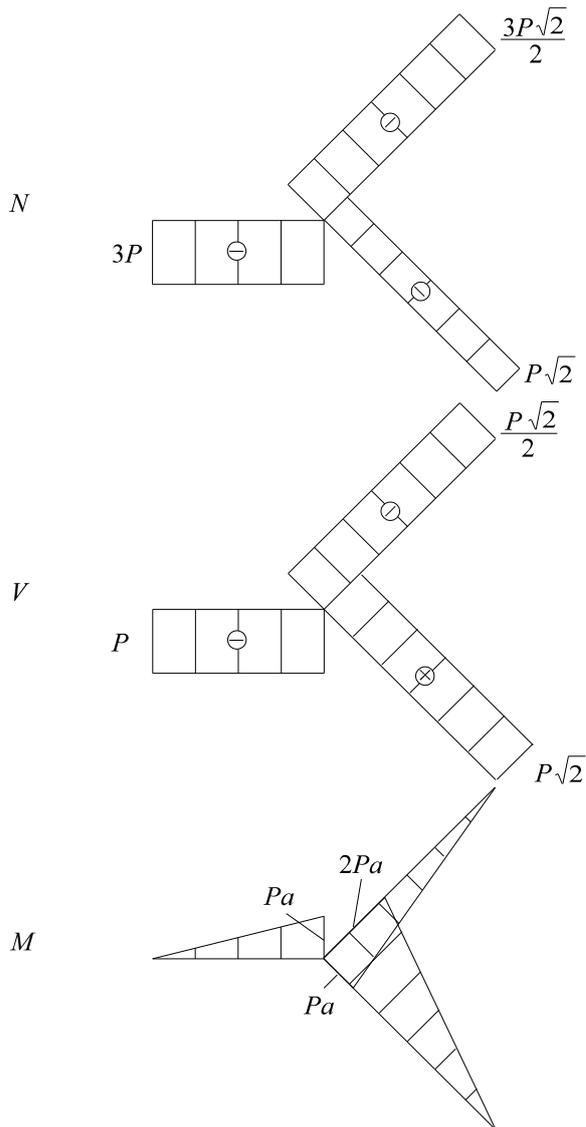


Figura 5.151

As componentes horizontais e verticais dos esforços aplicados nos pontos A, C e D estão apresentadas na Figura 5.152(c).

Resta agora verificar se existem esforços aplicados no nó B.

Há duas formas de se fazer isto: analisando o equilíbrio global da estrutura ou o equilíbrio do nó B. Pode-se, ainda, empregar os dois métodos combinados, encontrando alguns esforços por um deles e os demais pelo outro. Este é o procedimento que será adotado aqui.

Como a estrutura analisada está em equilíbrio, os esforços externos nela aplicados satisfazem as equações de equilíbrio da estática. Examinando a estrutura da Figura 5.152(c), nota-se que para que haja equilíbrio das forças horizontais é necessário aplicar em B uma força horizontal P orientada para a direita; da mesma forma, para que haja equilíbrio das forças verticais, é necessário aplicar em B uma força vertical $2P$ orientada para cima. Estas duas forças estão mostradas na Figura 5.152(d).

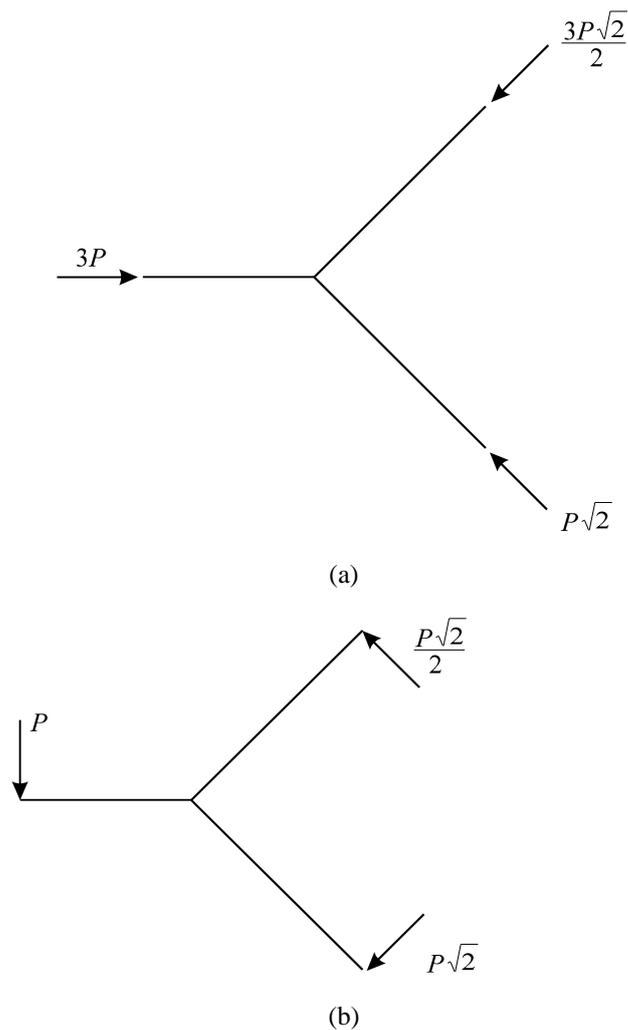
O momento aplicado em B - se houver - pode ser obtido analisando o equilíbrio de momentos em relação a um ponto qualquer. Alternativamente, pode ser determinado por meio do equilíbrio do nó B; é como se irá proceder.

O nó B pode ser retirado da estrutura cortando as três barras que nele chegam em seções imediatamente vizinhas a ele. Em B atuam os esforços mostrados na Figura 5.153.

A análise do equilíbrio das forças horizontais e verticais que atuam neste nó leva às forças já obtidas da Figura 5.152(d).

O equilíbrio de momentos mostra que os esforços indicados na Figura 5.153 já equilibram o nó, nele atuando dois momentos Pa com sentido anti-horário e um momento $2Pa$ com sentido horário. Não há, portanto, um momento externo aplicado em B.

Os esforços externos que atuam na estrutura examinada são então os mostrados na Figura 5.154.



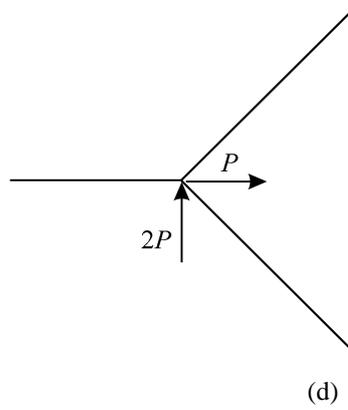
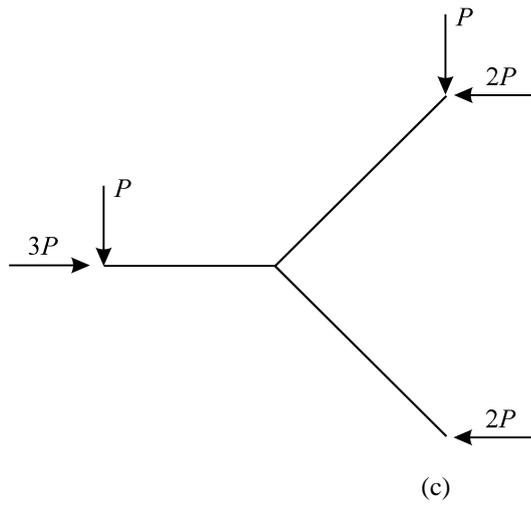


Figura 5.152

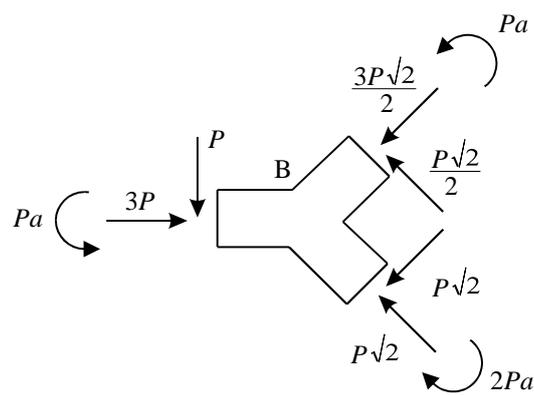


Figura 5.153

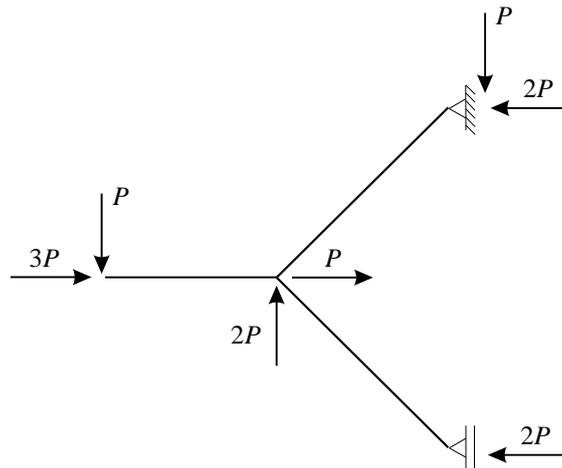


Figura 5.154

Está-se chegando quase ao fim desta apresentação dos diagramas de esforços solicitantes de estruturas planas. Nela optou-se por apresentá-los de forma gradual e didática, procurando esclarecer algumas das dúvidas que costumam surgir sobre o assunto.

É claro que existem estruturas muitíssimo mais complexas que as examinadas neste capítulo, com barras curvas, carregamentos distribuídos complicados etc., cujos diagramas de esforços solicitantes, embora trabalhosos e demorados, são traçados empregando exatamente os procedimentos aqui apresentados.

Para ilustrar esta afirmação, considere-se o problema abaixo.

Exemplo 5.33

Determinar os esforços solicitantes na seção C da estrutura da Figura 5.155.

Trata-se de uma estrutura mais complicada que as vistas anteriormente: o carregamento linearmente distribuído em AB é inclinado, o trecho BD é curvo, etc..

O primeiro passo para resolver este problema é a determinação das reações de apoio, mostradas na Figura 5.156. Sugere-se que o leitor obtenha estas reações como exercício.

Obtidas as reações de apoio, para chegar aos esforços solicitantes em C basta aplicar o teorema fundamental. Antes de fazê-lo, observa-se que em C está aplicada uma força concentrada; ela tem uma componente normal a essa seção transversal e uma componente situada nessa seção transversal. Por esta razão, tanto o diagrama de forças normais como o de forças cortantes apresentam uma descontinuidade em C, sendo então necessário determinar os valores destes esforços em uma seção imediatamente acima de C (seção C⁺) e em uma seção imediatamente abaixo deste ponto (seção C⁻).

É claro que neste problema é mais fácil usar o teorema fundamental reduzindo na seção C a única força aplicada abaixo dela que reduzindo todos os esforços aplicados acima de C. Na Figura 5.157(a) representa-se em tamanho maior o trecho inferior da barra BD.

