

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações

# **Introdução à Mecânica das Estruturas**

## **Capítulos 1 a 5**

**Henrique Lindenberg Neto**

**1996**

**Índice**

<b>Prefácio</b>	II
<b>Capítulo 1 Estática</b>	1
1.1 Noções fundamentais	1
1.2 Redução de um sistema de forças em um ponto	7
1.3 Sistemas mecanicamente equivalentes	8
1.4 Sistemas de forças coplanares	13
1.5 Equilíbrio	24
1.6 Estática dos sistemas materiais planos	25
1.6.1 Apoios	26
1.6.2 Movimento de um sistema material plano	30
1.6.3 Estruturas hipostáticas, isostáticas e hiperestáticas	32
1.6.4 Determinação das reações de apoio	39
1.7 Estática dos sistemas materiais espaciais	50
1.7.1 Apoios	51
1.7.2 Movimentos de um sistema material espacial	56
1.7.3 Estruturas hipostáticas, isostáticas e hiperestáticas	58
1.7.4 Momento de uma força em relação a um eixo	60
1.7.5 Equações de equilíbrio	62
1.7.6 Determinação das reações de apoio	64
<b>Capítulo 2 O Conceito de Tensão</b>	70
<b>Capítulo 3 Esforços Solicitantes</b>	83
<b>Capítulo 4 Teorema Fundamental</b>	92
<b>Capítulo 5 Diagramas de Esforços Solicitantes</b>	101
5.1 Introdução	101
5.2 Diagramas de esforços solicitantes de estruturas planas	105
5.2.1 Convenção de sinais	105
5.2.2 Exemplos	109
5.2.3 Equações diferenciais de equilíbrio	129
5.2.4 Continuando os exemplos	140
5.3 Diagramas de esforços solicitantes de estruturas espaciais	203
5.3.1 Convenção de sinais	206
5.3.2 Exemplos	213

## **Prefácio**

Esta publicação apresenta o texto da disciplina PEF-124 “Introdução à Mecânica das Estruturas”, lecionada aos alunos do 4º semestre do curso de engenharia civil da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

É nesta disciplina que os alunos têm seu primeiro contato com as estruturas e seu projeto, sendo seu objetivo dar as primeiras noções sobre o comportamento físico das estruturas e sobre concepção estrutural.

Estudam-se estruturas reticuladas isostáticas – vigas simples, treliças, vigas Gerber, arcos e pórticos triarticulados –, mostrando-se como o comportamento de cada um destes tipos de estrutura decorre de sua forma e do arranjo de suas barras.

Apresenta-se também um breve histórico da evolução das estruturas, analisa-se a adequação dos diferentes materiais estruturais aos diferentes sistemas estruturais, discutem-se os aspectos construtivos e de localização física das estruturas que influem na decisão sobre o tipo de estrutura a ser adotado.

Esta é a primeira de uma série de cinco disciplinas que têm como objetivo dar aos alunos os fundamentos básicos da engenharia de estruturas, preparando-os para as disciplinas de projeto de estruturas de concreto, metálicas e de madeira e para as disciplinas de geotecnia do curso de engenharia civil. As demais disciplinas da série são PEF-125 “Resistência dos Materiais e Estática das Construções I”, PEF-126 “Resistência dos Materiais e Estática das Construções II”, PEF-127 “Resistência dos Materiais e Estática das Construções III” e PEF-128 “Resistência dos Materiais e Estática das Construções IV”, ministradas respectivamente aos alunos do 5º, 6º, 7º e 8º semestre do curso de engenharia civil.

Apresento os meus mais profundos agradecimentos ao Engenheiro Alfonso Pappalardo Junior e à Engenheira Maria Silvina Medrano pela magnífica composição e editoração do texto e das figuras, com tanto capricho e de forma tão clara e didática.

O Engenheiro Alfonso Pappalardo Junior e a Engenheira Maria Silvina Medrano, que desenvolvem programa de doutorado em engenharia de estruturas no Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da USP, foram estagiários do PAE – Programa de Aperfeiçoamento de Ensino da Reitoria da Universidade de São Paulo, junto à disciplina PEF-124 “Introdução à Mecânica das Estruturas”. O Engenheiro Alfonso Pappalardo Junior realizou seu estágio durante o segundo semestre de 1994 e o primeiro semestre de 1995; a Engenheira Maria Silvina Medrano, durante o segundo semestre de 1995 e o primeiro semestre de 1996. A editoração deste texto foi uma das atividades que desenvolveram neste estágio: o Engenheiro Alfonso Pappalardo Junior se encarregou dos Capítulos 1, 2 e 3, e a Engenheira Maria Silvina Medrano, dos Capítulos 4 e 5.

São Paulo, julho de 1996

Henrique Lindenberg Neto

## Capítulo 1

### Estática

O objetivo deste capítulo é recordar algumas noções da estática dos sólidos rígidos que serão utilizadas ao longo do curso de engenharia de estruturas e, por esta razão, vai-se procurar ilustrar esta recordação com exemplos extraídos da própria engenharia de estruturas.

#### 1.1 Noções fundamentais

Nesta seção serão examinadas as forças e seus momentos.

O conceito de força será introduzido por meio do 3º Princípio da Mecânica Clássica: “*Em cada instante, a ação mecânica de um corpo sobre um ponto material pode ser representada por um vetor (força interativa) aplicado no ponto*”.

Uma extensão deste princípio leva à seguinte afirmação: “*Em cada instante, a ação mecânica de um corpo sobre um sólido rígido pode ser representada por vetores (forças interativas) aplicados em pontos do sólido*”.

Esta ação de um sólido sobre outro pode se manifestar à distância ou por contato direto entre eles. No primeiro caso, as forças que representam a ação são forças de volume, como as que representam a atração que a Terra exerce sobre um homem em pé em uma calçada; no segundo caso, as forças que representam a ação são forças de superfície, como as que representam a ação que a calçada exerce sobre o homem, aplicadas nos trechos das solas dos sapatos que estão em contato com a calçada.

Quando a superfície em que se aplicam as forças é muito pequena, pode-se admiti-la reduzida a um ponto, dizendo-se então que a força é concentrada; quando a superfície em que se aplicam as forças é muito estreita, pode-se admiti-la reduzida a uma linha, dizendo-se então que a força se distribui linearmente.

É muito importante salientar que quando se fala de uma força interativa está-se fazendo referência a um vetor aplicado e não a um vetor livre. A consideração dos pontos de aplicação das forças é de capital importância para o estudo da ação que um sólido exerce sobre outro, pois uma mesma força aplicada em diferentes pontos de um mesmo sólido pode produzir efeitos totalmente distintos, como claramente mostra a Figura 1.1. A força  $\vec{F}$ , quando aplicada no ponto A, imprime ao sólido um movimento de rotação no sentido anti-horário; quando aplicada no ponto B, não provoca nenhum movimento do sólido e, quando aplicada no ponto C, produz uma rotação no sentido horário.

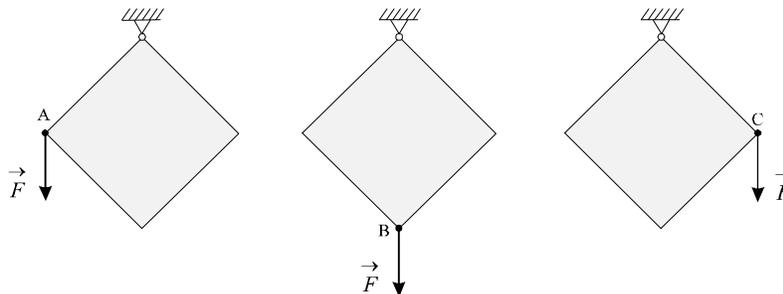


Figura 1.1

Volta-se então a enfatizar: *uma força interativa é um vetor aplicado*.

Matematicamente, as forças interativas são representadas por um par constituído por um vetor e por um ponto. Uma força concentrada  $\vec{F}$  aplicada em um ponto P é matematicamente representada pelo par  $(P, \vec{F})$ , isto é, pelo vetor aplicado  $(P, \vec{F})$ .

Definição 1.1

Linha de ação de uma força  $\vec{F}$  aplicada em um ponto P é a reta que passa por P e é paralela a  $\vec{F}$  (Figura 1.2).

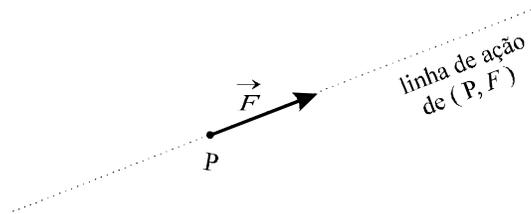


Figura 1.2

Definição 1.2

Momento de  $(P, \vec{F})$  em relação a um ponto (ou polo) O é o vetor, passando em O, definido por

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \wedge \vec{F} . \quad (1.1)$$

Suas características são:

- **direção:** perpendicular ao plano determinado pela linha de ação de  $(P, \vec{F})$  e pelo polo O (plano  $\pi$  da Figura 1.3).
- **sentido:** dado pela regra da mão direita ou, equivalentemente, pela regra do saca-rolha.
- **intensidade:**  $\|\vec{M}_O\| = \|\vec{OP}\| \|\vec{F}\| \sin \alpha . \quad (1.2)$

Por simplicidade, vai-se sempre desenhar o vetor  $\vec{M}_O$  com origem no ponto O e, para facilitar a distinção entre forças e momentos, os vetores que representam momentos serão identificados por setas duplas. O momento  $\vec{M}_O$  de  $(P, \vec{F})$  em relação a O está indicado na Figura 1.3.

Como

$$\|\vec{OP}\| \sin \alpha = d , \quad (1.3)$$

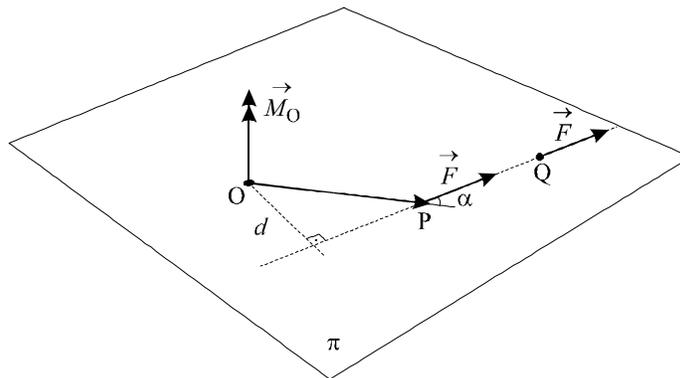


Figura 1.3

onde  $d$  é a distância do polo O à linha de ação de  $(P, \vec{F})$ , tem-se:

$$\|\vec{M}_O\| = \|\vec{F}\| d. \quad (1.4)$$

A distância  $d$  recebe o nome de *braço do momento* de  $(P, \vec{F})$  em relação ao polo O.

Observa-se que o momento de uma força em relação a um ponto tem a dimensão do produto de uma força por uma distância, sendo então medido em Nm, kgfcm, tfm, etc.

Mencionou-se acima que o sentido de  $\vec{M}_O$  pode ser determinado pela regra da mão direita ou, equivalentemente, pela regra do saca-rolha. Estas duas regras serão agora explicadas, começando-se pela regra da mão direita.

#### Regra da mão direita

Sabe-se que o momento  $\vec{M}_O$  tem a direção da reta  $r$  da Figura 1.4, passando por O e perpendicular ao plano definido pela linha de ação de  $(P, \vec{F})$  e pelo ponto O (plano  $\pi$ ).

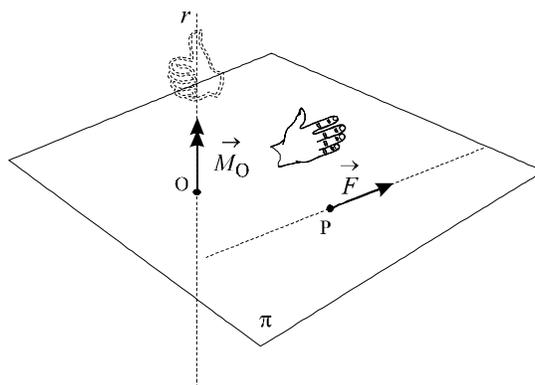


Figura 1.4

O sentido de  $\vec{M}_O$  pode ser determinado da seguinte maneira:

- no plano que contém a linha de ação de  $(P, \vec{F})$  e é perpendicular a  $\pi$ , coloque a mão direita com a palma voltada para a reta  $r$  e com os dedos no sentido de  $\vec{F}$ ;
- deixe o polegar perpendicular aos demais dedos;
- o sentido de  $\vec{M}_O$  é então o apontado pelo polegar da mão direita (Figura 1.4).

#### Regra do saca-rolha

A regra do saca-rolha é a seguinte:

- imagine um saca-rolha posicionado de forma que seu eixo fique sobre a reta  $r$ ;
- gire o cabo do saca-rolha no mesmo sentido que o da rotação da força  $\vec{F}$  em torno do ponto O;
- a ponta do saca-rolha vai então se deslocar sobre a reta  $r$ ;
- o sentido de  $\vec{M}_O$  é o do deslocamento da extremidade do saca-rolha.

Há duas posições possíveis para a colocação do saca-rolha sobre a reta  $r$ : com a ponta voltada para cima ou com a ponta voltada para baixo. Em ambos os casos o deslocamento da extremidade do saca-rolha se dá no mesmo sentido, como mostram as Figuras 1.5(a) e 1.5(b), podendo-se então utilizar a regra para a

determinação do sentido de  $\vec{M}_O$  com o saca-rolha em qualquer uma das duas posições. Na Figura 1.5(a) o saca-rolha foi colocado com a ponta voltada para cima; na Figura 1.5(b), com a ponta voltada para baixo.

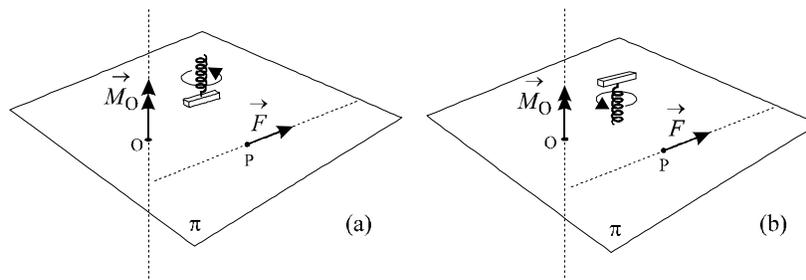


Figura 1.5

As duas regras apresentadas levam ao mesmo resultado, e qualquer uma delas pode ser empregada para determinar o sentido de  $\vec{M}_O$ . A regra do saca-rolha, por permitir a colocação do saca-rolha em duas posições, é a mais versátil das duas e, em determinadas situações, permite evitar ginásticas desajeitadas com a mão direita. A adoção de uma regra ou outra é, portanto, uma questão de gosto pessoal e fica ao critério de quem irá utilizá-la.

A expressão  $\|\vec{M}_O\| = \|\vec{F}\| d$  mostra que a intensidade do momento de uma força  $(P, \vec{F})$  em relação a um ponto  $O$  é o produto de duas grandezas: a intensidade da força e a distância entre sua linha de ação e o ponto  $O$ . Desta expressão, obtêm-se as seguintes propriedades:

Propriedade 1.1

$$\vec{M}_O = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F} = \vec{0} \text{ ou } d = 0, \quad (1.5)$$

isto é, o momento de  $(P, \vec{F})$  em relação a  $O$  é nulo se e somente se a força  $\vec{F}$  é nula ou então se sua linha de ação passa por  $O$ .

Propriedade 1.2

Se  $(P, \vec{F})$  e  $(Q, \vec{F})$  têm a mesma linha de ação, então seus momentos em relação a um mesmo polo são iguais.

Dado um sistema de forças  $S = \{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), \dots, (P_n, \vec{F}_n)\}$ , tem-se:

Definição 1.3

Resultante de  $S$  é a soma vetorial das forças que o compõem.

A resultante é indicada por  $\vec{R}$ , tendo-se então

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (1.6)$$

Definição 1.4

Momento de  $S$  em relação a um ponto  $O$  é a soma vetorial dos momentos de cada uma das forças do sistema em relação a esse ponto.