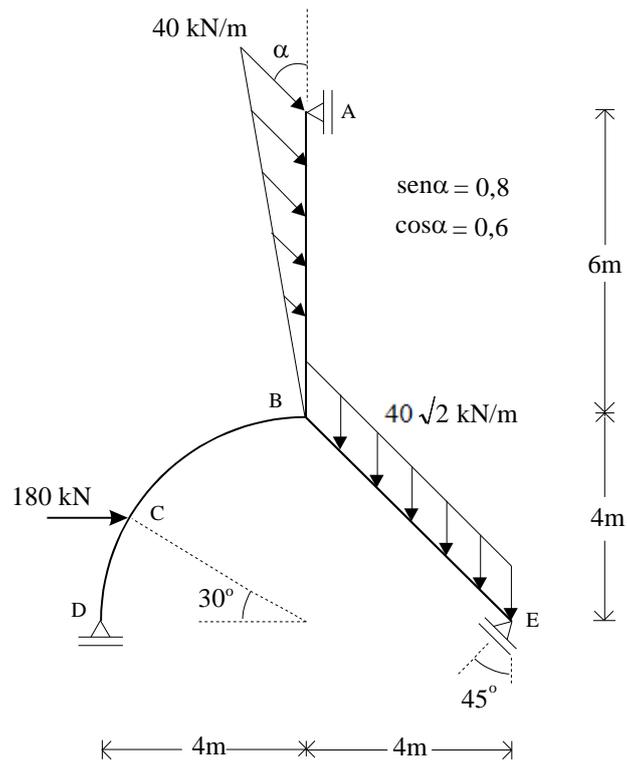


Figura 5.155

Na Figura 5.157(a) rerepresenta-se em tamanho maior o trecho inferior da barra BD.

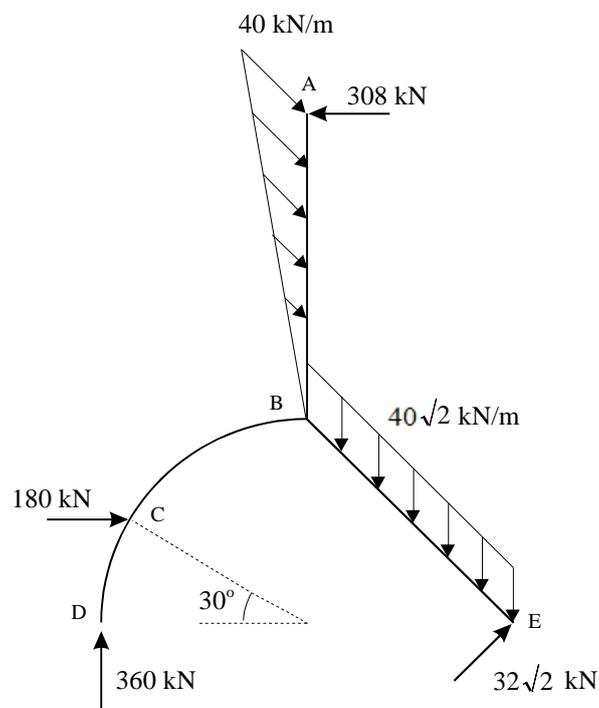
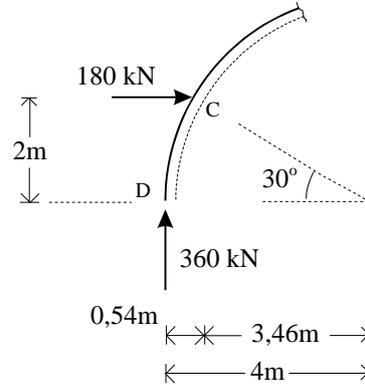


Figura 5.156

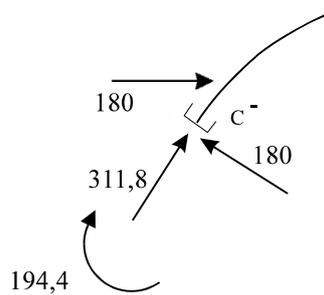
Os esforços solicitantes na seção C^- são obtidos cortando a barra nesta seção, nela reduzindo a única força aplicada abaixo do corte. Os esforços solicitantes decorrentes desta redução estão mostrados na Figura 5.157(b). Nota-se que a força de 180 kN não solicita a seção C^- , por estar aplicada acima dela.

A força de 360 kN na seção C^- (Figura 5.157(b)) não é nem normal nem tangente a essa seção, devendo então ser decomposta segundo estas duas direções, o que se indica na Figura 5.157(c).

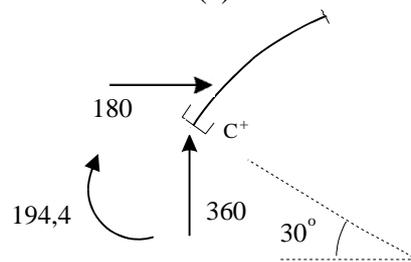


(a)

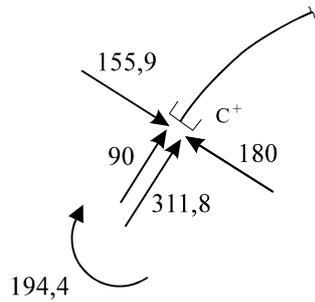
(b)



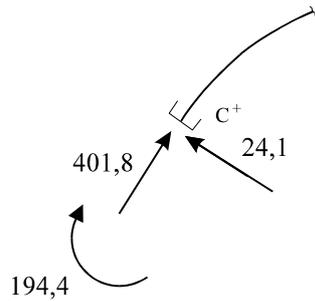
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 5.157

Os esforços solicitantes na seção C^- são então

$$N = -311,8 \text{ kN}$$

$$V = 180 \text{ kN} \quad (5.87)$$

$$M = 194,4 \text{ kNm}$$

Na Figura 5.157(d) apresentam-se os esforços decorrentes da redução em C^+ das forças aplicadas abaixo desta seção, observando-se que ela é solicitada pela força de 180 kN.

A decomposição das duas forças que atuam em C^+ em suas componentes normal e tangente é apresentada na Figura 5.157(e).

Tem-se então na seção C^+ os esforços solicitantes

$$N = -401,8 \text{ kN}$$

$$V = 24,1 \text{ kN} \quad (5.88)$$

$$M = 194,4 \text{ kNm}$$

mostrados na Figura 5.157(f).

Como se previra, em C tanto a força normal como a força cortante apresentam uma descontinuidade.

Neste exemplo foram pedidos os esforços solicitantes em uma única seção transversal da estrutura. Se tivessem sido pedidos os diagramas de esforços solicitantes, utilizar-se-ia o teorema fundamental para obtê-los. Não seria difícil de fazê-lo, mas seria bastante trabalhoso.

Como observação final para encerrar o estudo dos diagramas de esforços solicitantes de estruturas planas, volta-se a mencionar que, à medida que se ganha experiência, pode-se e deve-se passar a traçar os diagramas ou parte deles de cabeça. Regras simples como “onde não existe carregamento distribuído a força cortante é constante e o momento fletor linear”, “o momento fletor na extremidade de uma barra é nulo, a não ser que nela esteja aplicado um momento externo ativo”, “o diagrama de forças cortantes apresenta descontinuidades nos pontos em que são aplicadas forças transversais concentradas” ajudam a traçar os diagramas de cabeça.

Ressalta-se, finalmente, que ao traçar um diagrama de cabeça está-se na verdade usando de cabeça o teorema fundamental.

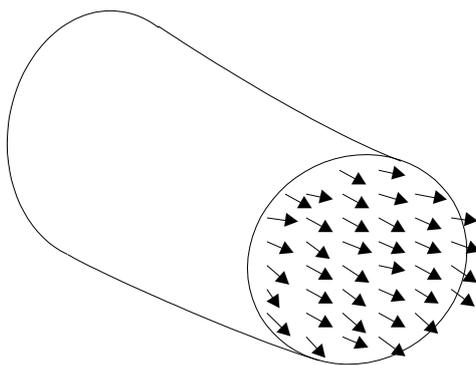
5.3 Diagramas de esforços solicitantes de estruturas espaciais

Nesta seção serão estudados os diagramas de esforços solicitantes das estruturas espaciais, que, como se verá, são mais trabalhosos que os das estruturas planas, por se ter um número maior de esforços solicitantes a determinar.

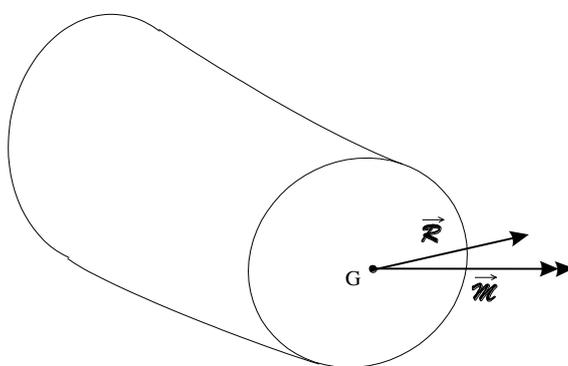
A apresentação dos esforços solicitantes foi feita no Capítulo 3; os pontos mais importantes para esta seção serão rapidamente rerepresentados.

Considere-se uma seção transversal de uma barra em que atuam as tensões indicadas na Figura 5.158(a). A redução dessas tensões no centro de gravidade G desta seção transversal leva aos esforços solicitantes: uma força concentrada \vec{z} e um momento concentrado \vec{m} aplicados em G , indicados na Figura 5.158(b). A decomposição da resultante \vec{z} em suas componentes normal \vec{N} e cortante \vec{V} é mostrada na Figura 5.158(c); a do momento \vec{m} em suas componentes de torção \vec{T} e de flexão \vec{M} , na Figura 5.158(d). A força cortante pode ser ainda decomposta em suas componentes \vec{V}_y e \vec{V}_z segundo os eixos y e z situados na seção transversal da barra; na Figura 5.158(e) estão indicadas as três componentes de \vec{z} . Da mesma forma, o momento fletor \vec{M} pode ser decomposto em suas componentes \vec{M}_y e \vec{M}_z ; as três componentes de \vec{m} estão indicadas na Figura 5.158(f).

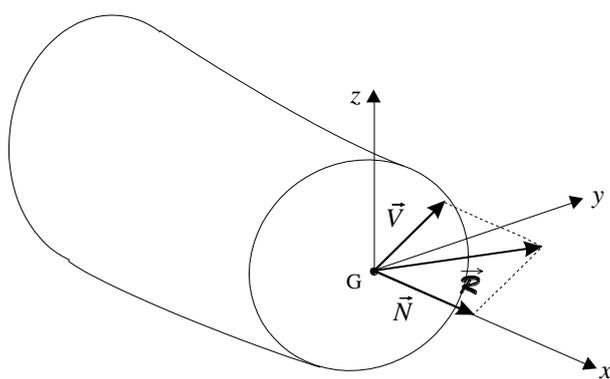
Tem-se então, no caso geral, seis esforços solicitantes a determinar: as três componentes de \vec{z} e as três componentes de \vec{m} , isto é, a força normal \vec{N} , as forças cortantes \vec{V}_y e \vec{V}_z , o momento de torção \vec{T} e os momentos fletores \vec{M}_y e \vec{M}_z .



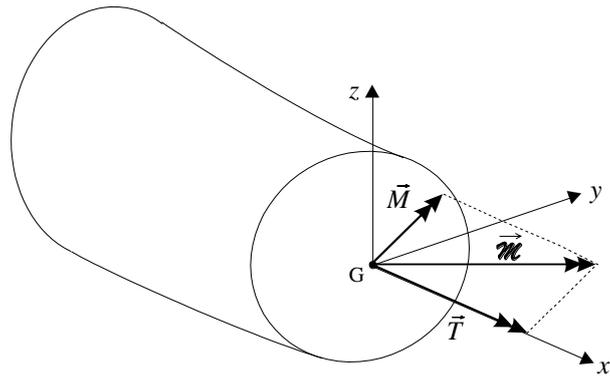
(a)



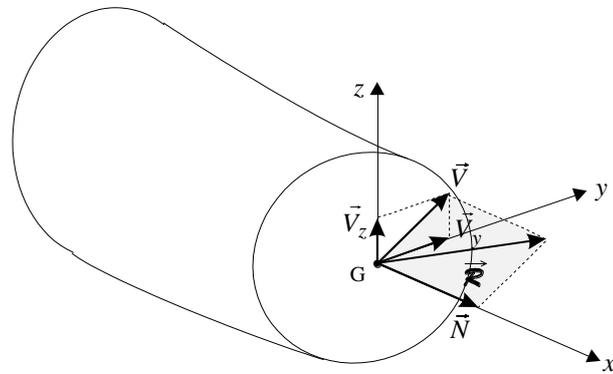
(b)



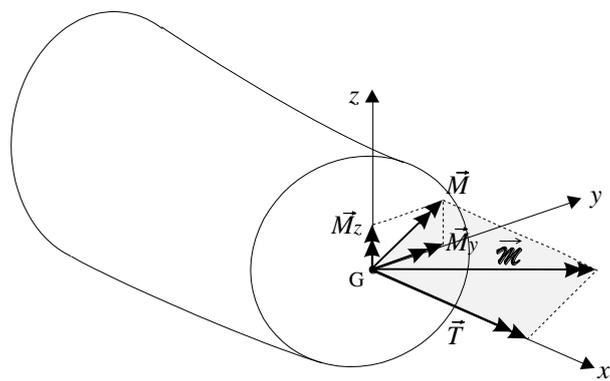
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 5.158

O estudo das estruturas planas - aquelas em que os eixos das barras e os esforços externos que nela atuam pertencem a um mesmo plano - é bastante simplificado pelo fato de nelas só atuarem esforços situados no plano da estrutura.

Adotando como referência dois eixos x e y situados no plano da estrutura, x na direção do eixo da barra e y perpendicular a ele, tem-se para as estruturas planas $\vec{V}_z = \vec{0}$, $\vec{M}_y = \vec{0}$ e $\vec{T} = \vec{0}$ (lembra-se que, embora \vec{M}_y e \vec{T} sejam representados por vetores situados no plano da estrutura, atuam fisicamente em planos perpendiculares a estes vetores).

Os esforços solicitantes das estruturas planas são então a força normal \vec{N} , a força cortante \vec{V}_y e o momento fletor \vec{M}_z . Não havendo perigo de confusão, por simplicidade costuma-se omitir os índices de \vec{V}_y e \vec{M}_z , dizendo-se então que em uma estrutura plana se tem três esforços solicitantes: a força normal \vec{N} , a força cortante \vec{V} e o momento fletor \vec{M} .

5.3.1 Convenção de sinais

No caso geral das estruturas espaciais tem-se as seis componentes de esforços solicitantes, e os diagramas desses esforços devem retratar graficamente estas seis componentes.

Da mesma forma que para as estruturas planas, a determinação dos esforços solicitantes das estruturas espaciais é feita através do teorema fundamental, que é absolutamente geral e se aplica a qualquer estrutura.

Repetindo o que se fez no caso das estruturas planas, atribuem-se sinais aos esforços solicitantes das estruturas espaciais, ligados às ações físicas desses esforços.

Mais uma vez, consideram-se positivas as forças normais de tração e negativas as de compressão.

Também se mantém a convenção de sinais das forças cortantes: são positivas as forças cortantes que giram o trecho de barra em que atuam no sentido horário e negativas as que o giram no sentido anti-horário.

Há, entretanto, um comentário importante a ser feito com relação aos sinais das forças cortantes.

No caso das estruturas planas, como se confunde o plano da estrutura com o do papel em que ela é esquematizada, sabe-se claramente se uma força cortante gira a barra no sentido horário ou no anti-horário.

No caso das estruturas espaciais, como as estruturas são desenhadas em perspectiva, para definir o sentido de rotação impresso por uma força cortante é preciso indicar a posição do observador que a vê.

A Figura 5.159 mostra uma viga espacial, que - conforme se procede no caso das estruturas espaciais - está representada em perspectiva.

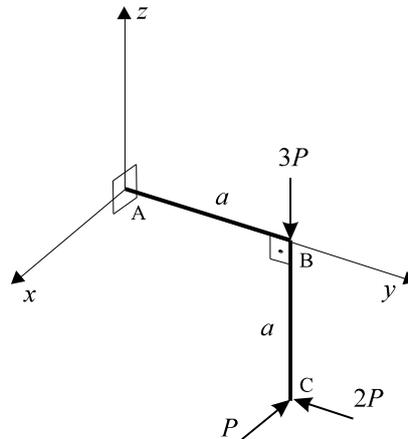


Figura 5.159

Considere-se a barra CB desta viga. Nas suas seções transversais tem-se duas componentes de força cortante, V_x e V_y , decorrentes das duas forças transversais aplicadas em C.

Na Figura 5.160 associam-se dois planos à barra CB: o plano α , paralelo a xz , definido pelo eixo da barra e pela força P , e o plano β , coincidente com yz , definido pelo eixo da barra e pela força $2P$. Indicam-se ainda nesta figura dois observadores: o observador I, cuja linha de visão é perpendicular ao plano β , e o observador II, cuja linha de visão é perpendicular ao plano α .

O observador I claramente vê a força $2P$ girar a barra no sentido horário, logo para ele $V_y = + 2P$; o observador II também não terá nenhuma dúvida em afirmar que a força P gira a barra no sentido anti-horário, logo que $V_x = -P$.

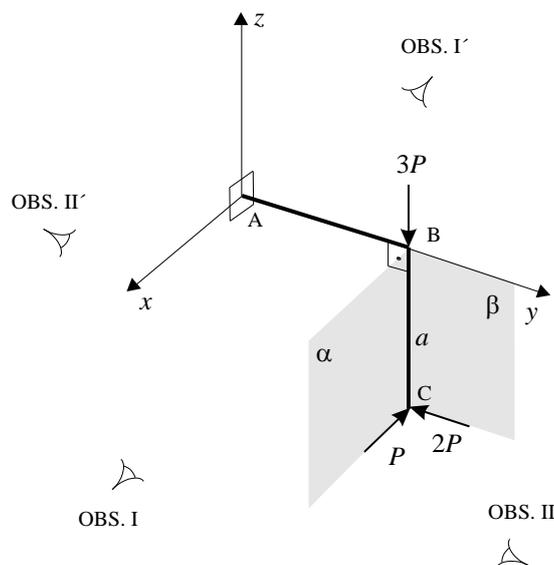


Figura 5.160

Considerem-se agora os observadores I' e II' também indicados na Figura 5.160, cujas linhas de visão também são perpendiculares aos planos β e α , mas que enxergam o outro lado destes planos. O observador I' claramente dirá que a força $2P$ gira a barra no sentido anti-horário, logo que $V_y = -2P$, e o observador II', que P gira a barra no sentido horário, logo que $V_x = P$.

Os observadores I e II e os observadores I' e II' atribuirão portanto sinais opostos às forças cortantes da barra CB.

Por esta razão, ao analisar uma estrutura espacial, deve-se escolher um observador para cada direção, indicá-los na perspectiva que representa a figura e referir a eles os sinais das forças cortantes.

Recomenda-se que sejam evitados observadores pouco naturais, como I' e II', escolhendo-se aqueles que a simples visão da estrutura em perspectiva naturalmente sugere.

Considere-se agora a barra AB. Nas suas seções transversais tem-se duas componentes de forças cortantes: V_x e V_z .

Na Figura 5.161 apresenta-se a estrutura cortada em uma seção genérica da barra BA, e as forças que atuam nesta seção; os momentos que a solicitam não foram indicados para não carregar o desenho. Nesta figura associam-se dois planos à barra BA: o plano β , coincidente com yz , definido pelo eixo da barra e pela força $3P$, e o plano γ , coincidente com xy , definido pelo eixo da barra e pela força P . Indicam-se também dois observadores: o observador I, cuja linha de visão é paralela ao eixo x , e o observador III, cuja linha de visão é paralela ao eixo z . Nota-se que tanto o plano β como o observador I são os já considerados no estudo das forças cortantes da barra CB.

O sinal da força cortante V_x é atribuído pelo observador III, que a vê girar a barra no sentido anti-horário, logo que se tem $V_x = -P$; o da força cortante V_z , pelo observador I, que a vê girar a barra no sentido horário, logo que $V_z = 3P$. Os observadores I' e III', também indicados na Figura 5.161, atribuiriam a estas forças cortantes sinais contrários a esses.

Os sinais das forças cortantes das barras de uma estrutura espacial são portanto atribuídos por observadores que devem ser indicados na representação em perspectiva, voltando-se a recomendar que na escolha destes observadores se elejam os naturalmente sugeridos pela visão da perspectiva da estrutura.

Quanto aos momentos fletores, seus sinais serão fixados por um regra diferente da empregada para as estruturas planas. Como se viu, no caso destas atribuem-se os sinais dos momentos convencioando como positivos os que tracionam um dos lados de uma barra e como negativos os que tracionam o outro lado desta barra.

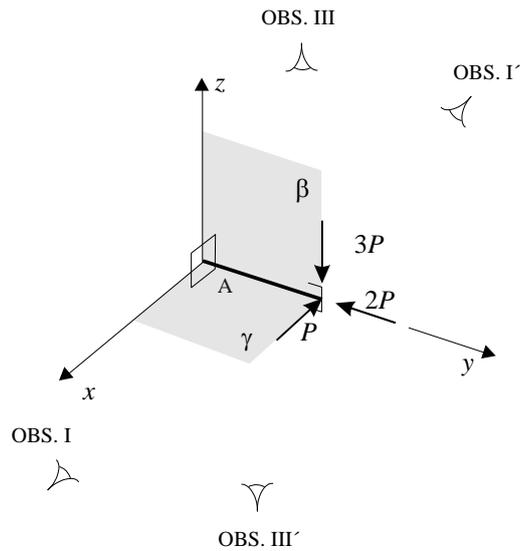


Figura 5.161

Esta convenção de sinais não funciona bem no caso das estruturas espaciais, pois, como em suas barras normalmente se tem duas componentes de momentos fletores, tem-se então que definir duas convenções de sinais. Considere-se, por exemplo, o caso de uma barra em que atuam dois momentos fletores, um no plano vertical e outro no plano horizontal. Relativamente aos momentos fletores no plano vertical, pode-se convencionar como positivos os que tracionam as fibras inferiores e como positivos os que tracionam as fibras superiores; com referência aos momentos fletores no plano horizontal, pode-se convencionar como positivos os que tracionam o lado direito e como negativos os que tracionam o lado esquerdo.

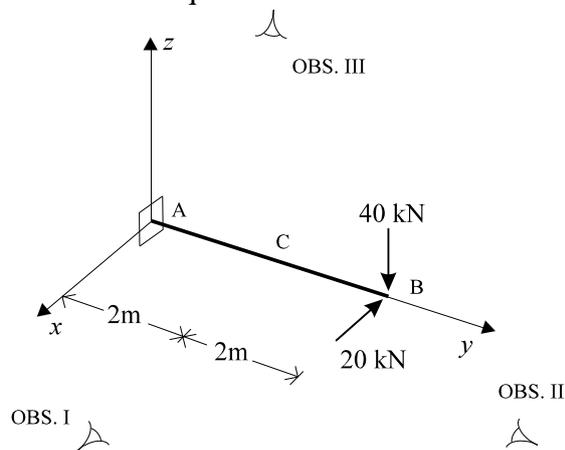


Figura 5.162

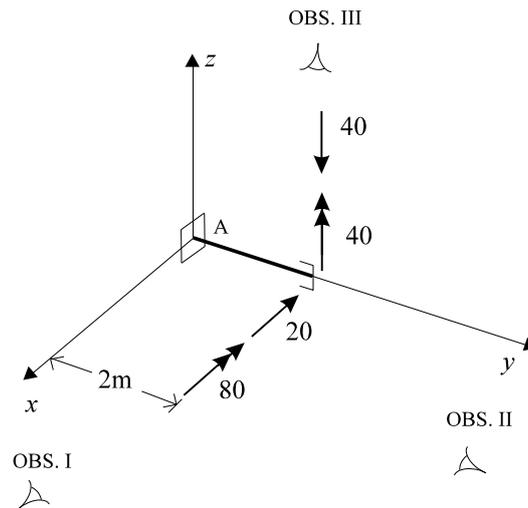


Figura 5.163

No caso das estruturas planas, a convenção de sinais é indicada tracejando-se o lado da barra tracionado pelos momentos positivos. No caso das estruturas espaciais, este tipo de indicação fica inviabilizado, por ser muito difícil tracejar com clareza dois dos lados das barras de uma estrutura desenhada em perspectiva.