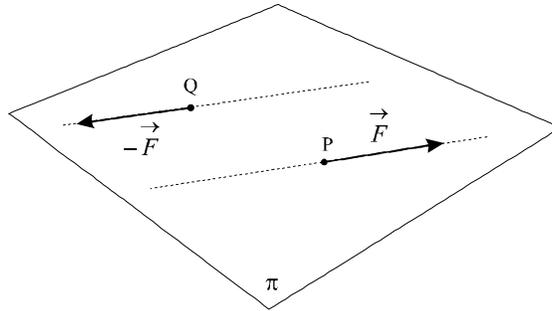
O momento de  $S$  em relação a  $O$  é indicado por  $\vec{M}_O$ , tendo-se então:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{OP}_i \wedge \vec{F}_i. \quad (1.7)$$

O momento  $\vec{M}_O$  passa por  $O$  e, por simplicidade, vai-se sempre desenhá-lo com origem em  $O$ .

**Definição 1.5**

Um sistema constituído por duas forças de mesma intensidade e direção, mas de sentidos opostos e com diferentes linhas de ação, recebe o nome de *binário* (Figura 1.6).



**Figura 1.6**

**Propriedade 1.3**

A resultante de um binário é sempre nula.

**Propriedade 1.4**

O momento de um binário em relação a um ponto é sempre o mesmo, qualquer que seja o ponto considerado.

A demonstração da primeira propriedade é imediata. Para demonstrar a segunda, considerem-se o binário da Figura 1.6 e um ponto genérico  $O$ . O momento do binário em relação a  $O$  é

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \vec{OP} \wedge \vec{F} + \vec{OQ} \wedge (-\vec{F}) = \vec{OP} \wedge \vec{F} - \vec{OQ} \wedge \vec{F} = \vec{OP} \wedge \vec{F} + \vec{QO} \wedge \vec{F} = \\ &= (\vec{QO} + \vec{OP}) \wedge \vec{F} = \vec{QP} \wedge \vec{F}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

independente do ponto  $O$  considerado, o que prova a propriedade.

Como o momento de um binário em relação a um ponto independente do polo, ele será simplesmente chamado de momento de binário e identificado por  $\vec{M}$ , sem qualquer referência a um polo.

Já que o momento de um binário independe do polo, qualquer ponto pode ser utilizado em sua determinação, por exemplo o ponto P ou o ponto Q da Figura 1.7, ou então qualquer outro ponto. A adoção de P ou de Q facilita a obtenção de  $\vec{M}$ , pois em relação a eles uma das forças do binário tem momento nulo.

É fácil verificar que o momento  $\vec{M}$  de um binário tem as seguintes características:

- **direção:** perpendicular ao plano definido pelas linhas de ação das forças que constituem o binário (plano  $\pi$  da Figura 1.7).
- **sentido:** o do momento de (P,  $\vec{F}$ ) em relação a Q – ou de (Q,  $-\vec{F}$ ) em relação a P –, dado pela regra da mão direita ou pela regra do saca-rolha.
- **intensidade:**

$$\|\vec{M}\| = \|\vec{F}\| b, \quad (1.9)$$

onde  $b$  é a distância entre as linhas de ação das duas forças (Figura 1.7).  
 A distância  $b$  recebe o nome de *braço de alavanca* do binário.

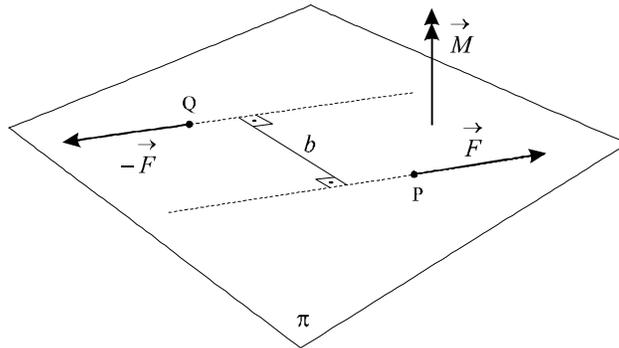


Figura 1.7

A intensidade do momento do binário é, portanto, o produto da intensidade de uma das forças que constituem o binário pelo braço de alavanca.

Deve-se ainda comentar que quando se faz referência apenas ao momento de um binário, sem a menção de um polo específico, não fica definido um ponto particular pelo qual deve passar a reta que contém  $\vec{M}$ . O vetor  $\vec{M}$  pode então ser indicado sobre qualquer reta perpendicular a  $\pi$  (Figura 1.7).

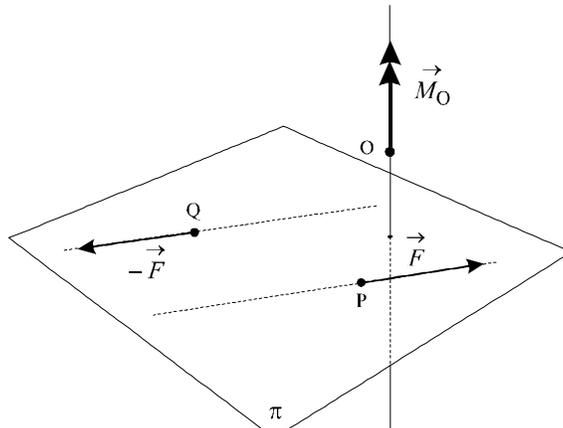


Figura 1.8

O mesmo não ocorre quando se menciona um polo específico: o momento de um binário em relação a um ponto O é o vetor  $\vec{M}_O \equiv \vec{M}$  situado sobre a reta perpendicular a  $\pi$  que passa por O. Por simplicidade, indica-se esse vetor  $\vec{M}_O$  com origem em O (Figura 1.8).

## 1.2 Redução de um sistema de forças em um ponto

### Definição 1.6

Reduzir um sistema de forças  $S = \{(P_i, \vec{F}_i), i = 1, 2, \dots, n\}$  em um ponto (ou polo) A consiste em aplicar neste ponto dois vetores:  $\vec{R}$  e  $\vec{M}_A$ .

É interessante notar que a resultante  $\vec{R}$  do sistema de forças S independe do polo de redução.

A redução de um mesmo sistema de forças S em dois pontos distintos A e B leva respectivamente aos momentos  $\vec{M}_A$  e  $\vec{M}_B$ . A relação entre eles se determina facilmente:

$$\begin{aligned} \vec{M}_B &= \sum_{i=1}^n \vec{BP}_i \wedge \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{BA} + \vec{AP}_i) \wedge \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{BA} \wedge \vec{F}_i + \\ &\sum_{i=1}^n \vec{AP}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{BA} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \vec{M}_A = \vec{BA} \wedge \vec{R} + \vec{M}_A . \end{aligned} \quad (1.10)$$

Tem-se assim a seguinte fórmula de mudança de polo:

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R} . \quad (1.11)$$

Esta fórmula mostra que o momento  $\vec{M}_B$  é a soma vetorial de  $\vec{M}_A$  com o momento que a resultante  $\vec{R}$  aplicada em A tem em relação a B. Em outras palavras, reduzir em B um sistema de forças previamente reduzido em A consiste em aplicar em B uma força e dois momentos:  $\vec{R}$ ,  $\vec{M}_A$  e o momento de (A,  $\vec{R}$ ) em relação a B (Figura 1.9).

### Propriedade 1.5

Se a resultante  $\vec{R}$  de um sistema de forças é nula, então o momento  $\vec{M}_B$  independe da posição do polo B de redução.

A recíproca desta afirmação também é verdadeira: se o momento  $\vec{M}_B$  independe da posição do polo B de redução, então a resultante  $\vec{R}$  do sistema é nula.

A frase matemática que traduz a Propriedade 1.5 é:

$$\vec{R} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{M}_B \text{ independe da posição do polo } B \text{ de redução} \quad (1.12)$$

Esta propriedade decorre imediatamente da fórmula de mudança de polo.

Como um caso particular da situação descrita tem-se o de um binário, cuja resultante é nula, e cujo momento, portanto, independe do polo de redução, como já se mostrou anteriormente.

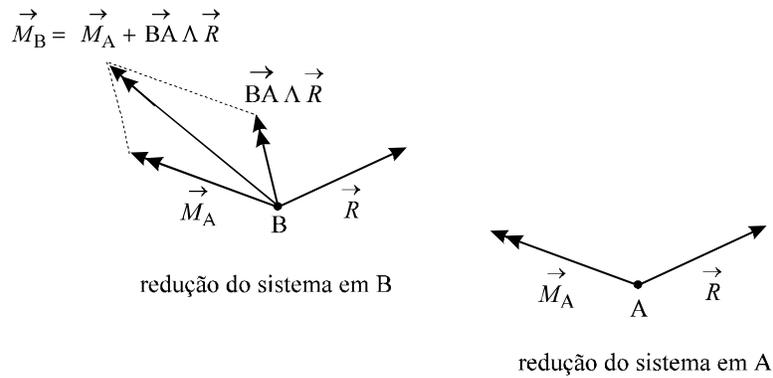


Figura 1.9

Propriedade 1.6

Se a resultante  $\vec{R}$  de um sistema de forças é nula e seu momento em relação a um polo A também é nulo, então a redução do sistema em qualquer outro ponto B leva a um momento  $\vec{M}_B$  nulo.

A recíproca desta afirmação também é verdadeira.

Matematicamente, tem-se:

$$\vec{R} = \vec{0} \text{ e } \vec{M}_A = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{M}_B = \vec{0}, \forall B \quad (1.13)$$

Esta propriedade também decorre imediatamente da fórmula de mudança de polo, e ela é o caso particular da Propriedade 1.5 correspondente à situação em que o momento que independe do polo de redução é nulo.

**1.3 Sistemas mecanicamente equivalentes**

Definição 1.7

Diz-se que dois sistemas de forças S e S' são *mecanicamente equivalentes* quando suas reduções em um mesmo ponto genérico A levam aos mesmos esforços, isto é,  $\vec{R} = \vec{R}'$  e  $\vec{M}_A = \vec{M}'_A$ .

Observa-se que na definição acima o ponto A de redução é qualquer, ou seja, sempre a redução de dois sistemas de forças mecanicamente equivalentes em um mesmo ponto levará aos mesmos esforços, qualquer que seja o polo de redução considerado.

Pode-se verificar facilmente por meio da fórmula de mudança de polo que a igualdade de esforços em um polo de redução implica na igualdade de esforços em todos os demais polos de redução.

Dois sistemas de forças mecanicamente equivalentes aplicados em um mesmo sólido rígido levam-no a apresentar o mesmo movimento, e esta é a origem do termo *mecanicamente equivalentes*.

A demonstração desta afirmação decorre diretamente da aplicação do Teorema da Resultante e do Teorema do Momento Cinético.

Como exemplo, considere-se uma mesma barra rígida homogênea submetida a dois sistemas de forças distintos, mas mecanicamente equivalentes (Figura 1.10).

É imediata a constatação de que os dois sistemas de forças da Figura 1.10 são mecanicamente equivalentes: basta para isso reduzi-los em um mesmo ponto, por exemplo, o centro de massa G da barra. Nos dois casos se obterá  $\vec{R} = 2P\vec{j}$  e  $\vec{M} = \vec{0}$ ; estando o sólido nas mesmas condições nos instantes em que são aplicados os dois sistemas de forças, passará a apresentar o mesmo movimento nos dois casos.

Se as barras da Figura 1.10 estiverem em repouso no momento em que são solicitadas pelos dois sistemas de forças, passarão a apresentar o mesmo movimento de translação vertical após a aplicação das forças.

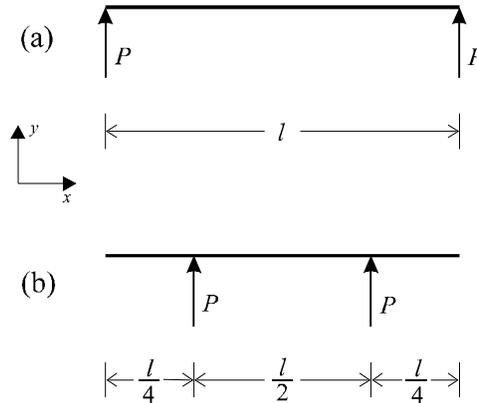


Figura 1.10

Propriedade 1.7

A redução de um sistema de forças em um ponto leva a uma força e um momento mecanicamente equivalentes a esse sistema.

A demonstração desta propriedade é bastante simples.

Considere-se a Figura 1.11(a), em que se representa um sólido submetido a um sistema de forças  $S_I$ .

A redução do sistema  $S_I$  em um ponto genérico A do sólido leva aos esforços  $\vec{R}$  e  $\vec{M}_A$  indicados na Figura 1.11(b); o sistema constituído por estes dois esforços será chamado de sistema  $S_{II}$ .

Deseja-se demonstrar que os sistemas  $S_I$  e  $S_{II}$  são mecanicamente equivalentes.

Basta, para isso, mostrar que a redução destes dois sistemas em um mesmo ponto genérico B leva aos mesmos esforços.

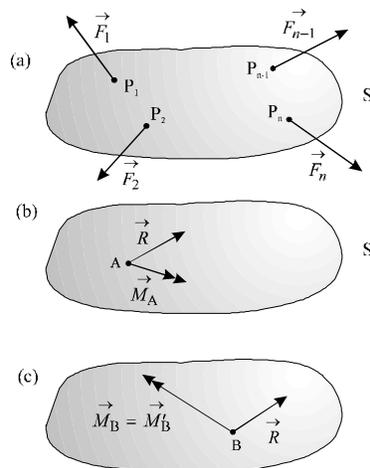


Figura 1.11

Seja B o ponto indicado na Figura 1.11(c). A redução do sistema  $S_I$  em B leva à resultante  $\vec{R}$  e ao momento  $\vec{M}_B$ ; a redução do sistema  $S_{II}$  nesse mesmo ponto leva obviamente à mesma resultante  $\vec{R}$  e ao momento  $\vec{M}'_B$ .

Demonstrando que  $\vec{M}'_B = \vec{M}_B$ , demonstra-se a propriedade.

Tem-se

$$\vec{M}_B = \sum_{i=1}^n \vec{BP}_i \wedge \vec{F}_i \quad (1.14)$$

e

$$\vec{M}'_B = \vec{BA} \wedge \vec{R} + \vec{M}_A. \quad (1.15)$$

Pode-se reescrever (1.14) como

$$\begin{aligned} \vec{M}_B &= \sum_{i=1}^n (\vec{BA} + \vec{AP}_i) \wedge \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{BA} \wedge \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{AP}_i \wedge \vec{F}_i = \\ &= \vec{BA} \wedge \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{AP}_i \wedge \vec{F}_i. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Como se tem

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{R} \quad (1.17)$$

e

$$\sum_{i=1}^n \vec{AP}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{M}_A, \quad (1.18)$$

tem-se

$$\vec{M}_B = \vec{BA} \wedge \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{AP}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{BA} \wedge \vec{R} + \vec{M}_A = \vec{M}'_B, \quad (1.19)$$

ficando assim demonstrada a Propriedade 1.7.

Ilustra-se a Propriedade 1.7 por meio de um exemplo.

### Exemplo 1.1

Considere-se a barra da Figura 1.12(a), em que são aplicadas duas forças coplanares, que constituem o sistema de esforços  $S_I$ .

A redução destas forças em A leva aos esforços indicados na Figura 1.12(b), que constituem o sistema de esforços  $S_{II}$ :

$$\vec{R} = 20\vec{i} - 50\vec{i} = -30\vec{i} \quad (1.20)$$

E

$$\vec{M}_A = -20 \cdot 2\vec{k} + 50 \cdot 4\vec{k} = 160\vec{k}. \quad (1.21)$$

Os sistemas de esforços  $S_I$  e  $S_{II}$  são sistemas mecanicamente equivalentes: de fato, reduzindo os dois sistemas no ponto B obtêm-se os mesmos esforços, indicados na Figura 1.12(c).

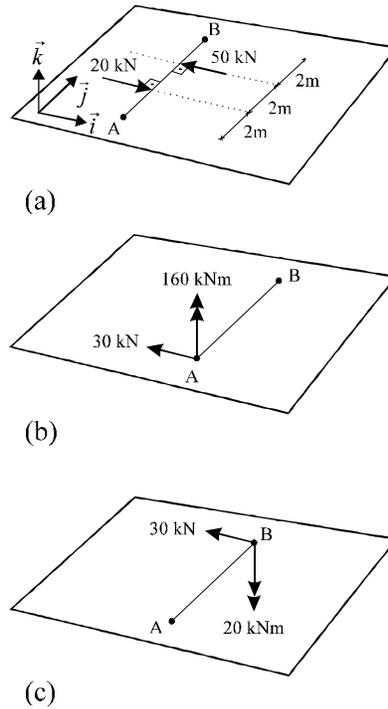


Figura 1.12

A redução de  $S_I$  em B leva à resultante  $\vec{R} = -30\vec{i}$  e ao momento

$$\vec{M}_B = 20 \cdot 4\vec{k} - 50 \cdot 2\vec{k} = -20\vec{k}; \quad (1.22)$$

a redução de  $S_{II}$  em B leva à resultante  $\vec{R}$  e ao momento

$$\vec{M}'_B = -30 \cdot 6\vec{k} + 160\vec{k} = -20\vec{k}. \quad (1.23)$$

Como se previra, tem-se

$$\vec{M}'_B = \vec{M}_B = -20\vec{k}, \quad (1.24)$$

comprovando-se assim que  $S_I$  e  $S_{II}$  são sistemas mecanicamente equivalentes.