Por esta razão, opta-se por outra convenção de sinais, ligada aos eixos coordenados. Esta convenção será introduzida através de um exemplo.

Considere-se a viga da Figura 5.162.

Procuram-se os esforços solicitantes na seção C. Cortando a viga nesta seção e nela reduzindo as forças aplicadas à sua direita, tem-se os esforços mostrados no Figura 5.163.

Tem-se em C duas forças cortantes, $V_x = -20$ kN e $V_z = 40$ kN; tem-se também dois momentos fletores, M_x e M_z . O momento fletor M_x atua no plano vertical e M_x , no plano horizontal.

A convenção de sinais que se adotará para os momentos fletores das estruturas espaciais é a seguinte: consideram-se positivos os momentos fletores que têm os sentidos dos eixos coordenados e negativos os que têm sentidos contrários aos dos eixos coordenados.

De acordo com esta convenção, tem-se em C os momentos fletores $M_x = -80$ kNm e $M_z = 40$ kNm.

Esta convenção de sinais não está ligada à ação física dos momentos fletores, mas sim a sua orientação relativamente aos eixos coordenados. Por esta razão, ela não leva os momentos fletores à esquerda e à direita de um corte a apresentar os mesmos sinais.

Cortando a viga da Figura 5.162 em C e reduzindo nesta seção os esforços aplicados à esquerda do corte, chega-se aos esforços indicados na Figura 5.164.

Tem-se em C os esforços solicitantes $V_x = -20$ kN, $V_z = 40$ kN, $M_x = 80$ kNm e $M_z = -40$ kNm.

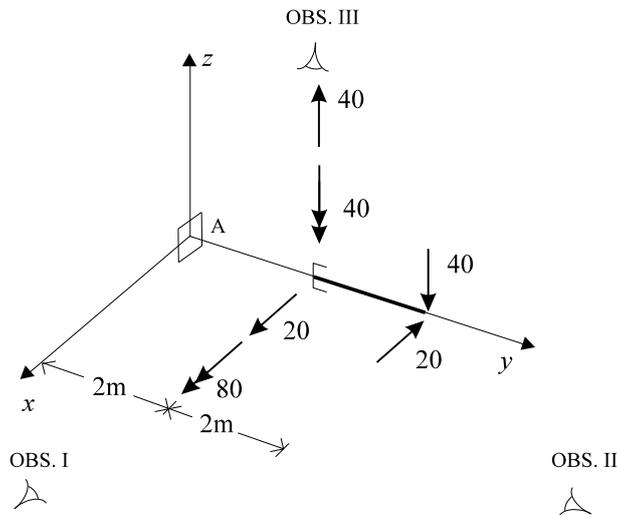
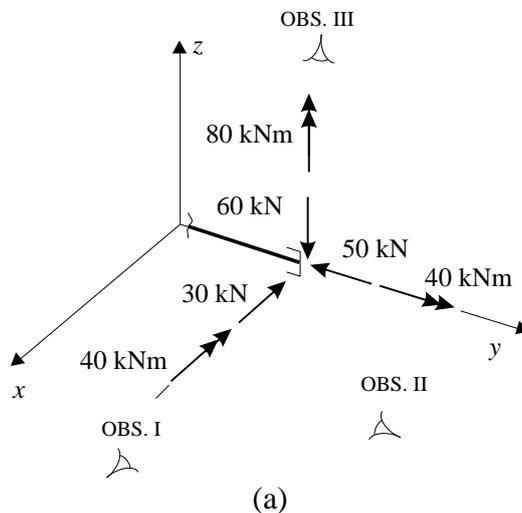


Figura 5.164

Como a convenção de sinais das forças cortantes se prende a sua ação física, tanto à esquerda como à direita do corte em C obtiveram-se exatamente as mesmas forças cortantes, em valor e em sinal. O mesmo não se dá com os momentos fletores, que apresentam sinais opostos nos dois lados do corte.

Esta convenção de sinais de momentos fletores não goza então de uma propriedade que caracteriza as convenções de sinais ligadas às ações físicas dos esforços solicitantes: a de se obter exatamente os mesmos esforços - em valor e em sinal - nos dois lados de um corte.

Não satisfazer esta propriedade não é entretanto uma ocorrência grave no caso dos momentos fletores, já que nos diagramas de momentos fletores não se indica seu sinal, identificando-se o lado tracionado ao desenhar nesse lado o diagrama de momentos fletores da barra.



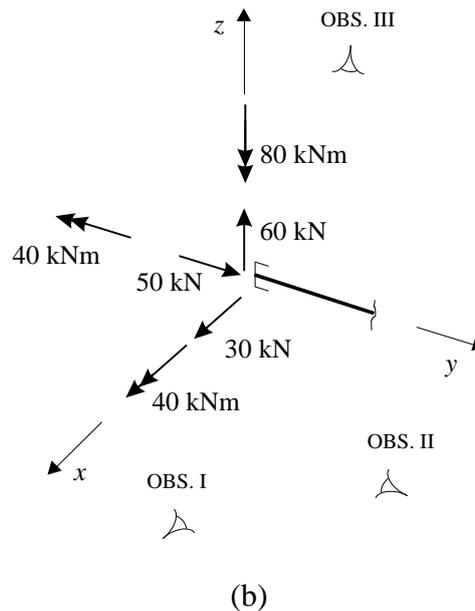


Figura 5.165

Os sinais dos momentos fletores servirão então para determinar os lados tracionados de uma barra, desenhando-se nestes lados os correspondentes diagramas.

Estas idéias deverão ficar mais claras mais adiante, quando forem apresentados alguns exemplos de traçado de diagramas de esforços solicitantes de estruturas espaciais.

Com relação aos momentos de torção, a convenção de sinais que se adotará é a já apresentada na Tabela 5.1: os momentos de torção serão considerados positivos quando o vetor momento tiver o sentido da normal externa à seção transversal em que atua, e negativos quando o vetor momento tiver o sentido contrário ao da normal externa à seção transversal em que atua.

Para ilustrar estas convenções de sinais, mostram-se na Figura 5.165 os esforços solicitantes que atuam em uma seção transversal de uma barra de uma estrutura espacial: na Figura 5.165(a) indicam-se os esforços que atuam no trecho da barra à esquerda do corte e na Figura 5.165(b), os que atuam na parte da barra à direita do corte.

À esquerda do corte tem-se os esforços solicitantes

$$\begin{aligned}
 N &= -50 \text{ kN} \\
 V_x &= -30 \text{ kN} \\
 V_z &= 60 \text{ kN} \\
 M_x &= -40 \text{ kNm} \\
 M_z &= 80 \text{ kNm} \\
 T &= 40 \text{ kNm}
 \end{aligned}
 \tag{5.89}$$

e à direita do corte, os esforços solicitantes

$$N = -50 \text{ kN}$$

$$V_x = -30 \text{ kN}$$

$$V_z = 60 \text{ kN}$$

$$M_x = 40 \text{ kNm}$$

$$M_z = -80 \text{ kNm}$$

$$T = 40 \text{ kNm}$$

(5.90)

Observa-se que nos dois lados do corte se tem exatamente as mesmas forças normais e cortantes, com as mesmas intensidades e sinais, já que as convenções de sinais destes dois esforços estão ligados às suas ações físicas. O mesmo não se dá com a convenção de sinais dos momentos fletores, que leva a se ter nos dois lados do corte esforços solicitantes com as mesmas intensidades, mas sinais opostos.

Nota-se também que se tem exatamente os mesmos momentos de torção nos dois lados do corte, iguais em intensidade e em sinal. Isto, porque a convenção de sinais dos momentos de torção também se prende à sua ação física, embora isto não tenha sido explicitamente mencionado.

Apresentando de outra maneira a convenção de sinais adotada para os momentos de torção, seu significado físico fica bem claro: considera-se positivo o momento de torção que, para um observador olhando externamente a seção transversal em que ele atua, gira esta seção no sentido anti-horário e negativo o momento de torção que, para este observador, gira a seção no sentido horário.

Preferiu-se apresentar esta convenção de sinais da forma vista anteriormente, por ser de mais fácil aplicação que esta outra mais relacionada a seu sentido físico.

5.3.2 Exemplos

Serão vistos agora alguns exemplos de traçado de diagramas de esforços solicitantes de estruturas espaciais.

Exemplo 5.34

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga em balanço da Figura 5.166.

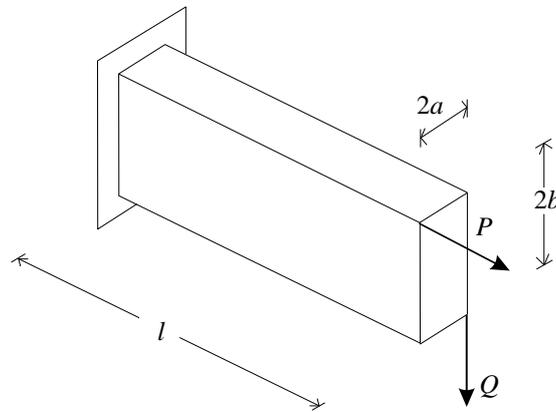


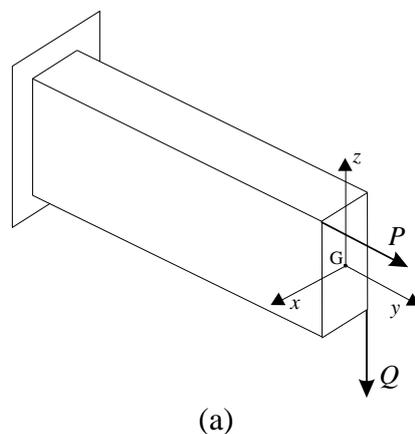
Figura 5.166

Esta viga é uma estrutura espacial, pois não existe um plano que contenha seu eixo e o carregamento que nela atua.

Nos exemplos examinados anteriormente, as barras eram sempre esquematizadas por seus eixos. Neste, está-se apresentando uma perspectiva da viga.

O primeiro passo que se deve dar neste problema é esquematizar a viga por meio de seu eixo e transferir para ele os esforços ativos aplicados, como se mostra na Figura 5.167(b). Lembra-se que reduzir no centro de gravidade G da seção de extremidade livre os esforços nela aplicados é aplicar em G estes esforços e seus momentos em relação aos eixos x , y e z indicados na Figura 5.167(a).

Para determinar as expressões analíticas dos esforços solicitantes desta viga, corta-se a barra em uma seção transversal genérica S , transferindo-se para ela os esforços aplicados à sua direita, como se mostra na Figura 5.168.