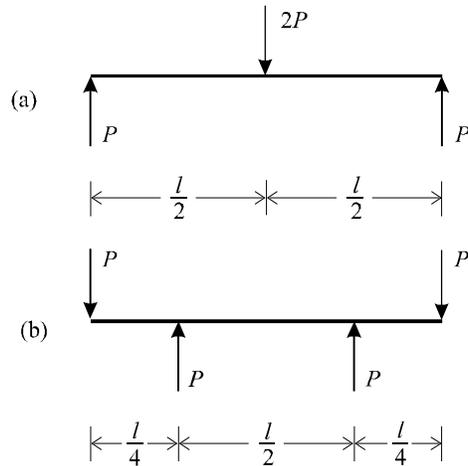


Figura 1.13

Mostrou-se, no início desta seção, que dois sistemas de forças mecanicamente equivalentes produzirão os *mesmos* efeitos se forem aplicados em um mesmo sólido *rígido* nas mesmas condições iniciais. É entretanto extremamente importante observar que dois sistemas de forças mecanicamente equivalentes produzirão efeitos *distintos* se forem aplicados em um mesmo sólido *deformável*.

Na Figura 1.13 se indica uma mesma barra deformável homogênea solicitada por dois carregamentos mecanicamente equivalentes.

A redução dos dois sistemas de forças no centro de massa  $G$  leva em ambos os casos a  $\vec{R} = \vec{0}$  e  $\vec{M}_G = \vec{0}$ . Se as barras se encontrarem em repouso no instante em que são aplicados os carregamentos, elas irão se deformar – pois trata-se agora de barras deformáveis –, e permanecerão em repouso na configuração deformada.

As formas deformadas das duas barras são intuitivamente conhecidas, sendo completamente distintas nos dois casos (Figura 1.14): a barra da Figura 1.14(a) tem concavidade para cima e a da Figura 1.14(b), para baixo.

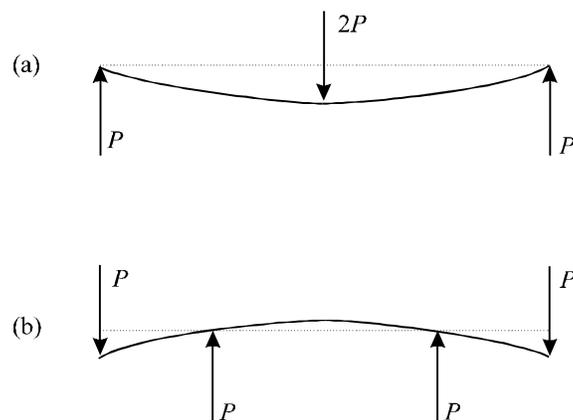


Figura 1.14

Como outro exemplo de estrutura deformável submetida a sistemas de forças mecanicamente equivalentes considerem-se as molas da Figura 1.15, já representadas na configuração deformada de repouso.

Como era de se esperar em vista dos carregamentos que as sollicitam, a mola superior apresenta alongamento maior que a mola inferior.

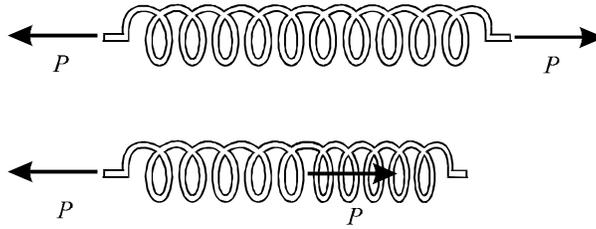


Figura 1.15

Esta discussão mostra claramente que dois sistemas de forças mecanicamente equivalentes produzem os mesmos efeitos apenas quando aplicados em um mesmo sólido rígido, produzindo efeitos distintos quando o sólido em que se aplicam é deformável.

Neste capítulo está-se fazendo uma recordação de noções da estática dos sólidos rígidos, logo, no seu âmbito, pode-se afirmar que sistemas mecanicamente equivalentes aplicados em um mesmo sólido produzem os mesmos efeitos.

### 1.4 Sistemas de forças coplanares

Vai-se iniciar o estudo dos sistemas de forças coplanares pela apresentação – na Figura 1.16 – de uma nova forma de indicar momentos, particularmente adequada à análise destes sistemas.

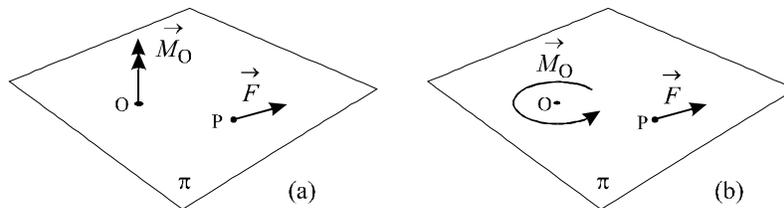


Figura 1.16

Na Figura 1.16(a) o momento  $\vec{M}_O$  de uma força  $(P, \vec{F})$  em relação a um polo genérico O encontra-se representado da maneira já apresentada anteriormente. Uma outra forma de representar este momento, por meio de uma flecha circular, está indicada na Figura 1.16(b). A flecha circular é desenhada em perspectiva no plano  $\pi$  (plano definido pela força  $(P, \vec{F})$  e pelo ponto O), e seu sentido é o da rotação de  $(P, \vec{F})$  em torno de O. Não havendo perigo de confundir esta representação de momento com a de uma força, utiliza-se apenas uma seta na flecha circular.

Na Figura 1.17 indicam-se as duas representações do momento de  $(P, \vec{F})$  em relação ao ponto O no caso em que a força  $\vec{F}$  tem sentido oposto ao anterior.

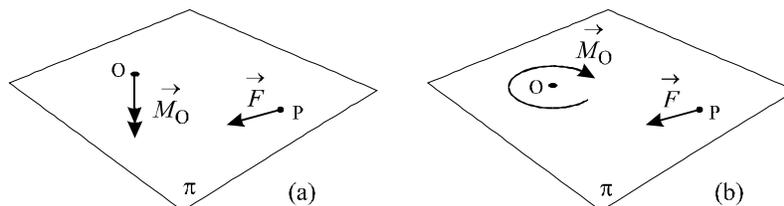


Figura 1.17

A representação dos momentos com flechas circulares é muito adequada ao estudo dos sistemas de forças coplanares, pois neste caso costuma-se confundir o plano  $\pi$  com o plano do papel, ficando a linha de visão do observador perpendicular ao plano do papel.

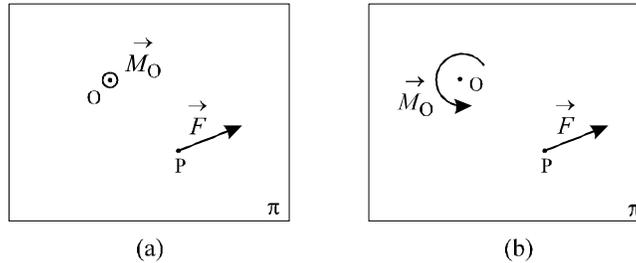


Figura 1.18

Quando se confunde o plano  $\pi$  com o plano do papel as representações dos momentos da Figura 1.16 tornam-se as da Figura 1.18.

Observa-se que a primeira representação de  $\vec{M}_O$  torna-se agora pouco adequada, pois o vetor  $\vec{M}_O$  se reduz a um ponto. Ele é indicado pelo símbolo  $\odot$ , que mostra a ponta de uma flecha que está saindo do papel. Já a representação com a flecha circular é muito adequada a esta situação, inclusive porque agora a eventual dificuldade de desenhá-la em perspectiva no plano  $\pi$  deixa de existir.

Na Figura 1.19 mostram-se os vetores da Figura 1.17 quando se confunde o plano  $\pi$  com o do papel.

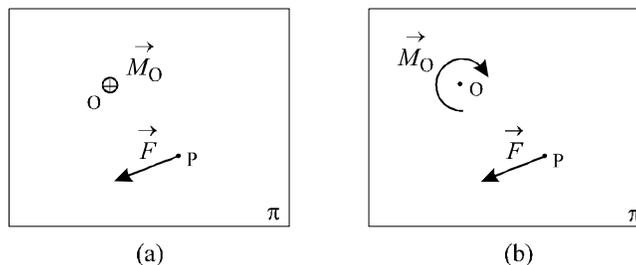


Figura 1.19

Mais uma vez, a primeira representação leva o vetor  $\vec{M}_O$  a se reduzir a um ponto, indicado agora pelo símbolo  $\oplus$ , que mostra a extremidade final de uma flecha que está entrando no papel. Mais uma vez a representação do momento com flecha circular é muito adequada.

Deve-se dizer que as mesmas virtudes que tornam atraente a representação dos momentos com flechas circulares no caso dos sistemas de forças coplanares fazem com que ela seja pouco adequada para sistemas espaciais, que exigem o desenho de flechas circulares em perspectiva, o que é muito difícil de fazer de forma clara. Neste caso opta-se então pela primeira representação, com flechas retas e setas duplas.

Proposição 1.1

Seja  $S$  um sistema de forças coplanares com resultante  $\vec{R} \neq \vec{0}$ , existe uma reta paralela a  $\vec{R}$  e pertencente ao plano tal que a redução do sistema em qualquer ponto  $B$  desta reta leva exclusivamente ao vetor  $\vec{R}$ , com  $\vec{M}_B = \vec{0}$ . Nos pontos desta reta, que é única, o sistema se reduz portanto a apenas uma força.

Vai-se agora demonstrar esta proposição. Na Figura 1.20 estão indicados o plano definido pelas forças coplanares (plano  $\pi$ ) e os esforços provenientes da redução do sistema em um ponto genérico A de  $\pi$ :  $\vec{R}$  e  $\vec{M}_A$ .

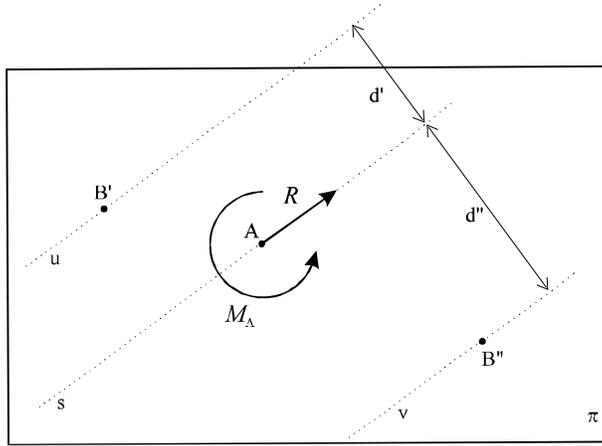


Figura 1.20

Observa-se que na Figura 1.20 as flechas de  $\vec{R}$  e  $\vec{M}_A$  foram omitidas, numa simplificação da notação utilizada. Esta simplificação não elimina nenhuma informação, e ela deve ser entendida da seguinte forma: em A tem-se uma força com a direção e o sentido indicados e de intensidade R; tem-se também um momento com a direção e o sentido indicados pela flecha circular e de intensidade  $M_A$ .

Indicam-se ainda na Figura 1.20 a linha de ação de  $(A, \vec{R})$  – reta s – e dois pontos do plano  $\pi$ , ambos localizados em retas paralelas à reta s: o ponto B', situado sobre uma reta acima de s – reta u –, e o ponto B'', situado sobre uma reta abaixo de s – reta v. A redução do sistema nos pontos B' e B'' leva aos esforços indicados na Figura 1.21.

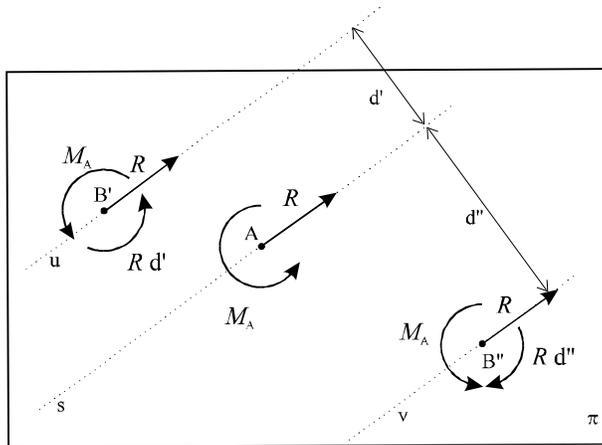


Figura 1.21

Os momentos do sistema em relação aos pontos B' e B'' são determinados pela fórmula de mudança de polo, sendo iguais à soma vetorial do momento  $\vec{M}_A$  com o momento de  $(A, \vec{R})$  em relação a B' e a B'' respectivamente. Sendo as forças coplanares e estando os pontos A, B' e B'' no plano  $\pi$ , todos estes

momentos têm a mesma direção – perpendicular ao plano  $\pi$  –, e a soma vetorial citada pode então ser reduzida à simples soma algébrica dos módulos dos vetores.

Na Figura 1.21 as duas parcelas que compõem  $\vec{M}_{B'}$  e  $\vec{M}_{B''}$  estão indicadas separadamente. O momento de  $(A, \vec{R})$  em relação a  $B'$  tem o mesmo sentido de  $\vec{M}_A$  – o sentido anti-horário –, logo  $\vec{M}_{B'}$  tem sentido anti-horário e intensidade maior que  $M_A$ :

$$M_{B'} = M_A + R d' . \quad (1.25)$$

Quanto maior for a distância  $d'$  entre as retas  $u$  e  $s$  maior será a intensidade  $M_{B'}$ .

Já o momento de  $(A, \vec{R})$  em relação a  $B''$  tem sentido horário, contrário ao de  $\vec{M}_A$ , e  $\vec{M}_{B''}$  pode então, dependendo do valor de  $d''$ , ter o sentido anti-horário, ser nulo ou ter o sentido horário, pois tem-se

$$M_{B''} = M_A - R d'' , \quad (1.26)$$

sendo fácil perceber que um valor negativo para  $M_{B''}$  nesta expressão indica um momento horário de intensidade  $R d'' - M_A$ .

A expressão (1.26) mostra que se tem:

$$\bullet \quad M_{B''} > 0 \quad \text{para} \quad d'' < \frac{M_A}{R} ; \quad (1.27)$$

$$\bullet \quad M_{B''} = 0 \quad \text{para} \quad d'' = \frac{M_A}{R} ; \quad (1.28)$$

$$\bullet \quad M_{B''} < 0 \quad \text{para} \quad d'' > \frac{M_A}{R} , \quad (1.29)$$

ou seja, o momento  $\vec{M}_{B''}$  tem o mesmo sentido que  $\vec{M}_A$  para  $d'' < M_A/R$ , sentido contrário a  $\vec{M}_A$  para  $d'' > M_A/R$  e é nulo para  $d'' = M_A/R$ .

Como o momento  $M_{B''}$  independe da posição do ponto  $B''$  sobre a reta  $v$ , conclui-se que em todos os pontos da reta  $v$  definida por  $d'' = M_A/R$  se tem  $M_{B''} = 0$ . A expressão (1.26) mostra claramente que esta é a única reta em cujos pontos se tem  $M_{B''} = 0$ .

Está assim demonstrada a Proposição 1.1: existe e é única a reta pertencente ao plano  $\pi$  em cujos pontos a redução do sistema de forças coplanares leva exclusivamente a uma força, a resultante  $\vec{R}$  do sistema. Estas idéias podem ser generalizadas determinando-se o momento do sistema em relação a um ponto genérico  $B$  do plano  $\pi$ . Na Figura 1.22 indica-se o gráfico da variação de  $M_B$  ao longo de qualquer reta perpendicular a  $s$ .