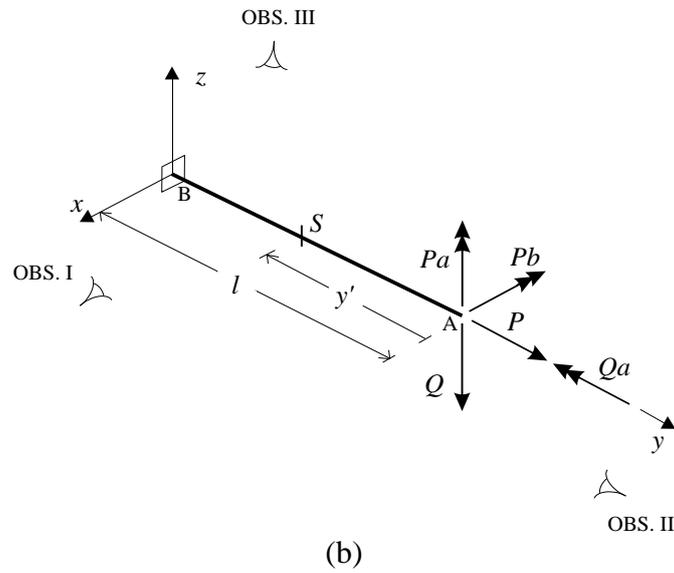


Figura 5.167

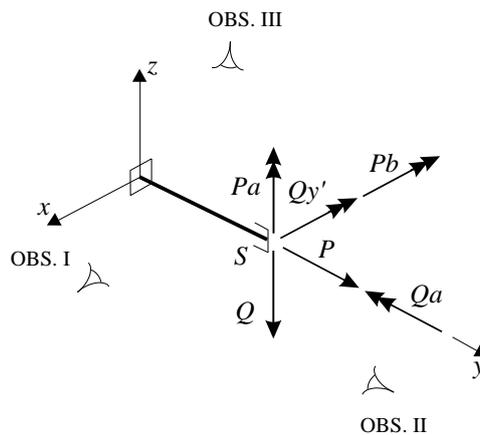


Figura 5.168

Em uma estrutura espacial pode-se ter seis componentes de esforços solicitantes: força normal, duas componentes de força cortante, duas componentes de momento fletor e momento de torção.

Como esta viga tem a direção do eixo y, os esforços solicitantes que se pode ter em S são N , V_x , V_z , M_x , M_z e T .

Da Figura 5.168, obtêm-se suas expressões analíticas:

$$N = P$$

$$V_x = 0$$

$$V_z = Q \tag{5.91}$$
$$M_x = -Pb - Qy'$$

$$M_z = Pa$$

$$T = -Qa.$$

O sinal de V_z é dado pelo observador I; os sinais dos momentos fletores, pelos eixos coordenados.

Os diagramas de esforços solicitantes das estruturas espaciais são desenhados em perspectiva. O das forças normais pode ser colocado em qualquer posição: no plano vertical - acima ou abaixo do eixo -, no plano horizontal - à esquerda ou à direita do eixo - ou mesmo em um plano oblíquo; optou-se neste exemplo por traçá-lo no plano vertical, acima do eixo, como se mostra na Figura 5.169. Lembra-se que nos diagramas de forças normais o sinal deve ser indicado.

Os diagramas das forças cortantes devem ser desenhados nos planos em que elas atuam. No caso desta viga, caso a força cortante V_x não fosse nula, seu diagrama deveria ser traçado no plano horizontal; já o da força cortante V_z , deve ser desenhado no plano vertical. Estes diagramas podem ser desenhados em qualquer um dos lados do eixo, desde que no plano em que atua a correspondente força cortante. Neste exemplo, opta-se por traçar o diagrama de V_z acima do eixo, como se observa na Figura 5.169. Lembra-se que nos diagramas de forças cortantes também se indica seu sinal.

Mais uma vez, o único diagrama que não permite nenhuma flexibilidade de traçado é o dos momentos fletores. Os diagramas dos momentos fletores devem ser desenhados no plano em que atuam, e no lado tracionado da barra.

No caso desta viga, o diagrama do momento fletor M_x deve ser desenhado no plano vertical e, como traciona as fibras superiores da barra, acima do eixo. O do momento fletor M_z , no plano horizontal; como traciona o lado esquerdo da barra, neste lado do eixo.

Não se indicam os sinais nos diagramas de momentos fletores. O diagrama de momentos fletores da viga analisada está apresentado na Figura 5.169.

No caso do diagrama de momentos de torção, tem-se a mesma liberdade que no das forças normais: pode ser indicado em qualquer posição. Opta-se neste exemplo por desenhá-lo no plano horizontal, como se mostra na Figura 5.169. Nos diagramas de momentos de torção indica-se seu sinal.

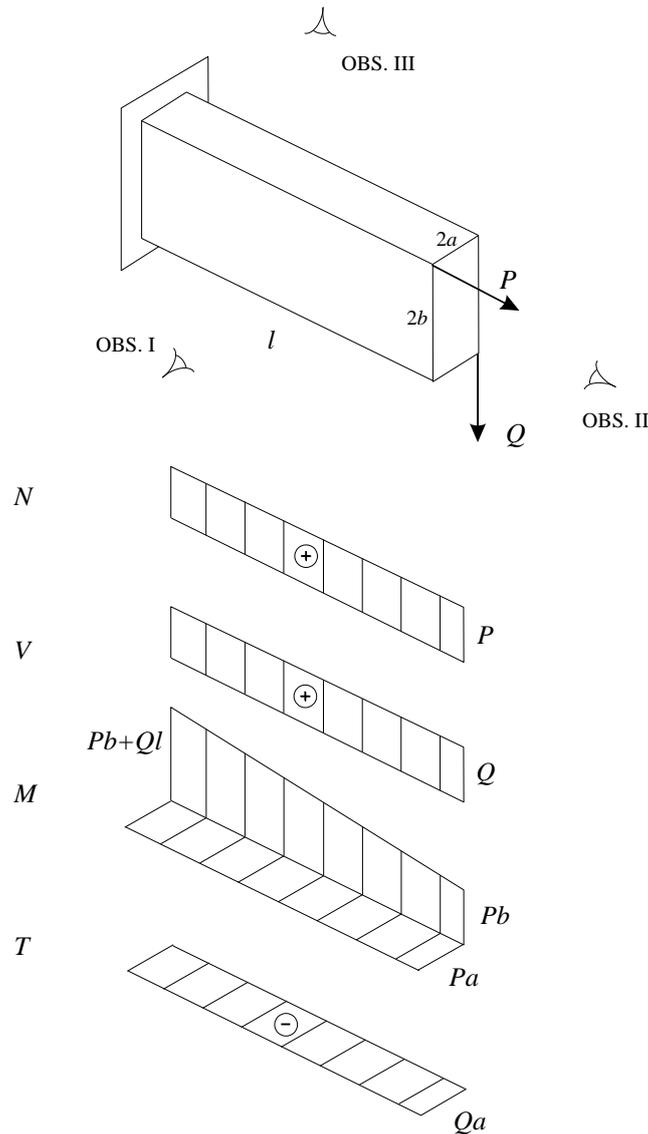


Figura 5.169

Nota 5.40

Como se comentou, no caso das estruturas espaciais tem-se duas componentes de força cortante e de momento fletor. Deve-se traçar os gráficos de ambas componentes da força cortante em um mesmo diagrama de forças cortantes; da mesma forma, deve-se traçar os gráficos das duas componentes do momento fletor em um mesmo diagrama.

Isto, porque dessa maneira torna-se mais fácil determinar as seções mais perigosas da estrutura, aquelas em que se tem as combinações mais desfavoráveis de esforços solicitantes.

Nota 5.41

No esquema da estrutura que precede os diagramas de esforços solicitantes e sob o qual estes são apresentados, deve-se indicar os observadores utilizados para atribuir os sinais das forças cortantes, pois é essa identificação que confere sentido aos sinais presentes no diagrama de forças cortantes. É o que se fez na Figura 5.169.

A fim de não congestionar o desenho, quando forem utilizados os observadores naturais - como nestes exemplos - se passará a omitir a identificação dos observadores no esquema da estrutura que precede os diagramas de esforços solicitantes.

Exemplo 5.35

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga engastada da Figura 5.170.

Sugere-se ao leitor que, antes de obter as expressões analíticas dos esforços solicitantes de uma estrutura como essa, examine-a mentalmente, procurando chegar a seus esforços solicitantes. Na situação particular desta estrutura, que é muito simples, talvez o leitor já possa até traçar todos os diagramas diretamente. Não é difícil ver que nas duas barras desta viga não há forças normais, que se tem apenas forças cortantes verticais, que os momentos fletores também atuam nos planos verticais, que só há torção na barra AB.

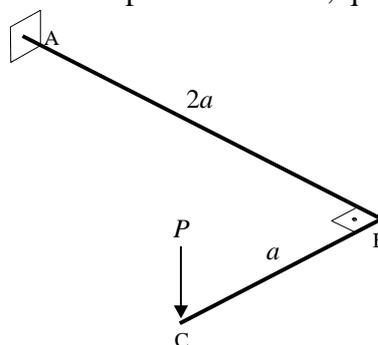


Figura 5.170

À medida que se for adquirindo maior experiência, os diagramas ou partes deles poderão ser obtidos diretamente, sem o auxílio de expressões analíticas.

Mais uma vez, entretanto, apresenta-se a resolução sistematizada.

Para determinar os esforços solicitantes no trecho CB corta-se a barra em uma seção genérica S_1 , transferindo-se para a seção do corte a força aplicada à sua esquerda, como se mostra na Figura 5.171.

Sendo a barra paralela ao eixo x , nela pode-se ter os esforços solicitantes N , V_y , V_z , M_y , M_z e T .

Da Figura 5.171, obtêm-se suas expressões analíticas:

$$\begin{aligned} N &= 0 \\ V_y &= 0 \\ V_z &= -P \\ M_y &= Px' \end{aligned} \tag{5.92}$$

$$M_z = 0$$

$$T = 0.$$

Como de hábito, os gráficos desses esforços já devem ser traçados, passando-se em seguida à barra BA. Cortando-a em uma seção genérica S_2 e transferindo para esta seção a única força aplicada à sua direita, obtêm-se os esforços solicitantes indicados na Figura 5.172.