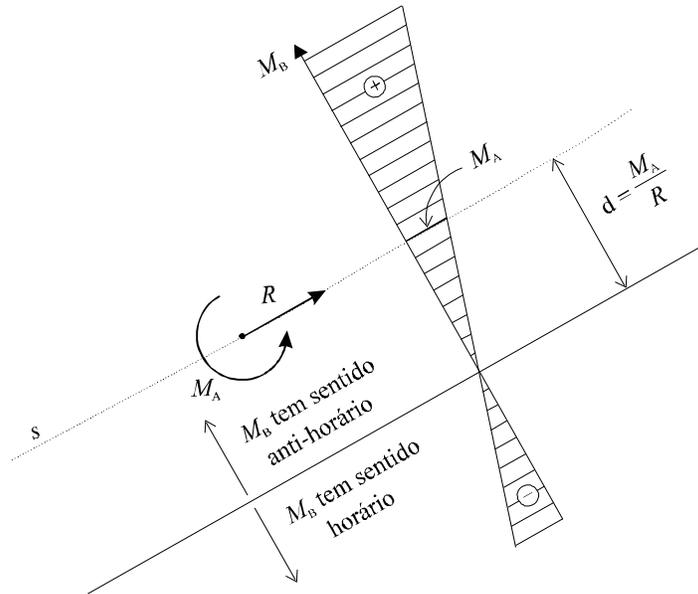


Figura 1.22

A discussão relativa à Proposição 1.1 que se acaba de fazer foi desenvolvida em cima de um caso concreto. As conclusões obtidas, entretanto, se aplicam às demais situações encontráveis na prática, como se mostra na Figura 1.23, em que um outro caso – diferente do anterior pelo fato de se ter  $\vec{R}$  para baixo – é contemplado.

A convenção de sinais empregada nas Figuras 1.22 e 1.23 é aquela que costuma ser utilizada na estática dos sistemas coplanares, e ela encerra uma informação sobre o sentido dos momentos: momentos no sentido anti-horário são

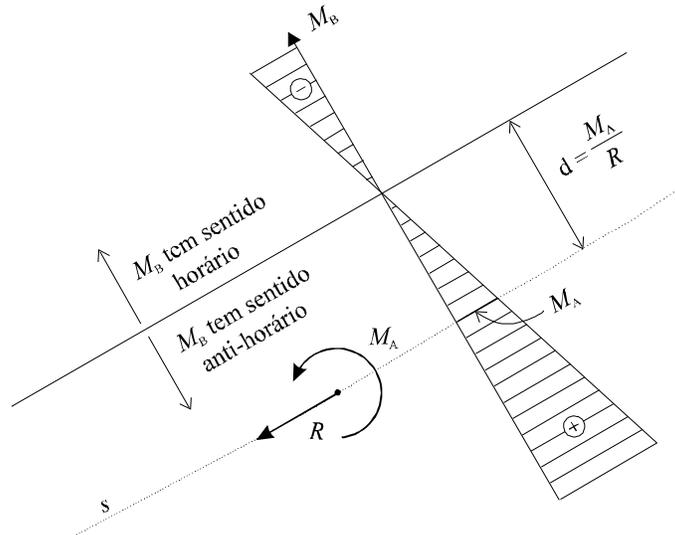
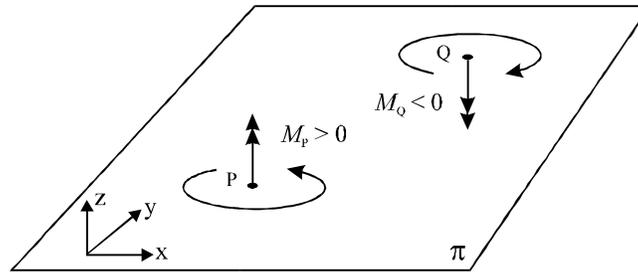


Figura 1.23

considerados positivos e momentos no sentido horário são considerados negativos. Isto, porque utilizando o referencial mostrado na Figura 1.24, um momento representado por uma flecha circular anti-horária tem o sentido de  $z$  e um momento representado por uma flecha circular horária tem o sentido contrário a  $z$ .



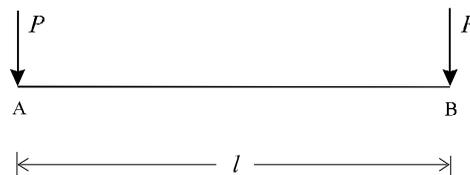
**Figura 1.24**

Todas as idéias aqui apresentadas para forças concentradas se estendem a forças distribuídas; a demonstração desta afirmação não será aqui apresentada, mas pode ser feita facilmente.

A determinação da reta em que um sistema de forças coplanares – com  $\vec{R} \neq \vec{0}$  – se reduz exclusivamente à resultante  $\vec{R}$  tem grande importância, e alguns exemplos desta determinação serão agora apresentados.

**Exemplo 1.2**

Determinar para que ponto da barra da Figura 1.25 a redução do sistema de forças aplicadas conduz exclusivamente à resultante  $R$ .



**Figura 1.25**

São apresentadas aqui duas formas de resolver este problema:

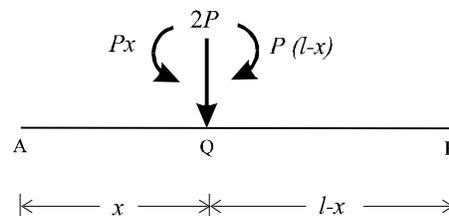
a) Solução direta

A solução direta consiste na redução do sistema em um ponto genérico Q da barra e na determinação de qual deve ser a posição do ponto Q para que o momento de redução se anule.

A redução do sistema em Q leva aos esforços indicados na Figura 1.26.

O momento de redução é

$$M_Q = P \cdot x - P \cdot (l - x); \quad (1.30)$$



**Figura 1.26**

o ponto no qual a redução do sistema leva a momento nulo tem, portanto, a seguinte abscissa

$$M_Q = P \cdot x - P \cdot (l - x) = 0 \quad (1.31)$$

$$2 P \cdot x - P \cdot l = 0 \quad (1.32)$$

$$x = \frac{l}{2} \quad (1.33)$$

Conclui-se, então, que o polo no qual o sistema de forças da Figura 1.25 se reduz exclusivamente à resultante é o ponto médio da barra, como se indica na Figura 1.27.

Como já se verificou, a redução de um sistema de forças em um ponto leva a um sistema mecanicamente equivalente ao sistema que já foi reduzido. São, portanto, mecanicamente equivalentes os dois sistemas representados na Figura 1.28, onde o símbolo  $\equiv$  indica a equivalência mecânica entre eles.

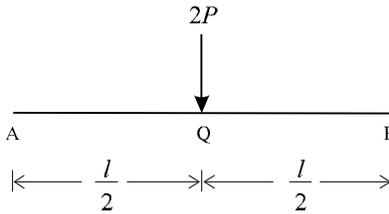


Figura 1.27

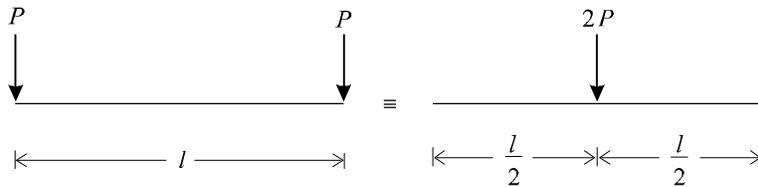


Figura 1.28

b) Solução indireta

A solução indireta se baseia no fato de o sistema original e o sistema reduzido exclusivamente a sua resultante serem mecanicamente equivalentes, o que possibilita que a determinação do polo de redução procurado seja feita de maneira indireta, através da resposta à seguinte pergunta: *em que ponto da barra se deve aplicar a resultante do sistema para que ela seja mecanicamente equivalente ao sistema original?*

Em outras palavras, deve-se responder ao seguinte: *qual deve ser a abscissa x do ponto Q para que os dois sistemas da Figura 1.29 sejam mecanicamente equivalentes?*

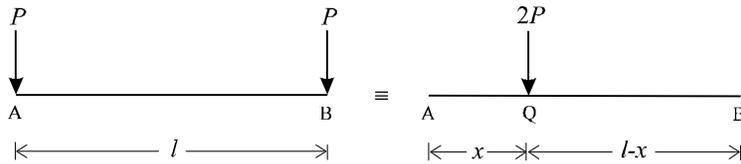
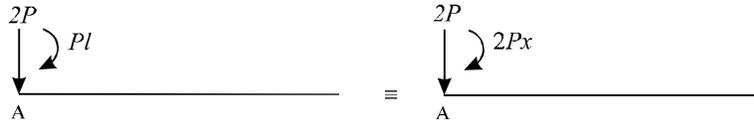


Figura 1.29

Para responder estas indagações basta reduzir os dois sistemas em um mesmo ponto e impor que os momentos de redução sejam os mesmos.

Por exemplo, reduzindo os dois sistemas no ponto A, tem-se os esforços da Figura 1.30.



**Figura 1.30**

Impondo que os dois momentos sejam iguais, obtém-se a abcissa do ponto Q procurado

$$M_A = -P \cdot l = -2 P \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{l}{2}. \quad (1.34)$$

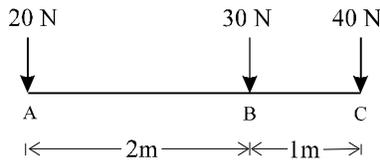
O ponto Q obtido é o mesmo encontrado na resolução direta.

As duas soluções levam ao mesmo resultado, podendo-se então utilizar qualquer uma delas. A solução indireta costuma ser a mais simples, dada a liberdade que se tem na escolha do polo de redução para a comparação de momentos que leva ao ponto procurado.

Na resolução dos problemas que se seguem vai-se utilizar a solução indireta.

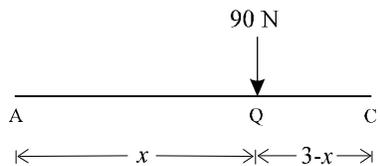
Exemplo 1.3

Aplicar na barra da Figura 1.31 uma única força mecanicamente equivalente ao sistema aplicado.



**Figura 1.31**

A força procurada é a resultante do sistema, mostrada na Figura 1.32.



**Figura 1.32**

A redução do sistema da Figura 1.31 no ponto A leva ao momento

$$M_A = -30 \cdot 2 - 40 \cdot 3 = -180 \text{ Nm}; \quad (1.35)$$

a redução da resultante da Figura 1.32 nesse mesmo ponto leva ao momento

$$M_A = -90 \cdot x. \quad (1.36)$$

Impondo que esses dois momentos sejam iguais, obtém-se

$$M_A = -180 = -90 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{180}{90} = 2 \text{ m.} \quad (1.37)$$

São portanto mecanicamente equivalentes os dois sistemas da Figura 1.33.

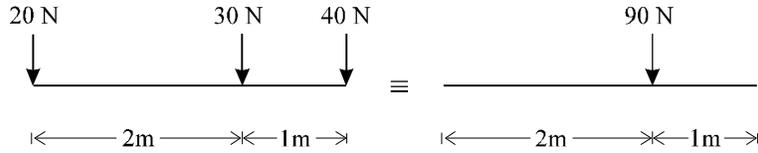


Figura 1.33

**Exemplo 1.4**

Determinar a linha de ação da força mecanicamente equivalente ao sistema da Figura 1.34.

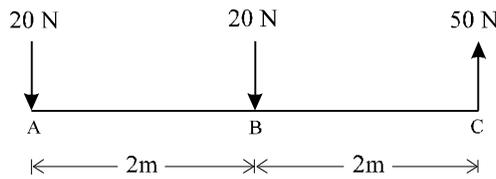


Figura 1.34

Esta força está indicada na Figura 1.35.

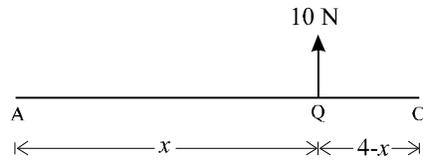


Figura 1.35

Impondo que as reduções desses dois sistemas em A levem aos mesmos momentos, obtém-se

$$M_A = -20 \cdot 2 + 50 \cdot 4 = 10 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{160}{10} = 16 \text{ m.} \quad (1.38)$$

São portanto mecanicamente equivalentes os dois sistemas da Figura 1.36.

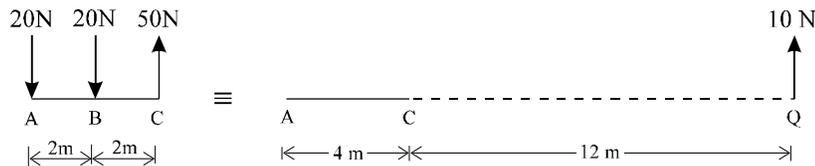


Figura 1.36

Quando se diz que dois sistemas são mecanicamente equivalentes está-se dizendo que, se eles forem aplicados em um mesmo sólido rígido nas mesmas condições iniciais, imprimirão ao sólido o mesmo movimento nos dois casos.

Observa-se que, neste exemplo, a linha de ação da força mecanicamente equivalente ao sistema não passa pela barra AC. Por esta razão, para conseguir aplicar a resultante isolada na barra AC, é necessário ligar

fisicamente o ponto Q à barra AC por meio de uma estrutura rígida, como se indica na Figura 1.37, garantindo-se assim que as duas barras da Figura 1.36 apresentem o mesmo movimento.

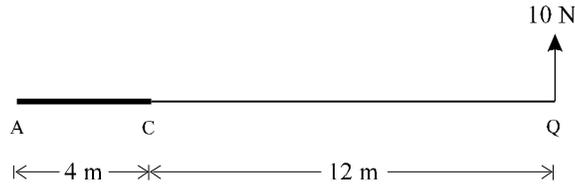


Figura 1.37

**Exemplo 1.5**

Determinar o ponto de aplicação da força mecanicamente equivalente ao sistema que atua na barra da Figura 1.38.

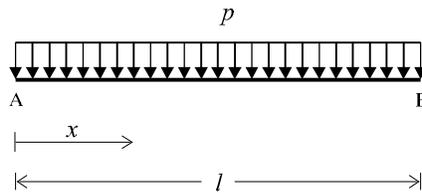


Figura 1.38

A resultante do carregamento uniformemente distribuído que atua na barra é

$$R = \int_0^l p \, dx = p \, l. \quad (1.39)$$

A determinação do ponto de aplicação desta força – mostrada na Figura 1.39 – será feita impondo que ambos os sistemas tenham o mesmo momento em relação ao ponto A.

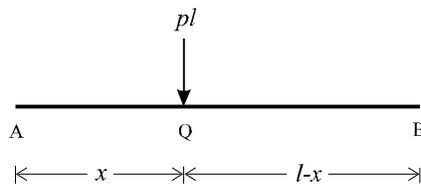


Figura 1.39

O momento do carregamento distribuído em relação ao ponto A é

$$M_A = \int_0^l -p \, x \, dx = -\frac{p \, l^2}{2}; \quad (1.40)$$

o momento da resultante é

$$M_A = -p \, l \, x. \quad (1.41)$$

Estes dois momentos tornam-se iguais para

$$x = \frac{l}{2}, \quad (1.42)$$

logo os dois sistemas da Figura 1.40 são mecanicamente equivalentes.

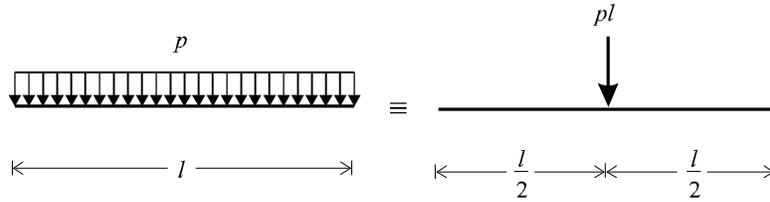


Figura 1.40

Exemplo 1.6

Determinar uma força mecanicamente equivalente ao sistema que atua na barra da Figura 1.41.

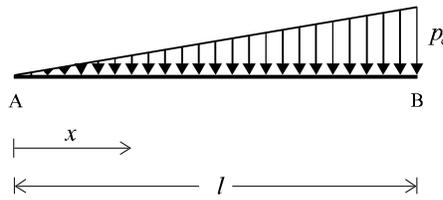


Figura 1.41

O carregamento linearmente distribuído que atua nesta barra tem a expressão

$$p(x) = p_0 \frac{x}{l}, \quad (1.43)$$

e sua resultante é

$$R = \int_0^l p(x) dx = \int_0^l p_0 \frac{x}{l} dx = \frac{p_0 l}{2}, \quad (1.44)$$

como mostra na Figura 1.42.

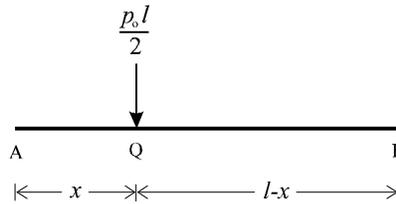


Figura 1.42

Os momentos destes dois sistemas em relação ao ponto A são respectivamente

$$M_A = \int_0^l -p(x)x dx = \int_0^l -\frac{p_0 x^2}{l} dx = -\frac{p_0 l^2}{3} \quad (1.45)$$

e

$$M_A = -\frac{p_0 l}{2} x; \quad (1.46)$$

estes dois momentos tornam-se iguais para

$$x = \frac{2}{3} l, \quad (1.47)$$

sendo portanto mecanicamente equivalentes os dois sistemas da Figura 1.43.