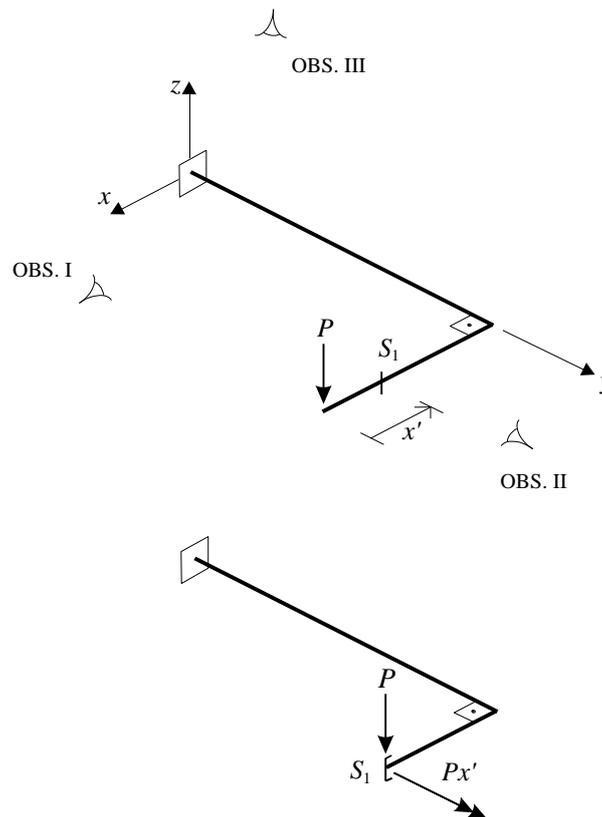


Figura 5.171

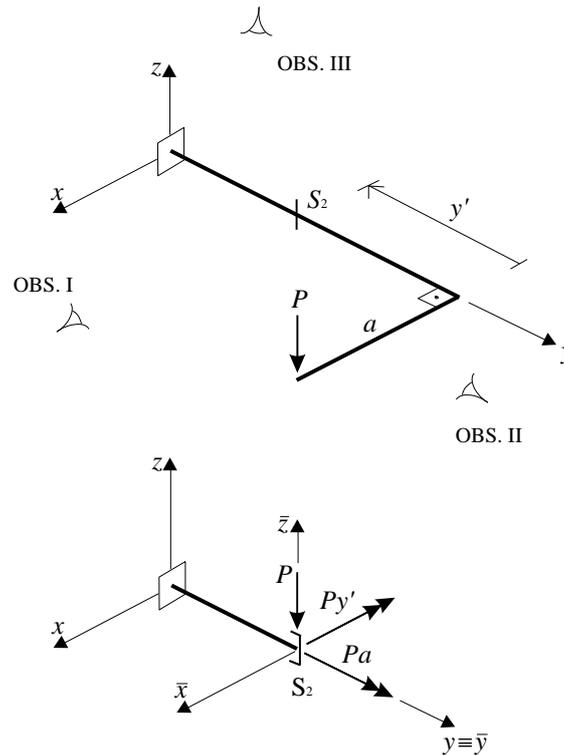


Figura 5.172

Lembra-se que reduzir em S_2 a força P aplicada em C é aplicar em S_2 esta força e os seus momentos em relação aos eixos \bar{x} , \bar{y} e \bar{z} indicados na Figura 5.172.

As expressões analíticas dos esforços solicitantes em BA são

$$\begin{aligned}
 N &= 0 \\
 V_x &= 0 \\
 V_z &= P \\
 M_x &= -Py' \\
 M_z &= 0 \\
 T &= Pa.
 \end{aligned}
 \tag{5.93}$$

Os diagramas de esforços solicitantes desta viga estão na Figura 5.173.

Nota 5.42

Também no caso das estruturas espaciais pode-se simplificar a obtenção dos esforços solicitantes empregando um procedimento já aplicado às estruturas planas.

Uma vez obtidos os esforços solicitantes da barra CB e traçados seus diagramas, pode-se retirar esta barra da estrutura, cortando-a em uma seção imediatamente à esquerda de

B, nela reduzindo a única força aplicada à sua esquerda, como se mostra na Figura 5.174.

Pode-se, agora, obter com facilidade os esforços solicitantes da barra BA.

Observa-se que o momento Pa em B, que é fletor na barra CB, se transfere para a barra BA como momento de torção.

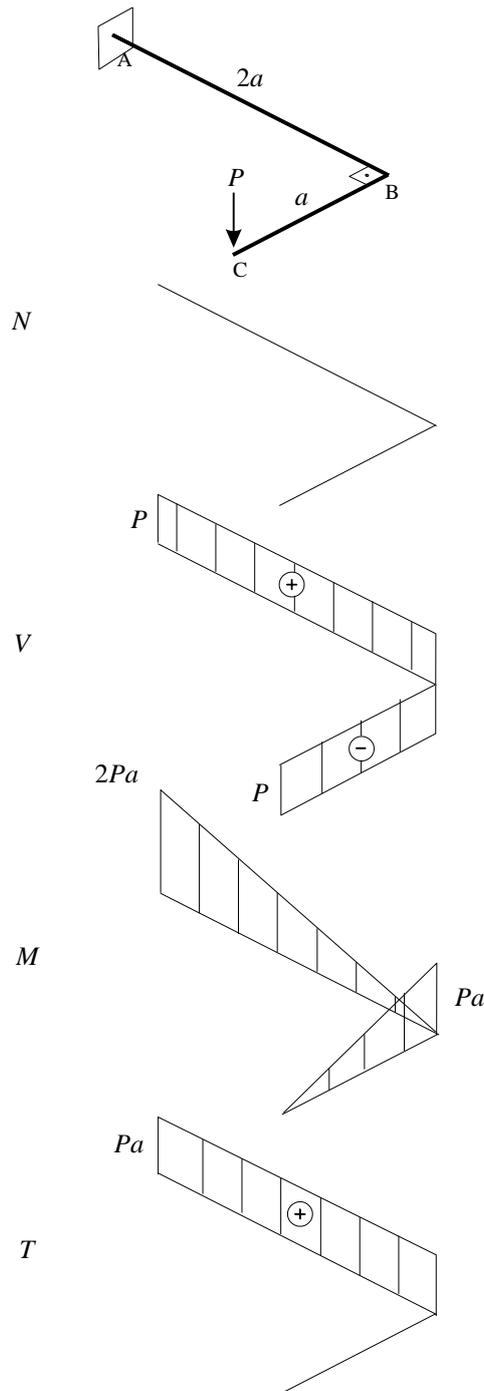


Figura 5.173

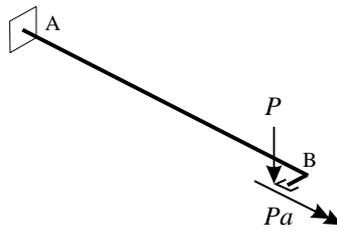


Figura 5.174

Exemplo 5.36

Determinar os esforços solicitantes na seção *E* da estrutura da Figura 5.175.

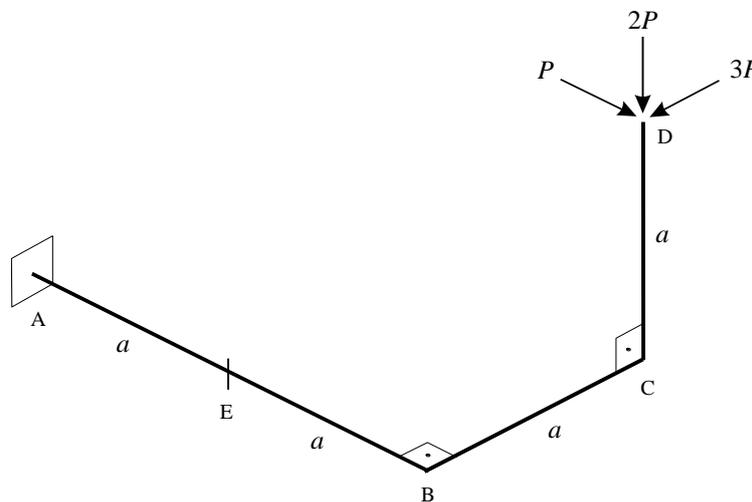


Figura 5.175

Como se procuram os esforços solicitantes apenas na seção *E*, basta cortar a estrutura nesta seção, nela reduzindo todos os esforços aplicados de um dos lados do corte.

Tratando-se de uma viga engastada, pode-se transferir para a seção do corte os esforços aplicados no trecho que contém a extremidade livre, pois assim não se terá que determinar as reações de apoio da viga. É o que se fará.

Na Figura 5.176(a) mostra-se a estrutura cortada em *E*: o trecho à esquerda do corte com linha cheia e o trecho à direita com linha tracejada.

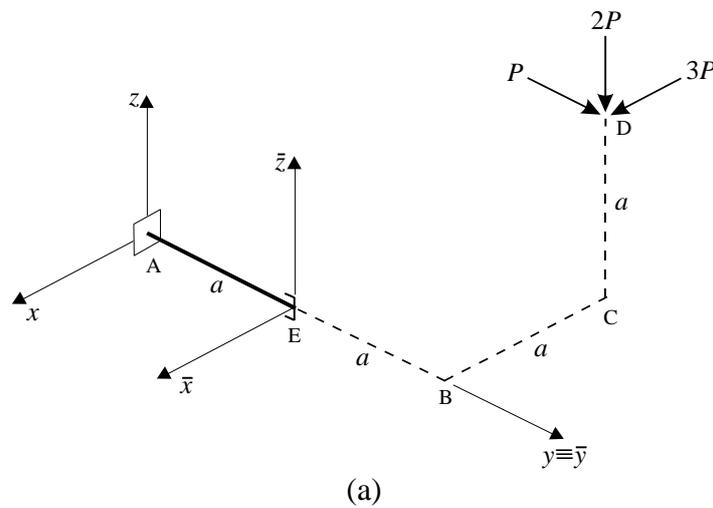
Reduzir na seção *E* as forças que atuam em *D* é nela aplicar estas forças e seus momentos em relação aos eixos \bar{x} , \bar{y} e \bar{z} da Figura 5.176(a).

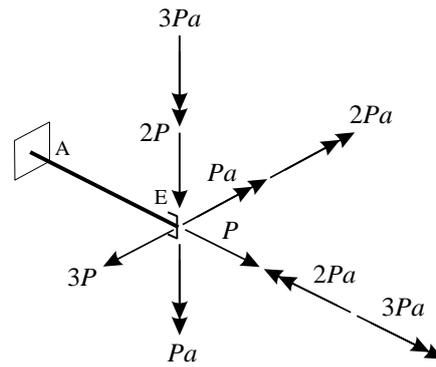
Esta redução leva aos esforços da Figura 5.176(b).

Tem-se então na seção E :

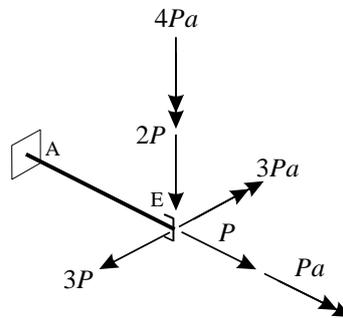
$$\begin{aligned}
 N &= P \\
 V_x &= 3P \\
 V_z &= 2P \\
 M_x &= -3Pa \\
 M_z &= -4Pa \\
 T &= Pa.
 \end{aligned}
 \tag{5.94}$$

Estes esforços estão na Figura 5.176(c).





(b)



(c)

Figura 5.176

Nota 5.43

Neste exemplo - e também nos dois anteriores -, por se tratar de uma viga engastada, optou-se por reduzir na seção do corte os esforços aplicados no trecho da estrutura que contém a extremidade livre, pois assim não é preciso calcular as reações de apoio.

É claro que se poderia ter feito o contrário: reduzir na seção do corte os esforços aplicados no trecho que contém o engastamento, o que exigiria a determinação das reações de apoio, demandando algum trabalho adicional.

No caso particular desta viga, as reações de apoio foram determinadas no Exemplo 1.15. Sugere-se que, como exercício, o leitor obtenha os esforços solicitantes na seção E nela reduzindo os esforços externos aplicados à sua esquerda, comparando os esforços encontrados com os da Figura 5.176(c).

Exemplo 5.37

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da estrutura da Figura 5.177.

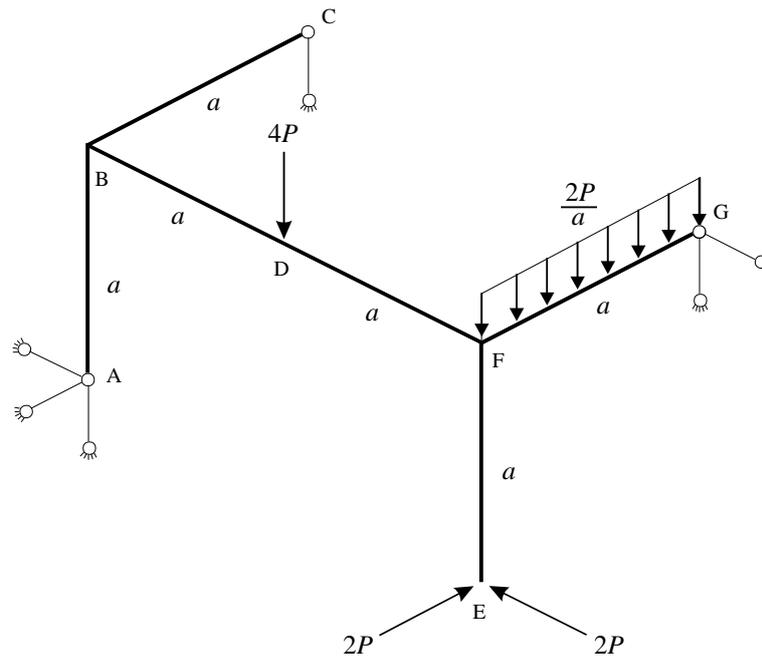


Figura 5.177

No caso desta estrutura não se pode obter os esforços solicitantes sem determinar as reações de apoio; só os esforços solicitantes da barra EF podem ser encontrados sem conhecer as reações de apoio.

Estas reações foram determinadas no Exemplo 1.16, estando reproduzidas na Figura 5.178.

Os diagramas de esforços solicitantes das barras AB, CB e EF são muito simples, podendo ser obtidos mentalmente. Pede-se ao leitor que procure determiná-los desta forma, verificando suas conclusões por meio dos diagramas apresentados na Figura 5.182.

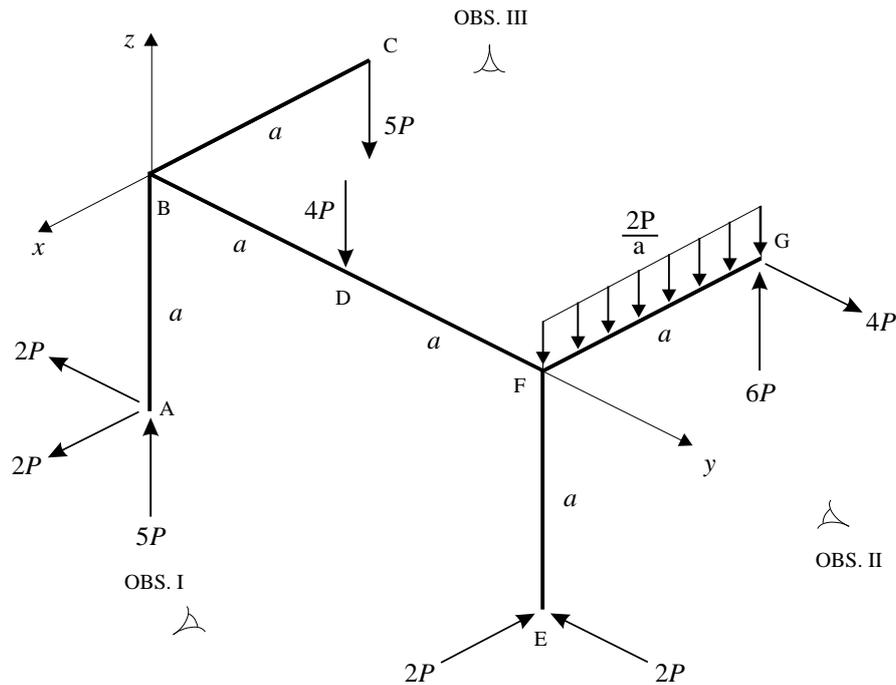


Figura 5.178

A análise da barra GF é um pouco mais complexa. Embora ela também possa ser feita mentalmente, será aqui apresentada de forma explícita.

Cortando a barra GF em uma seção genérica S_1 e nela reduzindo as forças aplicadas à sua direita, chega-se aos esforços mostrados na Figura 5.179(b).

Tem-se então na barra GF:

$$\begin{aligned}
 N &= 0 \\
 V_y &= 4P \\
 V_z &= \frac{2P}{a} \bar{x} - 6P \\
 M_y &= 6P\bar{x} - \frac{P\bar{x}^2}{a} \\
 M_z &= -4P\bar{x} \\
 T &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.95}$$

Os correspondentes diagramas estão mostrados na Figura 5.182. Como a força cortante vertical não se anula neste trecho de barra, o momento fletor vertical não apresenta extremo entre G e F.

Falta agora examinar a barra BF. Antes de fazê-lo analiticamente, vai-se proceder a uma análise qualitativa dos esforços solicitantes.

Observando as forças aplicadas nas barras AB e CB depreende-se que:

- na barra BF há uma força de tração $2P$, decorrente da força $2P$ paralela a y aplicada em A;
- na barra BF há torção, decorrente da força $5P$ aplicada em C e da força $2P$ paralela a x aplicada em A;
- a força $2P$ paralela a x aplicada em A produz flexão horizontal da barra BF, tracionando as fibras opostas ao observador I;
- a força $2P$ paralela a y aplicada em A produz flexão vertical da barra BF, tracionando suas fibras inferiores;
- as forças $5P$ aplicadas em A e C produzem individualmente flexão vertical em BF; estas flexões, que são iguais em intensidade, são opostas em sua ação física, cancelando-se mutuamente: a força $5P$ aplicada em C traciona as fibras superiores de BF, enquanto que a força $5P$ aplicada em A traciona suas fibras inferiores;
- só há, portanto, flexão vertical em BF decorrente da ação da força $2P$ paralela a y aplicada em A.

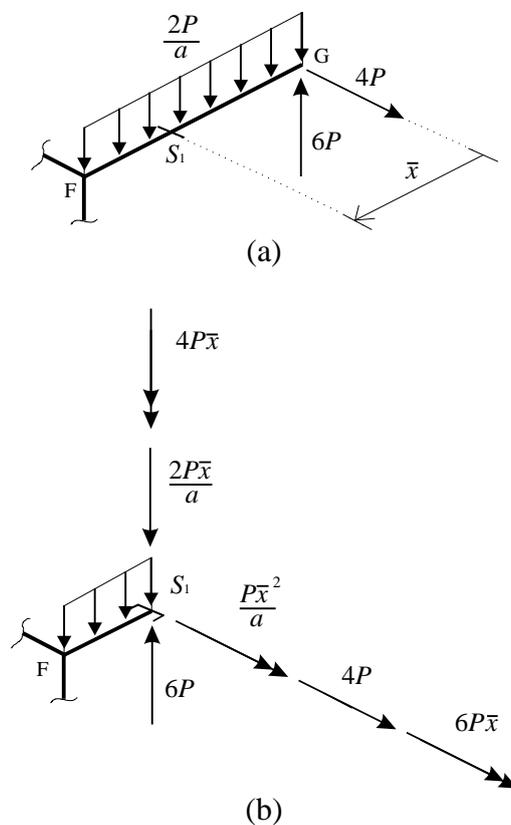


Figura 5.179

Análise semelhante a esta também poderia ser feita considerando as forças aplicadas em EF e GF. Basta, entretanto, fazer uma delas para ter uma idéia de como são os esforços solicitantes em BF.

Passa-se agora a sua determinação analítica. Como as barras AB e CB já foram examinadas, serão retiradas da estrutura, cortando-se a barra AB imediatamente abaixo de B e a barra CB imediatamente à direita de B, transferindo-se para estas seções os esforços externos aplicados nas barras removidas, como indicado na Figura 5.180(a).

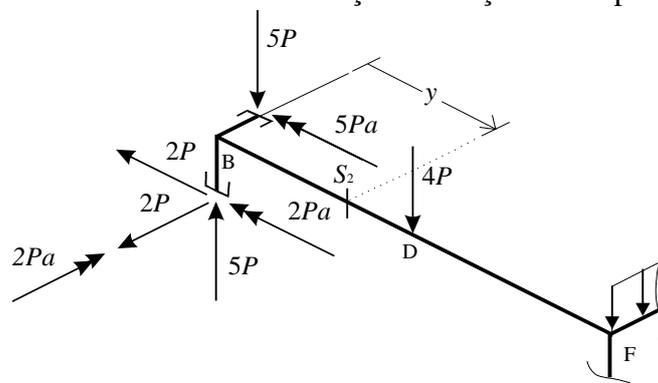
Reduzindo os esforços aplicados em B na seção genérica S_2 da barra BD - Figura 5.180(b) -, determinam-se os esforços solicitantes nesta barra - Figura 5.180(c).

Tem-se em BD:

$$\begin{aligned}
 N &= 2P \\
 V_y &= -2P \\
 V_z &= 0 \\
 M_y &= -2Pa \\
 M_z &= 2Py \\
 T &= 7Pa.
 \end{aligned}
 \tag{5.96}$$

Os correspondentes diagramas estão na Figura 5.182.

Como regra geral, deve-se ter um único diagrama para cada um dos esforços solicitantes, no qual se indicam os esforços atuantes em todas as suas barras. Isto, porque este procedimento facilita a identificação das seções mais perigosas da estrutura.



(a)

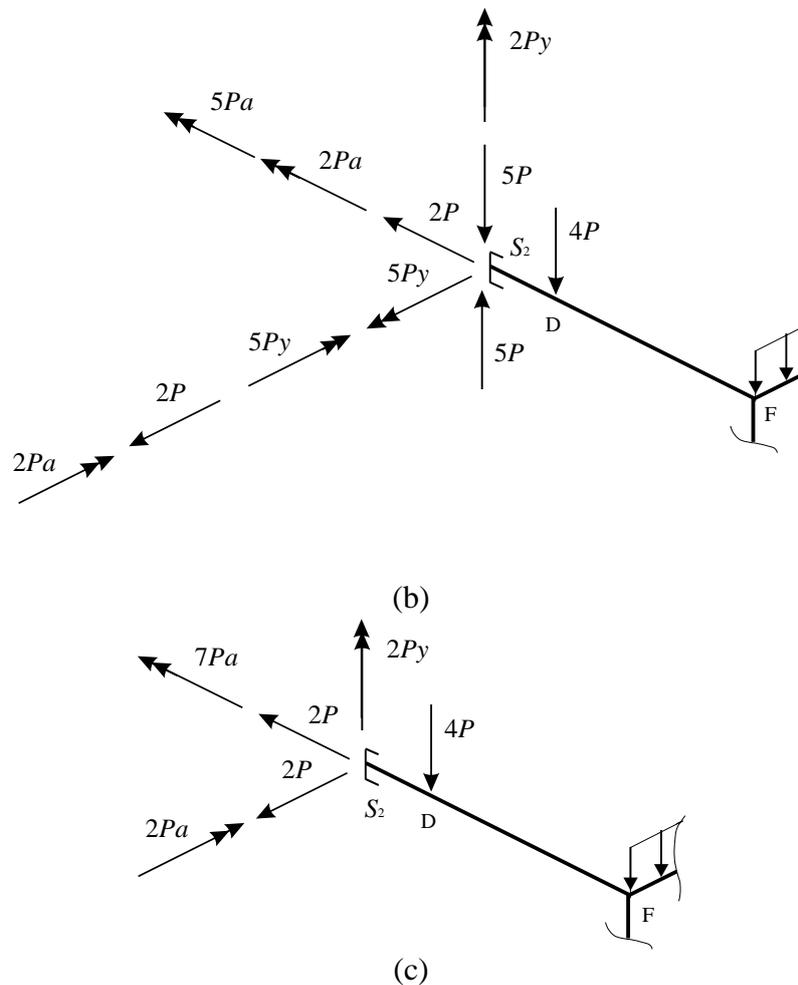


Figura 5.180

Existem, entretanto, situações em que, por motivo de clareza, prefere-se desmembrar os diagramas. Os diagramas mais congestionados são os de forças cortantes e momentos fletores, visto que para cada uma das barras se pode ter duas componentes destes esforços. No caso das forças cortantes, como se tem liberdade de escolher o lado em que se traça o diagrama, em geral consegue-se chegar a um diagrama claro e legível. Isto nem sempre ocorre com os diagramas de momentos fletores, em que não se tem nenhuma flexibilidade de traçado. Por esta razão, estes diagramas às vezes se tornam confusos e ilegíveis, dada uma grande superposição de gráficos apresentados em perspectiva. Nestes casos, convém separá-los em mais de um desenho. É o que se faz na Figura 5.182; nela os diagramas de momentos fletores das barras AB, CB, EF e GF estão em um desenho e os da barra BF, em outro.