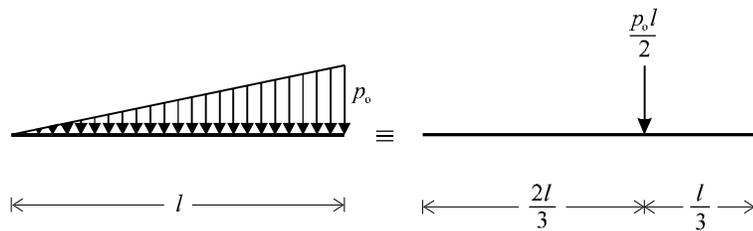


Figura 1.43

Observa-se que as resultantes dos carregamentos distribuídos dos dois últimos exemplos são iguais às áreas das figuras delimitadas pelo eixo da barra e pelo gráfico do carregamento: no caso do Exemplo 1.5, um retângulo de base  $l$ , altura  $p$  e área  $A = p l$  e, no caso do Exemplo 1.6, um triângulo de base  $l$ , altura  $p_0$  e área  $A = p_0 l/2$ .

Este resultado é geral, e a resultante de um carregamento distribuído pode ser sempre determinada calculando-se a área da figura delimitada pelo eixo da barra e pelo gráfico do carregamento.

## 1.5 Equilíbrio

### Definição 1.8

Diz-se que um sistema de pontos materiais está em *equilíbrio* em relação a um referencial se ele estiver em repouso em relação a esse referencial, isto é, se as posições de todos os seus pontos em relação a esse referencial não variarem com o tempo.

### Propriedade 1.8

Se um sistema de pontos materiais está em equilíbrio em relação a um referencial inercial, então a resultante das forças externas que atuam no sistema é nula e o momento destas forças em relação a um ponto qualquer do espaço também é nulo.

A demonstração desta propriedade decorre imediatamente do Princípio Fundamental da Dinâmica, expresso por meio das equações

$$\vec{R} = \int_{P \in S} \vec{a}_P \, dm \quad (1.48)$$

e

$$\vec{M}_O = \int_{P \in S} \vec{OP} \wedge \vec{a}_P \, dm, \quad (1.49)$$

onde:  $\vec{R}$  é a resultante das forças externas que atuam no sistema ;

$\vec{a}_P$  é a aceleração de um ponto  $P$  qualquer do sistema em relação ao referencial inercial ;

$m$  é a densidade de massa do sistema ;

$\vec{M}_O$  é o momento das forças externas que atuam no sistema em relação a um ponto  $O$  qualquer do espaço.

Estando o sistema em repouso em relação ao referencial inercial, tem-se que  $\vec{a}_P = \vec{0}$  para todos os seus pontos, logo:

$$\int_{P \in S} \vec{a}_P dm = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} = \vec{0} \quad (1.50)$$

E

$$\int_{P \in S} \vec{OP} \wedge \vec{a}_P dm = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_O = \vec{0}, \quad (1.51)$$

demonstrando-se assim a propriedade.

É muito importante ressaltar que  $\vec{R} = \vec{0}$  e  $\vec{M}_O = \vec{0}$  são condições necessárias para que um sistema material esteja em equilíbrio, não sendo, contudo, uma condição suficiente para se ter o equilíbrio do sistema em relação a um referencial inercial.

O simples movimento de translação uniforme de um cubo sobre um plano horizontal liso ilustra uma situação em que se tem  $\vec{R} = \vec{0}$  e  $\vec{M}_O = \vec{0}$ , mas não se tem repouso do cubo em relação ao plano horizontal.

Os referenciais ligados à Terra não são referenciais inerciais, mas o erro que se comete ao considerá-los como tal nos problemas comuns da mecânica é muito pequeno e, por esta razão, os referenciais ligados à Terra serão aqui considerados como sendo inerciais, admitindo-se que em relação a eles  $\vec{R} = \vec{0}$  e  $\vec{M}_O = \vec{0}$  sejam condições necessárias para o equilíbrio de um sistema material.

Observa-se também que todos os conceitos apresentados nessa seção se aplicam a quaisquer sistemas materiais, sejam eles planos ou espaciais.

## 1.6 Estática dos sistemas materiais planos

A estática dos sistemas materiais planos estuda o equilíbrio desses sistemas.

### Definição 1.9

Diz-se que um sistema material é *plano* quando todas as suas partículas se situam em um mesmo plano, no qual também se situam as forças que atuam no sistema.

Não existem de fato sólidos reais geometricamente planos, pois, por mais fino que seja um sólido, sempre terá uma espessura não nula. Na prática, entretanto, consideram-se como planos os sólidos delimitados por duas faces planas pouco afastadas, isto é, cuja espessura é muito menor que suas outras duas dimensões. Também são considerados como geometricamente planos os sistemas constituídos por barras cujos eixos se situam em um mesmo plano.

Assim, consideram-se como sendo planos os dois sistemas materiais mostrados na Figura 1.44.

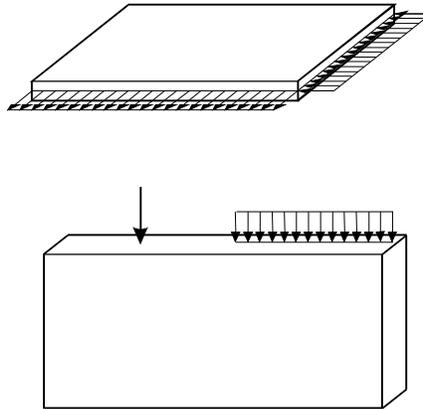


Figura 1.44

### 1.6.1 Apoios

Os esforços externos que atuam em um sistema material podem ser classificados em esforços externos *ativos* e esforços externos *reativos*.

Como exemplos de esforços externos ativos tem-se o peso dos objetos e pessoas que ocupam uma sala, o peso de um trem que passa por uma ponte, a pressão do vento sobre um telhado, a pressão da água sobre as paredes de uma caixa d'água e também o próprio peso do sistema, chamado de peso próprio da estrutura. Como se observa, os esforços externos ativos são os carregamentos que exigem a construção de uma estrutura que os suporte. Se eles não existirem, a estrutura deixa de ter sua razão de ser.

Os esforços externos reativos são os introduzidos pelos apoios que ligam os pontos do sistema a outros sistemas que o suportam.

#### Definição 1.10

*Apoios* são dispositivos que ligam pontos do sistema material a outros sistemas, impedindo determinados movimentos destes pontos ou do sistema como um todo.

Os principais apoios dos sistemas planos são:

- apoio simples ou articulação móvel

**impede:** o movimento do ponto vinculado na direção normal à da reta de vinculação.

**permite:** o movimento do ponto vinculado na direção paralela à da reta de vinculação;  
o movimento de rotação do sólido em torno do ponto vinculado.

A articulação móvel é indicada pelos símbolos:



Na Figura 1.45 representa-se uma barra vinculada por uma articulação móvel, indicando-se o movimento impedido e os movimentos permitidos.

Observa-se na Figura 1.45 que a articulação móvel é um apoio de dupla ação, ou seja, tanto impede que o ponto se movimente verticalmente para cima como para baixo.

Uma das maneiras de construir uma articulação móvel consiste em ligar o ponto que se deseja vincular a uma chapa por meio de um pino, e esta chapa à reta de vinculação por meio de rodas, como se mostra na

Figura 1.46. Algum tipo de dispositivo deve impedir que as rodas possam se destacar da base, garantindo-se assim a dupla ação do apoio.

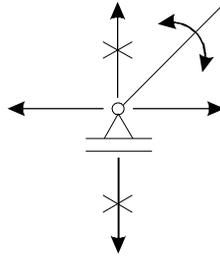


Figura 1.45

Os símbolos empregados para indicar este tipo de apoio são representações esquemáticas deste dispositivo mecânico.

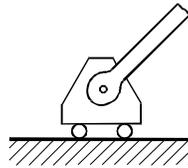


Figura 1.46

Para impedir que o ponto vinculado tenha movimento na direção normal à reta de vinculação, a articulação móvel aplica neste ponto do sólido vinculado uma força com a direção do movimento impedido, como se mostra na Figura 1.47.



Figura 1.47

A reação de apoio introduzida em uma estrutura por uma articulação móvel é, portanto, uma força com direção conhecida, mas com sentido e intensidade que devem ser determinados em cada caso particular.

- articulação fixa

**impede:** qualquer movimento do ponto vinculado.

**permite:** o movimento de rotação do sólido em torno do ponto vinculado.

Utilizam-se os seguintes símbolos para representar uma articulação fixa:



Uma articulação fixa impede qualquer movimento do ponto vinculado. Como qualquer movimento em um plano pode ser sempre considerado como a composição de um movimento na direção horizontal com um movimento na direção vertical, dizer que uma articulação fixa impede o deslocamento horizontal e o deslocamento vertical do ponto vinculado é equivalente a dizer que ela impede qualquer movimento do ponto vinculado.

É neste sentido que se entenderá aqui a articulação fixa: ela impede os movimentos do ponto vinculado nas direções horizontal e vertical, e permite o movimento de rotação do sólido em torno do ponto vinculado.

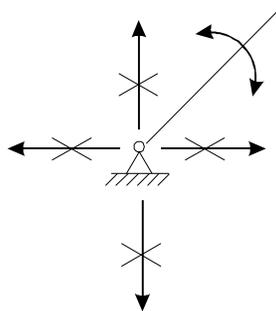


Figura 1.48

Na Figura 1.48 representa-se uma barra vinculada por uma articulação fixa, indicando-se os movimentos impedidos e o movimento permitido.

Uma das formas de construir uma articulação fixa consiste em ligar o ponto que se deseja vincular a uma chapa por meio de um pino e unir rigidamente esta chapa a uma base, como se mostra na Figura 1.49. É deste dispositivo de ligação que decorrem os símbolos utilizados para representar este apoio.

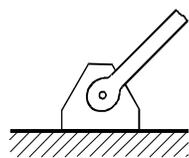


Figura 1.49

Para impedir que o ponto vinculado tenha qualquer movimento, a articulação fixa aplica neste ponto do sólido vinculado uma força que pode ter qualquer direção, como se indica na Figura 1.50(a).

A reação introduzida em uma estrutura por uma articulação fixa é, portanto, uma força com direção, sentido e intensidade que devem ser determinados em cada caso particular.

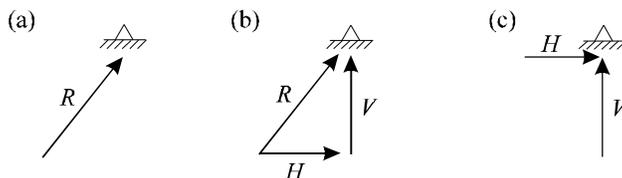


Figura 1.50

A reação introduzida em uma estrutura por uma articulação fixa pode ser sempre decomposta em suas componentes horizontal e vertical, como se mostra na Figura 1.50(b).

Pode-se, então, dizer alternativamente que uma articulação fixa introduz como reações de apoio duas forças – as componentes  $H$  e  $V$  de  $R$  (Figura 1.50(c)) – com direção conhecida, mas com sentido e intensidade desconhecidos, a serem determinados em cada caso particular.

É desta segunda maneira que se considerará uma articulação fixa: como um apoio que introduz como reações duas forças, a reação horizontal  $H$ , que impede o movimento horizontal do ponto vinculado, e a reação vertical  $V$ , que impede o movimento vertical.

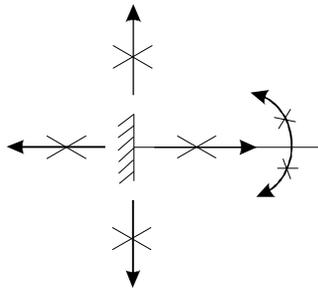
- engastamento

**impede:** qualquer movimento do ponto vinculado;  
o movimento de rotação do sólido em torno do ponto vinculado.

Emprega-se o seguinte símbolo para indicar um engastamento:



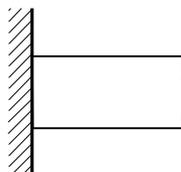
O engastamento é o apoio plano mais restritivo que se pode ter, já que impede qualquer movimento do ponto vinculado e a rotação do sólido em torno deste ponto.



**Figura 1.51**

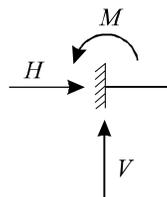
Na Figura 1.51 representa-se uma barra vinculada por um engastamento, mostrando-se os deslocamentos impedidos. Também aqui considerou-se um movimento qualquer como a combinação de um movimento na direção horizontal com um movimento na direção vertical.

Do ponto de vista construtivo, obtém-se um engastamento ligando rigidamente o ponto que se deseja vincular a uma base, como mostra a Figura 1.52; é deste dispositivo que deriva o símbolo empregado para representar um engastamento.



**Figura 1.52**

Para impedir qualquer movimento do ponto vinculado, o engastamento aplica neste ponto do sólido vinculado uma força horizontal e uma força vertical; para impedir a rotação do sólido em torno do ponto vinculado, aplica neste ponto do sólido vinculado um momento. Estes esforços estão mostrados na Figura 1.53.



**Figura 1.53**

As reações de apoio que um engastamento aplica no sólido no ponto de vinculação são, portanto, uma força horizontal, uma força vertical e um momento.

Observações:

1) O número de reações introduzidas pelos apoios é igual ao número de movimentos que eles impedem.

Ao impedir o movimento do ponto vinculado na direção normal à da reta de vinculação, uma articulação móvel aplica no sólido vinculado uma força com a direção do movimento impedido.

Ao impedir qualquer movimento do ponto vinculado, isto é, ao impedir o movimento horizontal e o movimento vertical deste ponto, uma articulação fixa aplica no sólido vinculado duas forças com as direções dos movimentos impedidos.

Finalmente, ao impedir qualquer movimento do ponto vinculado e também a rotação do sólido vinculado em torno deste ponto, um engastamento introduz na estrutura uma força horizontal, uma força vertical e um momento.

Uma articulação móvel impede, portanto, um movimento, e para isso aplica uma reação de apoio no sólido vinculado; uma articulação fixa impede dois movimentos, e aplica duas reações de apoio; um engastamento impede três movimentos, e aplica três reações de apoio.

2) Definição 1.11

Dá-se o nome de *vínculo* a cada uma das restrições impostas por um apoio ao movimento da estrutura.

Assim, ao impedir um movimento do ponto vinculado, uma articulação móvel introduz um vínculo no sistema; ao impedir dois movimentos do ponto vinculado, uma articulação fixa introduz dois vínculos no sistema; ao impedir os movimentos horizontal e vertical do ponto vinculado e a rotação do sólido em torno deste ponto, um engastamento introduz três vínculos no sistema.

O número de reações aplicadas no sólido por um apoio é igual portanto ao número de vínculos que ele introduz no sistema.

3) Deve-se notar que uma força reativa impede o movimento do ponto vinculado na direção desta força e que um momento reativo impede a rotação do sólido em torno do ponto vinculado, isto é, que forças impedem deslocamentos lineares e que momentos impedem deslocamentos angulares, isto é, rotações.

### 1.6.2 Movimento de um sistema material plano

Um sistema material plano só pode apresentar movimentos em seu plano, e todo movimento que pode ter é a combinação de uma translação com uma rotação.

Como exemplo, o movimento que leva o sólido da Figura 1.54 da *posição 0* para a *posição 2* é a composição de uma translação que o leva da *posição 0* para a *posição 1* e de uma rotação que o leva da *posição 1* à *posição 2*.

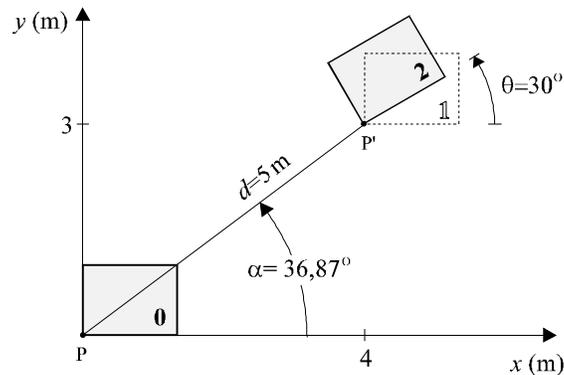


Figura 1.54

O número mínimo de parâmetros necessários para caracterizar este movimento é três: a translação é caracterizada pelo ângulo  $\alpha$  e pela distância  $d$  entre  $P$  e  $P'$ ; a rotação é caracterizada pelo ângulo  $\theta$ .

O primeiro parâmetro que caracteriza a translação determina sua direção e sentido; o segundo, sua magnitude.

O movimento que leva o sólido da *posição 0* para a *posição 2* pode então ser assim descrito: é a composição de uma translação de 5 m na direção e sentido da reta  $PP'$  – caracterizada pelo ângulo  $\alpha = 36,87^\circ$  com a horizontal – com uma rotação de  $30^\circ$  em torno do ponto  $P'$ .

Uma translação em uma direção qualquer pode ser sempre considerada como a composição de uma translação na direção horizontal com uma translação na direção vertical, como se mostra na Figura 1.55.

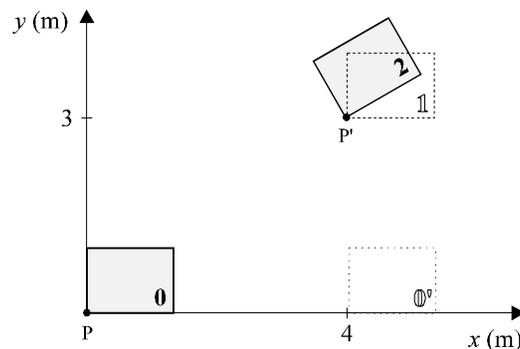


Figura 1.55

O movimento que leva o sólido da *posição 0* para a *posição 2* pode agora ser considerado como a composição de três movimentos: uma translação de 4 m na direção horizontal, que o leva da *posição 0* à *posição 0'*, uma translação de 3 m na direção vertical, que o leva da *posição 0'* à *posição 1*, e a rotação de  $30^\circ$  que o leva da *posição 1* à *posição 2*.

Observa-se que novamente são três os parâmetros que definem o movimento: a translação é definida pelas magnitudes de suas componentes horizontal e vertical, e a rotação, pelo ângulo  $\theta$ .

É desta segunda maneira que se irá considerar aqui o movimento geral de um sistema material plano: como uma composição de três movimentos, a saber, uma translação horizontal, uma translação vertical e uma rotação em torno de um eixo perpendicular ao plano do sistema.

Por esta razão, diz-se que um sistema material plano possui três graus de liberdade, ou seja, pode apresentar três tipos independentes de movimento.

Equivalentemente, pode-se dizer que o número de graus de liberdade de um sistema material é o menor número de parâmetros necessários para descrever um movimento do sistema.

No caso dos sistemas materiais planos, como já se mostrou, este número é três.

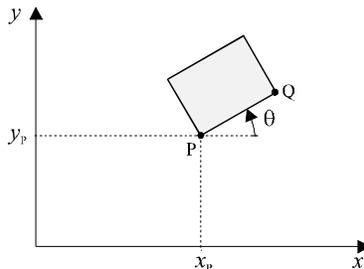
A definição mais comumente adotada para caracterizar os graus de liberdade de um sistema, e que é equivalente a estas duas que se acaba de mencionar, é a seguinte:

**Definição 1.12**

Dá-se o nome de graus de liberdade de um sistema material ao menor número de parâmetros necessários para definir a posição deste sólido em relação a um determinado referencial.

Como já se verificou por meio das duas outras definições, um sistema plano possui três graus de liberdade. De fato, fornecendo as coordenadas de um de seus pontos e o ângulo que uma de suas retas forma com um eixo de referência, define-se a posição do sólido.

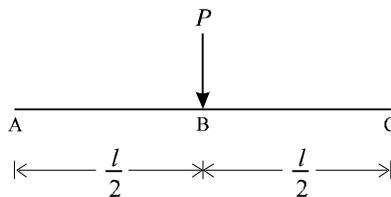
Na Figura 1.56, as coordenadas  $x_p$  e  $y_p$  do ponto  $P$  do sólido e o ângulo  $\theta$  que a reta  $PQ$  forma com a horizontal caracterizam a sua posição.



**Figura 1.56**

**1.6.3 Estruturas hipostáticas, isostáticas e hiperestáticas**

Considere-se a barra homogênea da Figura 1.57.



**Figura 1.57**

Sob a ação deste carregamento, esta barra irá apresentar movimento de translação para baixo.

Para impedir que esta barra venha a apresentar qualquer movimento, isto é, para fazer com que ela fique em equilíbrio, deve-se vinculá-la convenientemente.

Isto pode ser feito, por exemplo, engastando o ponto A, como se mostra na Figura 1.58.

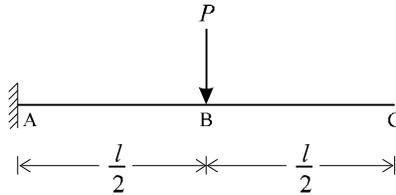


Figura 1.58

O engastamento, ao impedir qualquer movimento de translação do ponto A, impede conseqüentemente qualquer movimento de translação da barra; ao impedir, também, a rotação da barra em torno do ponto A, impossibilita que ela apresente movimento de rotação.

Basta, portanto, engastar um ponto de um sistema rígido para fazer com que ele fique em equilíbrio sob a ação de qualquer carregamento que venha a solicitá-lo.

Na Figura 1.59 representa-se novamente a barra, agora vinculada por um apoio fixo em A.

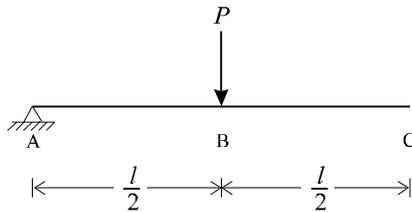


Figura 1.59

É imediata a constatação de que esta barra não apresentará translação, mas que apresentará rotação em torno do ponto A.

Esta rotação pode ser impedida, por exemplo, vinculando-se o ponto C por meio de uma articulação móvel que impede a translação na direção vertical, como se indica na Figura 1.60.

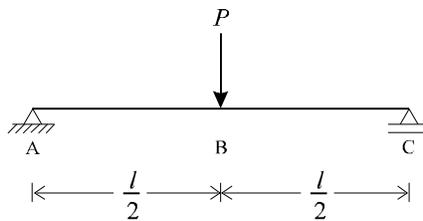


Figura 1.60

Agora a barra não pode mais girar em torno do ponto A, ficando então em equilíbrio.

Acabam de ser descritas duas formas de vincular esta estrutura e garantir seu equilíbrio. Existem inúmeras outras maneiras de vinculá-la e mantê-la em equilíbrio; sugere-se aos leitores que procurem formular algumas destas vinculações.

Para verificar se uma certa vinculação da viga é suficiente para mantê-la em equilíbrio, deve-se examinar se ela impede os três movimentos que ela pode ter no plano: translação horizontal, translação vertical e rotação.

Como se tem três movimentos a impedir, deve-se utilizar apoios que restrinjam pelo menos três componentes de movimento dos pontos vinculados ou da estrutura como um todo, isto é, apoios que introduzam pelo menos três vínculos no sistema.

O engastamento da Figura 1.58, ao impedir o movimento horizontal e o movimento vertical do ponto A e a rotação da estrutura em torno deste ponto, obriga-a a ficar em equilíbrio.

Já a articulação fixa da Figura 1.59, ao impedir apenas os movimentos horizontal e vertical do ponto A, não impede a rotação do sólido em torno deste ponto, portanto não garantindo o equilíbrio da viga.

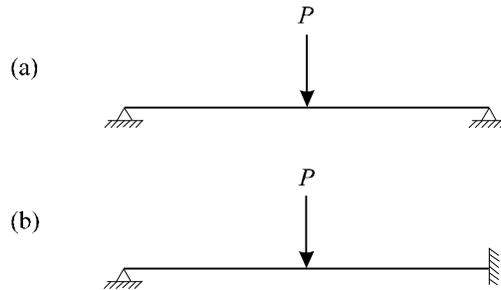


Figura 1.61

Para mantê-la em equilíbrio deve-se restringir um terceiro movimento, o que se faz ao vincular o ponto C por meio da articulação móvel da Figura 1.60, que impede o movimento vertical deste ponto.

A viga também ficaria em equilíbrio se se vinculasse o ponto C por meio de uma articulação fixa ou por meio de um engastamento, como se mostra nas Figuras 1.61(a) e (b).

### Definição 1.13

Uma estrutura que pode apresentar movimento recebe o nome de *hipostática*.

A viga da Figura 1.59, por exemplo, é uma estrutura hipostática. Outras estruturas hipostáticas são apresentadas na Figura 1.62.

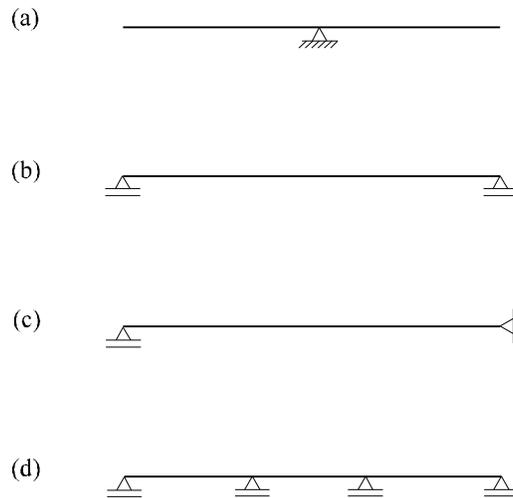


Figura 1.62

Basta existir um carregamento que faça uma estrutura apresentar movimento para que ela seja considerada hipostática.

Se a viga da Figura 1.62(b) for solicitada pela força vertical da figura 1.63(a) não apresentará nenhum movimento; se, entretanto, for solicitada pela força horizontal da Figura 1.63(b) apresentará translação horizontal para a direita, comprovando-se então que a viga da Figura 1.62(b) é uma estrutura hipostática.

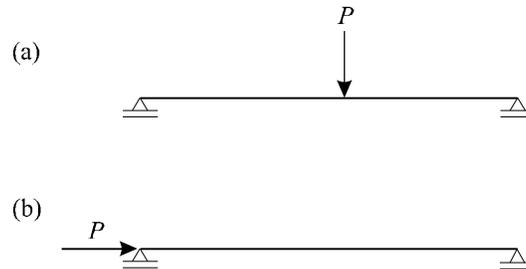


Figura 1.63

### Propriedade 1.9

Uma estrutura rígida plana vinculada com menos de três vínculos é hipostática.

Esta forma de enunciar esta propriedade é uma simplificação da seguinte frase mais rigorosa: uma estrutura rígida plana cujos apoios introduzem menos que três vínculos no sistema é hipostática.

Por simplicidade, opta-se pelo enunciado mais informal.

Como já se mostrou, um sistema rígido plano possui três graus de liberdade; por esta razão, para impedir qualquer movimento do sistema devem-se restringir três movimentos dos pontos vinculados ou do sistema como um todo. É por isso que um sistema vinculado com menos de três vínculos é hipostático.

Observa-se, contudo, que a Propriedade 1.9 é uma condição suficiente, mas não uma condição necessária para que um sistema rígido plano seja hipostático.

A barra da Figura 1.62(d), apesar de possuir quatro vínculos, apresentará movimento se for solicitada por uma força horizontal, sendo portanto hipostática.

### Definição 1.14

Dá-se o nome de estrutura *isostática* a uma estrutura cujos vínculos impedem que ela se movimente, mas que passa a poder se movimentar se algum de seus vínculos for suprimido.

Como exemplo de uma estrutura isostática tem-se a viga da Figura 1.64(a). Qualquer que seja seu carregamento, ela não poderá se movimentar.

São três os vínculos desta viga: dois introduzidos em *A* pela articulação fixa e um introduzido em *B* pela articulação móvel.

A supressão de qualquer um desses vínculos levará a uma estrutura que poderá se mover.

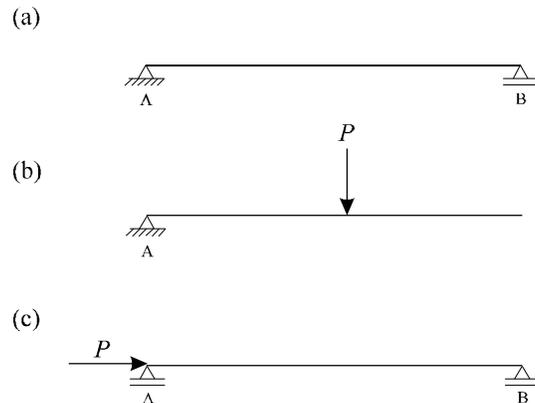


Figura 1.64

Se, por exemplo, for suprimido o vínculo do ponto B a estrutura passará a apresentar movimento se for solicitada por um carregamento vertical, como se indica na Figura 1.64(b).

Outra maneira de suprimir um vínculo desta viga consiste em se substituir a articulação fixa do ponto A por uma articulação móvel que impeça o movimento vertical deste ponto, eliminando-se assim o vínculo que impede o movimento horizontal do ponto A. A viga passará então a poder apresentar translação horizontal, como se mostra na Figura 1.64(c).

É fácil verificar que uma outra forma de se definir uma estrutura isostática é a seguinte: uma estrutura isostática é uma estrutura que não pode apresentar nenhum movimento, e que se transforma em hipostática se algum de seus vínculos for suprimido.

Um outro exemplo de uma estrutura isostática é a viga engastada da Figura 1.65(a).

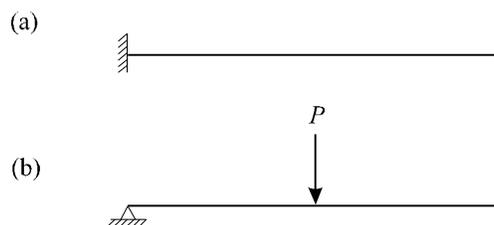


Figura 1.65

Se o engastamento for substituído por uma articulação fixa ela passará a poder apresentar movimento, como se mostra na Figura 1.65(b).

Como uma estrutura rígida plana possui três graus de liberdade, tem-se a seguinte propriedade:

#### Propriedade 1.10

Os apoios de uma estrutura rígida plana isostática sempre introduzem três vínculos no sistema.

Observa-se que esta propriedade fornece uma condição necessária, mas não suficiente, para que uma estrutura rígida plana seja isostática. A viga da Figura 1.66 possui três vínculos, mas não é isostática, e sim hipostática.

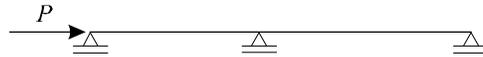


Figura 1.66

Definição 1.15

Dá-se o nome de estrutura *hiperestática* a uma estrutura que não pode apresentar movimento, e que pode ter vínculos suprimidos sem que se torne hipostática.

Como um exemplo de estrutura hiperestática tem-se a viga da Figura 1.67(a). Ela possui quatro vínculos: três introduzidos em A pelo engastamento e um introduzido em B pela articulação móvel.

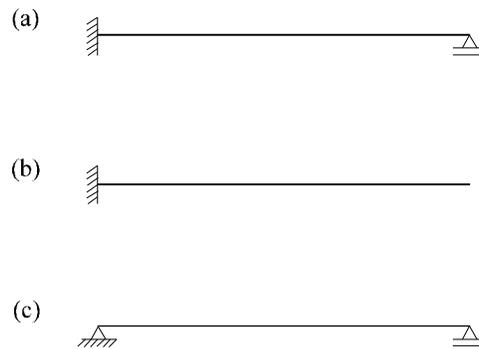


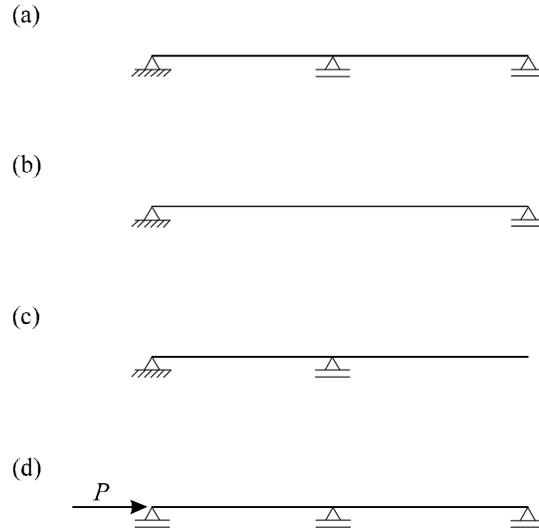
Figura 1.67

Se a articulação móvel for suprimida se obterá a viga da Figura 1.67(b), que não pode apresentar movimento. De igual forma, se o engastamento do ponto A for substituído por uma articulação fixa, se obterá a viga da Figura 1.67(c), que também não pode apresentar movimento.