Neste desmembramento dos diagramas, os gráficos das duas componentes de momento fletor ou força cortante em uma mesma barra devem estar sempre juntos, no mesmo desenho, a fim de facilitar a determinação das seções críticas.

Obtidos os esforços solicitantes em BD, pode-se remover esta barra da estrutura, cortando-a em uma seção imediatamente à esquerda de D, nela aplicando os esforços

solicitantes que aí atuam - Figura 5.181(a). Para chegar aos esforços solicitantes em DF utiliza-se mais uma vez o teorema fundamental, cortando a barra DF em uma seção genérica S_3 , nela reduzindo os esforços aplicados em D - Figura 5.181(b). Determinam-se assim os esforços solicitantes em DF, cujas expressões analíticas são

$$\begin{aligned}
 N &= 2P \\
 V_x &= -2P \\
 V_z &= -4P \\
 M_x &= 4P\bar{y} - 2Pa \\
 M_z &= 2Pa + 2P\bar{y} \\
 T &= 7Pa.
 \end{aligned}
 \tag{5.97}$$

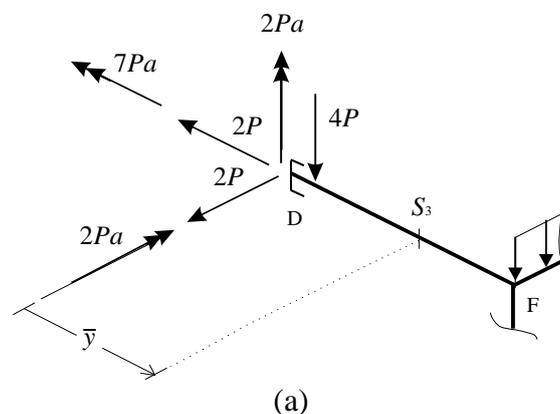
Os correspondentes diagramas estão na Figura 5.182.

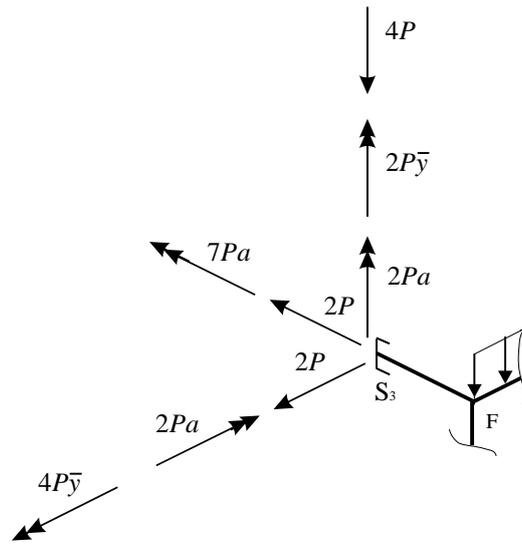
Com este exemplo encerra-se o estudo do traçado dos diagramas de esforços solicitantes de uma estrutura reticulada. Considera-se desnecessária a apresentação de outros exemplos, por se acreditar que os principais pontos relativos a eles tenham sido adequadamente abordados.

É importante comentar que, na verdade, toda esta longa apresentação poderia ter sido condensada em um ou dois exemplos, já que nada mais se fez ao longo deste capítulo que aplicar o teorema fundamental. Este é o caminho seguido por boa parte dos livros de Resistência dos Materiais, em que os diagramas de esforços solicitantes são apresentados conceitualmente e ilustrados por uns poucos exemplos.

Dada a imensa importância que os diagramas de esforços solicitantes têm em um curso de engenharia de estruturas, e dadas as dificuldades encontradas por aqueles que os estudam, resolveu-se apresentá-los de forma mais lenta e detalhada.

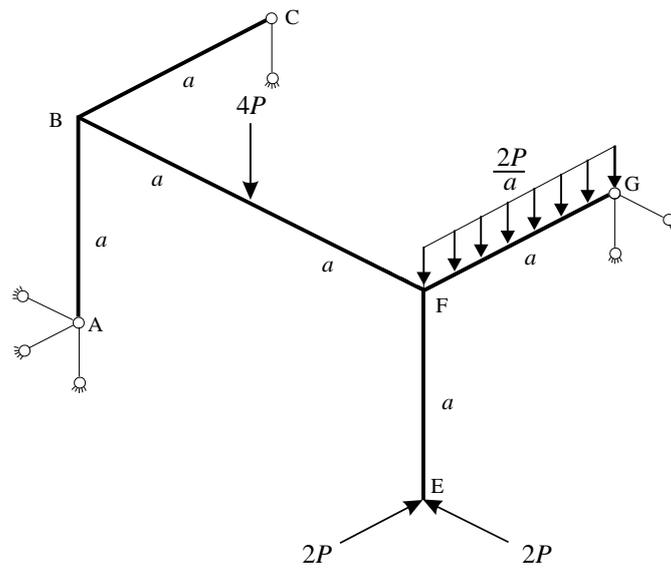
Espero ter tido êxito neste intento, e que o leitor de fato tenha aprendido bem como traçá-los.

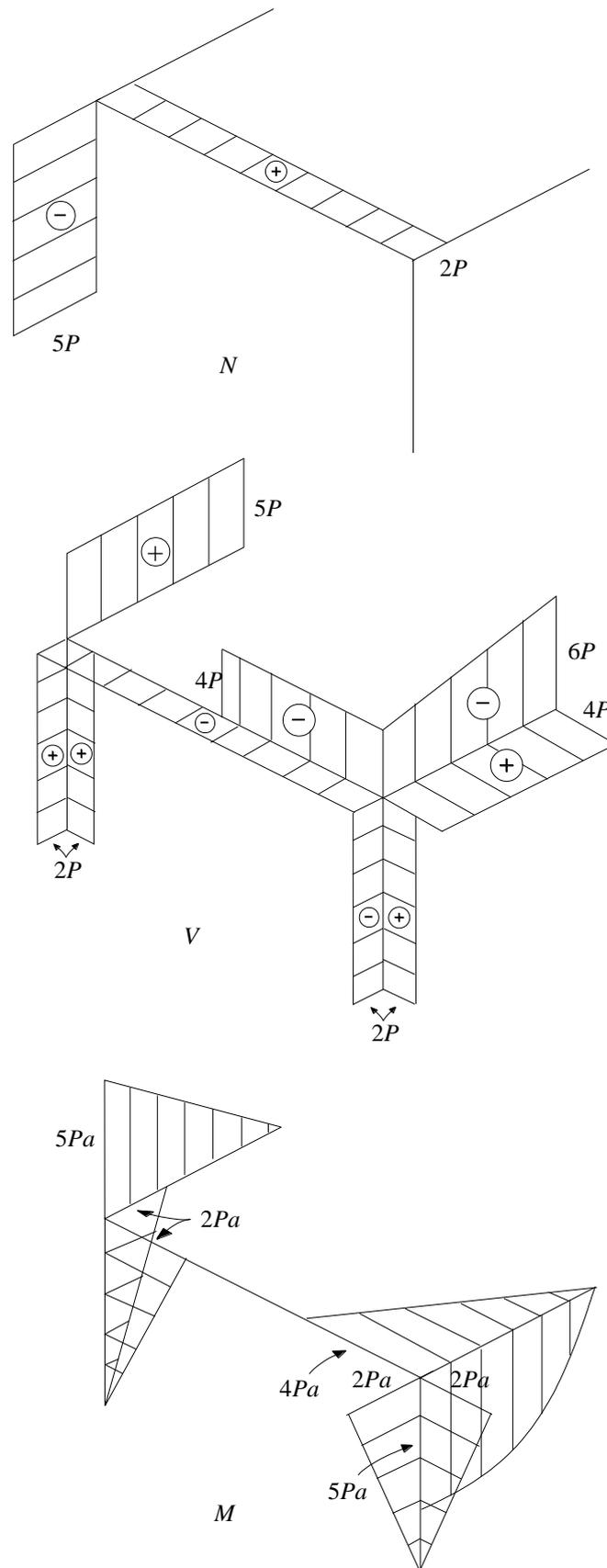




(b)

Figura 5.181





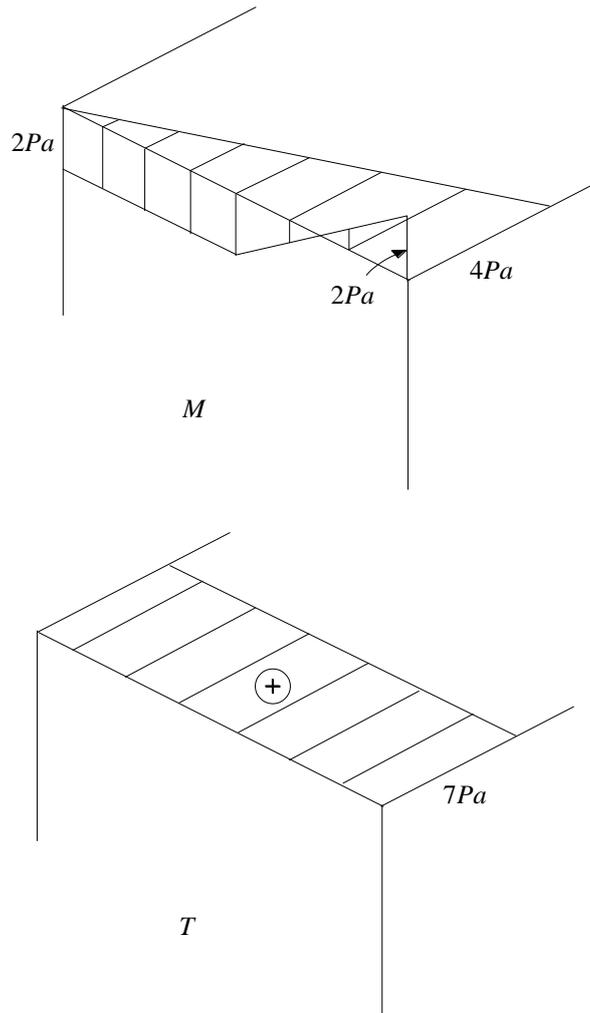


Figura 5.182

É claro que se pode ter estruturas muitíssimo mais complexas que as vistas neste capítulo, em particular as estruturas espaciais. Imagine uma estrutura com barras helicoidais submetidas a cargas distribuídas não uniformes! Apesar de extremamente trabalhosa, a obtenção dos diagramas de esforços solicitantes dessa estrutura seguiria exatamente os mesmos passos empregados para as estruturas mais simples aqui examinadas.

Como última reflexão, volta-se a afirmar: traçar os diagramas de esforços solicitantes é sempre aplicar o teorema fundamental.