Pode-se observar que as vigas das Figuras 1.67(b) e (c) são isostáticas, e que poderão passar a apresentar movimento se mais algum outro vínculo for suprimido.

É importante notar que na Definição 1.15 se diz que uma estrutura é hiperestática se existirem vínculos que podem ser suprimidos sem que se torne hipostática, não se dizendo, entretanto, que *qualquer* vínculo pode ser suprimido sem que ela se torne hipostática.

A viga da Figura 1.68(a), por exemplo, é hiperestática, pois qualquer uma de suas articulações móveis pode ser suprimida sem que se torne hipostática, como se vê nas Figuras 1.68(b) e (c). Se, entretanto, se substituir a articulação fixa por uma articulação móvel, como se mostra na Figura 1.68(d), se obterá uma estrutura hipostática. A viga da Figura 1.68(a), contudo, é hiperestática.



**Figura 1.68**

Do fato de uma estrutura rígida plana possuir três graus de liberdade decorre a propriedade:

Propriedade 1.11

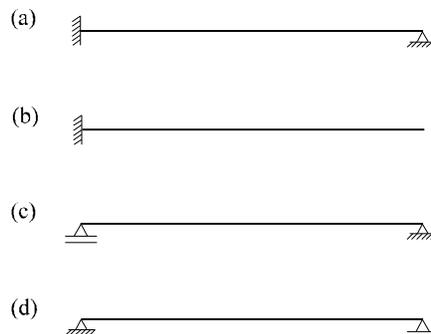
Os apoios de uma estrutura rígida plana hiperestática sempre introduzem mais que três vínculos no sistema.

Esta propriedade é uma condição necessária, mas não suficiente, para que uma estrutura seja hiperestática. A viga da Figura 1.62(d) é um exemplo de uma estrutura que possui mais que três vínculos, e é hipostática.

Definição 1.16

Dá-se o nome de grau de hiperestaticidade de uma estrutura hiperestática ao número máximo de vínculos da estrutura que podem ser suprimidos sem que ela se torne hipostática.

Comentou-se há pouco que a viga da Figura 1.67 pode ter um vínculo suprimido sem se tornar hipostática, passando a sê-lo se um segundo vínculo vier a ser suprimido. O grau de hiperestaticidade da viga da Figura 1.67 é portanto igual a um.



**Figura 1.69**

Considere-se agora a viga hiperestática da Figura 1.69(a).

Esta viga possui cinco vínculos: três introduzidos pelo engastamento e dois, pela articulação fixa. O maior número de vínculos que podem ser suprimidos sem que se torne hipostática é dois, como se verifica nas Figuras 1.69(b), (c) e (d), em que se apresentam três vigas isostáticas derivadas da viga hiperestática pela supressão de dois vínculos.

A viga da Figura 1.69(a) tem portanto grau de hiperestaticidade igual a dois.

Como o número mínimo de vínculos necessários para impedir que uma estrutura rígida plana apresente movimento é três, tem-se a seguinte propriedade.

### Propriedade 1.12

O grau de hiperestaticidade de uma estrutura rígida plana hiperestática é

$$g = v - 3, \quad (1.52)$$

onde:  $g$  é o grau de hiperestaticidade da estrutura;  
 $v$  é o número de vínculos introduzidos na estrutura pelos apoios.

Como se pode ver, grau de hiperestaticidade de uma estrutura é o número de vínculos que excedem o mínimo necessário para impedir o movimento da estrutura; estes vínculos superabundantes podem ser suprimidos sem que a estrutura se torne hipostática.

Encerrando e resumindo esta seção, comenta-se que a hipostaticidade, isostaticidade ou hiperestaticidade de uma estrutura se prende à capacidade que seus apoios apresentam de impedir o movimento da estrutura, o que depende do número de vínculos introduzidos na estrutura pelos apoios e do posicionamento desses vínculos.

### **1.6.4 Determinação das reações de apoio**

Os esforços externos que atuam em uma estrutura são classificados em esforços externos ativos e reativos. Os esforços externos ativos – o peso dos objetos e pessoas que ocupam uma sala, o peso de um trem que passa por uma ponte, etc.– são sempre conhecidos. Já os esforços externos reativos, introduzidos na estrutura pelos apoios, precisam ser determinados.

No caso das estruturas isostáticas esta determinação é muito simples, e se faz por meio das equações de equilíbrio da estática.

Como uma estrutura isostática sempre está em equilíbrio e o número de reações de apoio a determinar é igual ao número de equações de equilíbrio satisfeitas pelos esforços externos que atuam na estrutura, tem-se um sistema com o mesmo número de incógnitas e de equações, e que sempre é determinado.

No caso dos sistemas rígidos planos tem-se três reações de apoio a determinar e as seguintes três equações de equilíbrio da estática a serem satisfeitas pelos esforços externos que atuam no sistema:

$$\begin{aligned} \sum X &= \sum_{i=1}^n X_i = 0, \\ \sum Y &= \sum_{i=1}^n Y_i = 0, \\ \sum M_O &= \sum_{i=1}^n M_{O_i} = 0, \end{aligned} \quad (1.53)$$

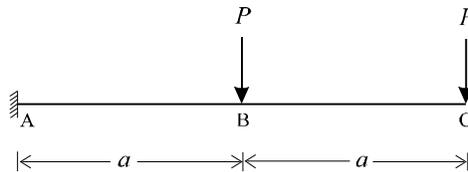
onde  $X_i$  e  $Y_i$  são as componentes das  $n$  forças externas do sistema em relação a um referencial situado no plano do sistema e  $M_{O_i}$  são os momentos de cada uma das forças do sistema em relação a um ponto qualquer  $O$  do plano.

A nomenclatura  $\sum X$ ,  $\sum Y$  e  $\sum M_O$  utilizada nas expressões (1.53) é uma simplificação da nomenclatura mais rigorosa a sua direita.

Serão apresentados agora alguns exemplos de determinação das reações de apoio de estruturas planas.

**Exemplo 1.7**

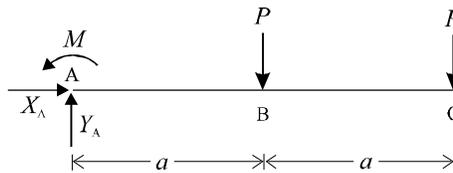
Determinar as reações de apoio da viga em balanço da Figura 1.70.



**Figura 1.70**

Dá-se o nome de vigas em balanço às vigas vinculadas apenas por um engastamento; estas vigas são também chamadas vigas engastadas.

As reações de apoio introduzidas na viga pelo engastamento são as forças  $X_A$ ,  $Y_A$  e o momento  $M$  indicados na Figura 1.71, e são estes os esforços que se deseja determinar.



**Figura 1.71**

Na Figura 1.71 estão indicados todos os esforços externos – ativos e reativos – que atuam na estrutura, e que devem satisfazer as três equações de equilíbrio da estática:

$$\begin{aligned} \sum X = 0 & \Rightarrow X_A = 0, \\ \sum Y = 0 & \Rightarrow Y_A - P - P = 0, \\ \sum M_A = 0 & \Rightarrow M - Pa - P 2a = 0. \end{aligned} \tag{1.54}$$

Observa-se que se utilizou o ponto A como polo para o cálculo dos momentos. Do sistema (1.54) obtêm-se as reações de apoio:

$$\begin{aligned} X_A &= 0, \\ Y_A &= 2P, \\ M &= 3Pa. \end{aligned} \tag{1.55}$$

Nota-se que a reação horizontal  $X_A$  é nula, e a explicação para este fato é bastante simples: como o carregamento que atua na viga não tende a fazê-la apresentar deslocamento horizontal, o engastamento não precisa introduzir na viga uma força que impeça tal translação.

Já com relação às duas outras reações tem-se uma situação diferente. O carregamento da viga tende a fazê-la apresentar translação vertical, e o engastamento introduz então uma reação vertical  $Y_A$  para impedir esta translação. Sob a ação das forças verticais – ativas e reativa – a viga tende a apresentar rotação, que é impedida pelo momento reativo  $M$ .

Os esforços externos que atuam na viga estão mostrados na Figura 1.72; o símbolo  $\equiv$  nesta figura indica que os esforços aplicados nestas duas vigas são os mesmos.

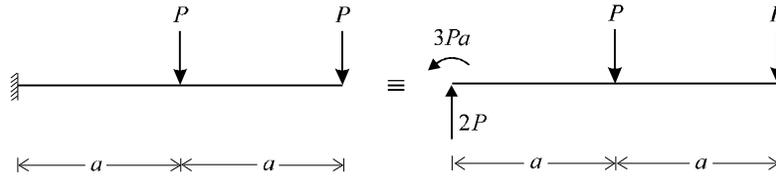


Figura 1.72

**Exemplo 1.8**

Determinar as reações de apoio da viga em balanço da Figura 1.73.

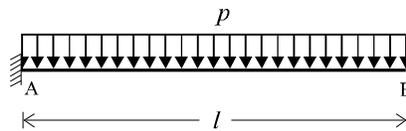


Figura 1.73

A determinação das reações de apoio desta viga ficará muito simplificada se se substituir o carregamento distribuído que atua nesta barra pela força mecanicamente equivalente a ele, indicada na Figura 1.74.

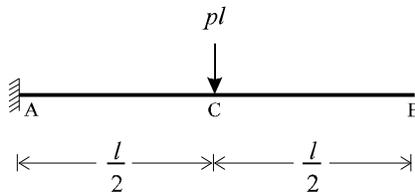


Figura 1.74

Como os carregamentos das vigas 1.73 e 1.74 são mecanicamente equivalentes, possuem as mesmas reações de apoio, sendo mais fácil determiná-las para a viga da Figura 1.74 que para a viga da Figura 1.73. As reações de apoio procuradas estão indicadas na Figura 1.75.

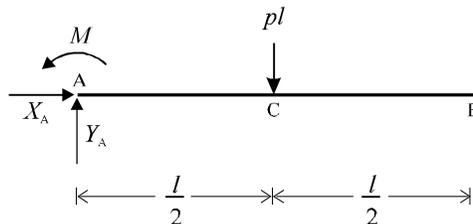


Figura 1.75

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum X = 0 &\Rightarrow X_A = 0, \\ \sum Y = 0 &\Rightarrow Y_A - pl = 0, \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow M - pl \frac{l}{2} = 0. \end{aligned} \quad (1.56)$$

As reações de apoio da viga da Figura 1.74 e também da viga da Figura 1.73 são portanto:

$$\begin{aligned} X_A &= 0, \\ Y_A &= pl, \\ M &= \frac{pl^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Estas reações estão mostradas na Figura 1.76.

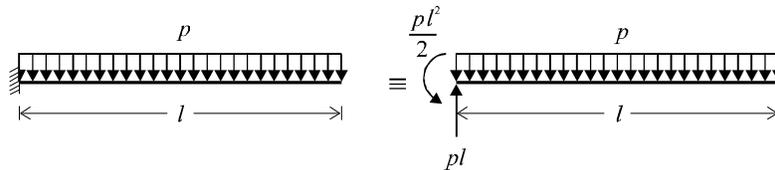


Figura 1.76

Na determinação das reações de apoio, a substituição de um carregamento distribuído por uma força mecanicamente equivalente sempre facilitará a resolução, devendo portanto ser sempre feita.

**Exemplo 1.9**

Determinar as reações de apoio da viga da Figura 1.77.

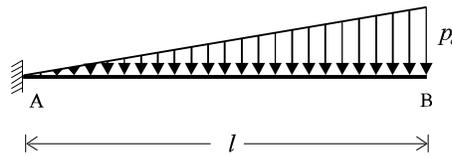
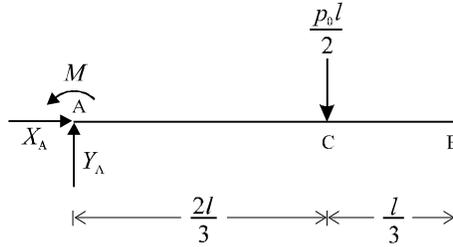


Figura 1.77

A substituição do carregamento distribuído pela força mecanicamente equivalente a ele leva à viga da Figura 1.78, cujas reações se determinam por meio das equações de equilíbrio

$$\begin{aligned} \sum X = 0 &\Rightarrow X_A = 0, \\ \sum Y = 0 &\Rightarrow Y_A - \frac{p_0 l}{2} = 0, \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow M - \frac{p_0 l}{2} \frac{2l}{3} = 0. \end{aligned} \quad (1.58)$$

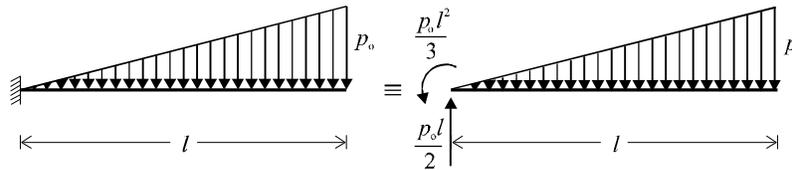


**Figura 1.78**

As reações de apoio da viga da Figura 1.77 são portanto:

$$\begin{aligned} X_A &= 0, \\ Y_A &= \frac{p_0 l}{2}, \\ M &= \frac{p_0 l^2}{3}, \end{aligned} \quad (1.59)$$

como se mostra na Figura 1.79.



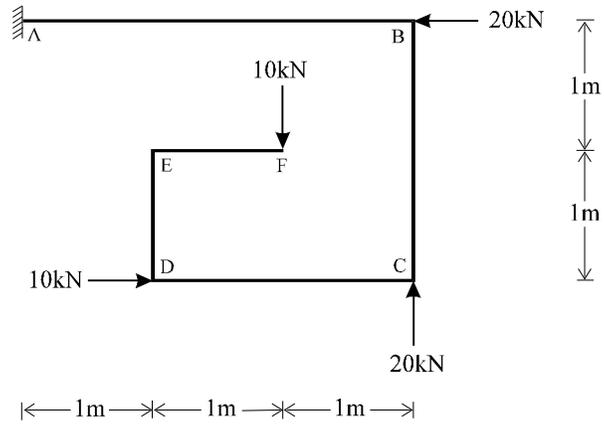
**Figura 1.79**

**Exemplo 1.10**

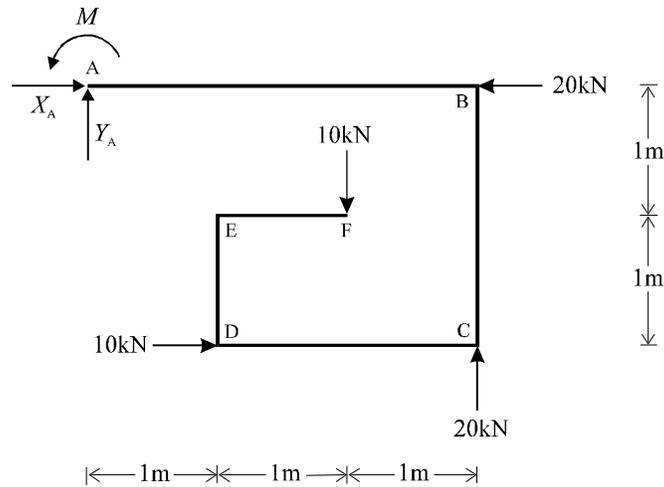
Determinar as reações de apoio da viga poligonal da Figura 1.80.

A obtenção das reações de apoio segue a mesma sistemática que nos demais exemplos: substitui-se o engastamento pelos esforços que pode introduzir na viga (Figura 1.81), e impõe-se que os esforços externos que atuam na estrutura satisfaçam as equações de equilíbrio da estática:

$$\begin{aligned} \sum X = 0 &\Rightarrow X_A - 20 + 10 = 0, \\ \sum Y = 0 &\Rightarrow Y_A + 20 - 10 = 0, \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow M + 20 \cdot 3 + 10 \cdot 2 - 10 \cdot 2 = 0. \end{aligned} \quad (1.60)$$



**Figura 1.80**



**Figura 1.81**

As reações de apoio são portanto:

$$\begin{aligned} X_A &= 10 \text{ kN} , \\ Y_A &= -10 \text{ kN} , \\ M &= -60 \text{ kNm} , \end{aligned} \tag{1.61}$$

como se mostra na Figura 1.82.

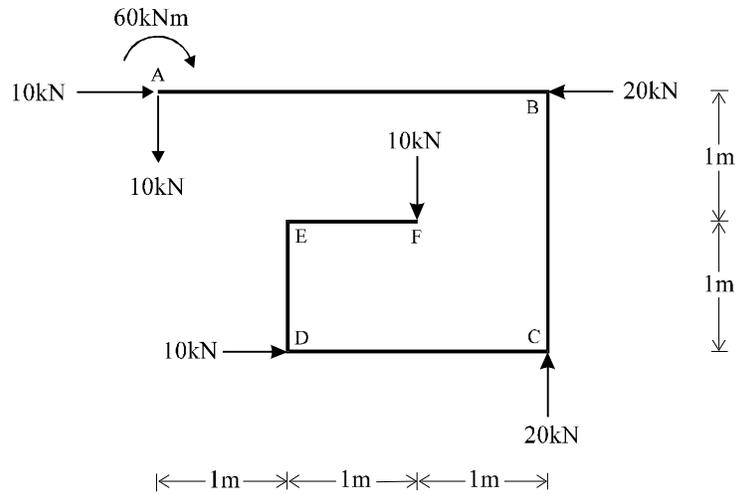


Figura 1.82

Exemplo 1.11

Determinar as reações de apoio da viga simplesmente apoiada da Figura 1.83.

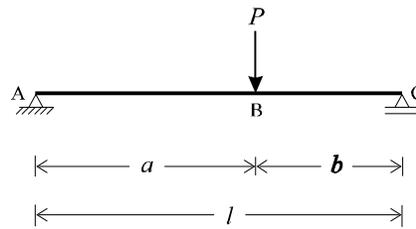


Figura 1.83

Dá-se o nome de vigas simplesmente apoiadas às vigas apoiadas em suas extremidades por meio de duas articulações, uma móvel e a outra fixa.

As reações de apoio que podem ser introduzidas nesta viga pelos apoios estão indicadas na Figura 1.84.

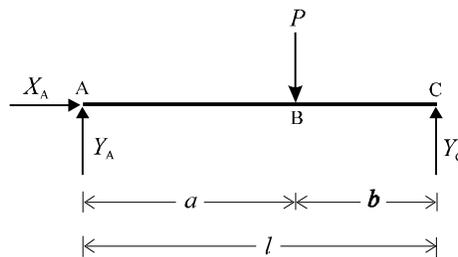


Figura 1.84

As equações de equilíbrio são

$$\sum X = 0 \quad \Rightarrow \quad X_A = 0,$$

$$\sum Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A - P + Y_C = 0, \quad (1.62)$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -Pa + Y_C l = 0,$$

de onde se obtém as reações:

$$X_A = 0,$$

$$Y_A = \frac{Pb}{l}, \quad (1.63)$$

$$Y_C = \frac{Pa}{l}.$$

Na Figura 1.85 indicam-se as reações de apoio desta viga simplesmente apoiada.

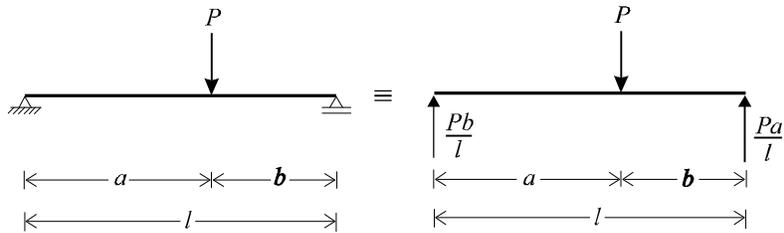


Figura 1.85

**Exemplo 1.12**

Determinar as reações de apoio da viga simplesmente apoiada com dois balanços da Figura 1.86.

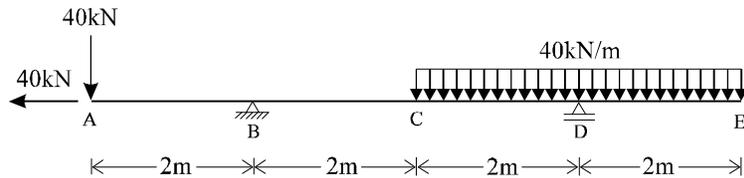


Figura 1.86

Esta viga é uma viga simplesmente apoiada porque possui como apoios duas articulações, uma fixa e outra móvel; como a extremidade A do trecho AB é livre, diz-se que este trecho está em balanço, apoiado na viga simplesmente apoiada BD; da mesma forma, como a extremidade E do trecho DE também é livre, diz-se que ele está em balanço, apoiado na viga simplesmente apoiada.

Por estas razões, dá-se a este tipo de viga o nome de viga simplesmente apoiada com dois balanços, um balanço à esquerda – o trecho AB – e um balanço à direita – o trecho DE.

Para determinar as reações de apoio da viga substituem-se os apoios pelos esforços que podem introduzir na estrutura, substitui-se o carregamento distribuído pela força mecanicamente equivalente a ele, e impõe-se que estes esforços, indicados na Figura 1.87, satisfaçam as equações de equilíbrio da estática.

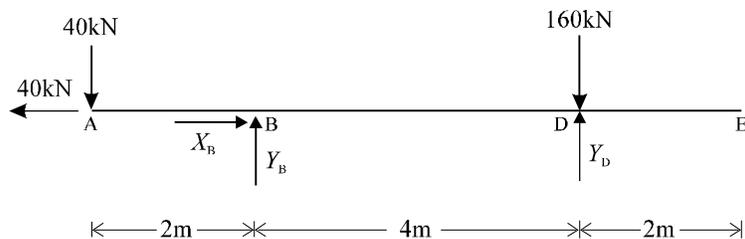


Figura 1.87

Tem-se

$$\begin{aligned} \sum X = 0 &\Rightarrow -40 + X_B = 0, \\ \sum Y = 0 &\Rightarrow Y_B + Y_D = 40 + 160, \\ \sum M_B = 0 &\Rightarrow 40 \cdot 2 + 4 \cdot Y_D - 160 \cdot 4 = 0, \end{aligned} \quad (1.64)$$

de onde decorrem

$$\begin{aligned} X_B &= 40 \text{ kN}, \\ Y_B &= 60 \text{ kN}, \\ Y_D &= 140 \text{ kN}. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Observa-se que, neste problema, optou-se por escrever a equação de equilíbrio de momentos utilizando como polo o ponto B, e não a extremidade esquerda da barra – o ponto A –, como se havia feito nos exemplos anteriores.

A razão para esta escolha é muito simples: a equação de equilíbrio de momentos relativamente ao ponto A é

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2 \cdot Y_B + 6 \cdot Y_D - 160 \cdot 6 = 0, \quad (1.66)$$

verificando-se que figuram nesta equação duas das reações desconhecidas. Como a reação  $Y_B$  passa pelo ponto B, na equação de equilíbrio de momentos relativamente ao ponto B figura apenas a incógnita  $Y_D$ , o que facilita a resolução do sistema, já que o valor dessa incógnita decorre diretamente dessa equação.

Convém, portanto, escolher como polo da equação de equilíbrio de momentos um ponto pelo qual passe a linha de ação de uma ou mais incógnitas, de forma a facilitar a resolução do sistema de equações.

Na Figura 1.88 indicam-se as reações de apoio da viga da Figura 1.86.

Neste exemplo foram apresentadas quatro equações de equilíbrio para a viga da Figura 1.87: as equações (1.64) e a equação (1.66).

Como se trata de um sistema rígido plano que possui três graus de liberdade, apenas três dessas equações podem ser linearmente independentes, sendo a quarta delas uma combinação linear das outras três.

A grande utilidade de se examinar uma equação de equilíbrio de momentos adicional reside no fato de que ela permite verificar se houve algum erro na determinação das reações de apoio.

Vai-se utilizar a viga da Figura 1.88(b) para ilustrar esta afirmação. Qualquer que seja o polo considerado, o momento dos esforços que atuam nesta viga em relação a este polo deve ser nulo. Este fato pode ser usado para comprovar se as reações já determinadas estão corretas.

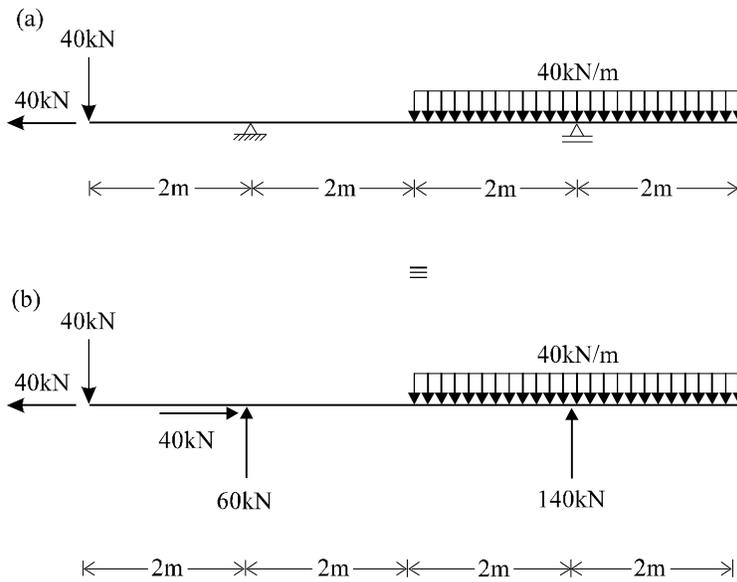


Figura 1.88

Calculando, por exemplo, os momentos destes esforços em relação ao ponto D, tem-se

$$\sum M_D = 40 \cdot 6 - 60 \cdot 4 = 0. \quad (1.67)$$

Este valor nulo para o momento do sistema em relação ao ponto D é uma boa indicação de que as reações devem estar corretas, pois uma condição necessária para que se tenha reações corretas é que o momento dos esforços que atuam na viga em relação a este ou a qualquer outro polo seja nulo.

Esta condição, entretanto, não é suficiente para garantir a exatidão das reações, e dois erros que se compensem podem fazer com que se tenha  $\sum M_D = 0$  mesmo com reações de apoio incorretas.

Apesar disso, a equação de equilíbrio de momentos adicional, por ser muito simples de escrever e por quase sempre permitir detectar reações de apoio calculadas incorretamente, deve ser feita sempre que o sistema de equações de equilíbrio for um pouco mais complexo e de solução mais trabalhosa.

Exemplo 1.13

Determinar as reações de apoio da estrutura da Figura 1.89.

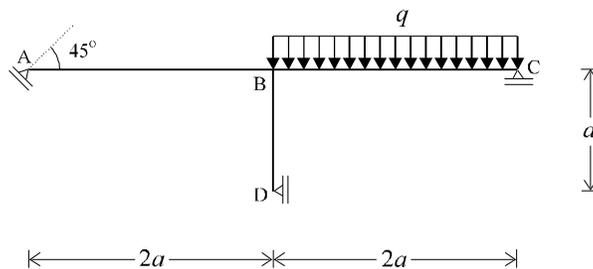
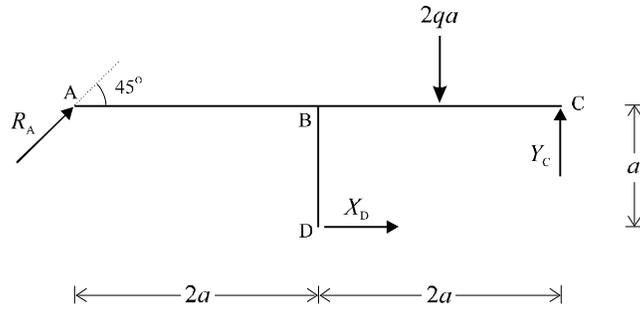


Figura 1.89



**Figura 1.90**

Na Figura 1.90 representam-se as reações que podem ser introduzidas na estrutura pelos apoios e a força mecanicamente equivalente à carga distribuída.

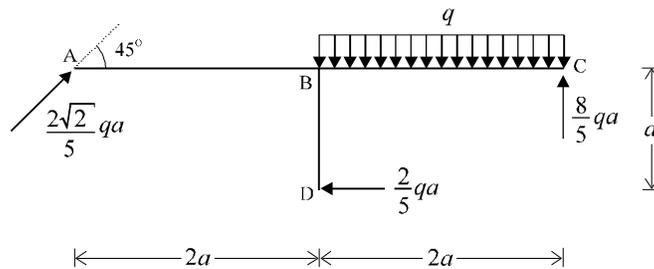
As equações de equilíbrio referentes a esta estrutura são

$$\begin{aligned} \sum X = 0 &\Rightarrow R_A \frac{\sqrt{2}}{2} + X_D = 0, \\ \sum Y = 0 &\Rightarrow R_A \frac{\sqrt{2}}{2} + Y_C = 2qa, \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow X_D a - 2qa \cdot 3a + Y_C 4a = 0, \end{aligned} \quad (1.68)$$

decorrendo

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{2\sqrt{2}}{5} qa, \\ Y_C &= \frac{8}{5} qa, \\ X_D &= -\frac{2}{5} qa. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Na Figura 1.91 indicam-se as reações de apoio da estrutura da Figura 1.89.



**Figura 1.91**

Examinando as equações (1.68) observa-se que em cada uma delas há duas incógnitas, o que torna a resolução do sistema um pouco trabalhosa.

Pode-se obter um outro sistema de equações que permite determinar as reações de apoio de forma mais imediata, lembrando que o momento dos esforços que atuam na estrutura da Figura 1.90 é nulo em relação a qualquer ponto que se considere. Este sistema mais simples é constituído pelas três equações de equilíbrio de momentos relativas a três pontos particulares. Para comprovar esta afirmação, considere-se a

Figura 1.92, em que se reapresenta a estrutura que está sendo analisada, e na qual estão indicadas as interseções E, F e G das linhas de ação das reações de apoio.

A equação de equilíbrio de momentos em relação ao ponto E é

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow X_D 5a + 2qa \cdot a = 0 . \quad (1.70)$$

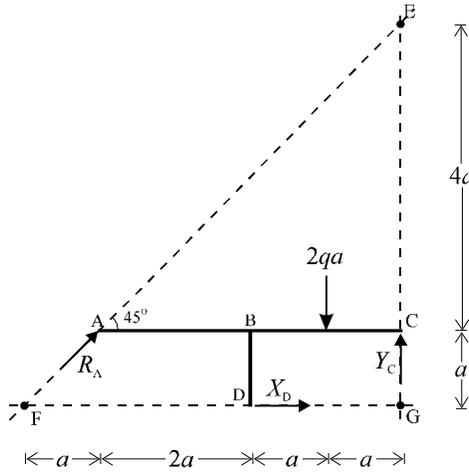


Figura 1.92

Observa-se que nesta equação de equilíbrio só figura a incógnita  $X_D$ , já que as linhas de ação das outras duas incógnitas passam pelo ponto E.

Coisa análoga se passa em relação às equações de equilíbrio de momentos referentes aos pontos F e G:

$$\sum M_F = 0 \Rightarrow -2qa \cdot 4a + Y_C 5a = 0 , \quad (1.71)$$

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow 2qa \cdot a - R_A \frac{5a\sqrt{2}}{2} = 0 .$$

O sistema constituído pelas equações (1.70) e (1.71) leva às mesmas reações de apoio já determinadas, mas agora de forma mais simples, já que em cada uma das equações figura apenas uma incógnita, comprovando-se assim a afirmação que havia sido feita.

Conclui-se, portanto, que nem sempre o sistema constituído pelas três equações de equilíbrio clássicas –  $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$  e  $\sum M_P = 0$ , onde P é um ponto qualquer – é o mais adequado para determinar as reações de apoio.

Quaisquer três equações de equilíbrio linearmente independentes podem ser empregadas para determinar as reações de apoio, podendo-se substituir uma ou mesmo as duas equações de equilíbrio de forças –  $\sum X = 0$  e  $\sum Y = 0$  – por equações de equilíbrio de momentos.

Como princípio geral a ser sempre seguido, recomenda-se que as equações de equilíbrio de momentos sejam determinadas em relação a pontos particulares, que venham a facilitar a posterior resolução do sistema.

## 1.7 Estática dos sistemas materiais espaciais

Nesta seção será estudado o equilíbrio dos sistemas materiais espaciais.

Definição 1.17

Os sistemas materiais espaciais são aqueles que não são planos, isto é, são aqueles que não possuem todas as suas partículas e todos os esforços que os solicitam situados em um mesmo plano.

Há dois tipos de sistemas espaciais: aqueles que, embora tendo todas as suas partículas situadas em um mesmo plano, são solicitados por forças que não pertencem a este plano, como se mostra nas Figuras 1.93(a) e (b), e aqueles que não possuem todas as suas partículas situadas em um mesmo plano, como os das Figuras 1.93(c) e (d).

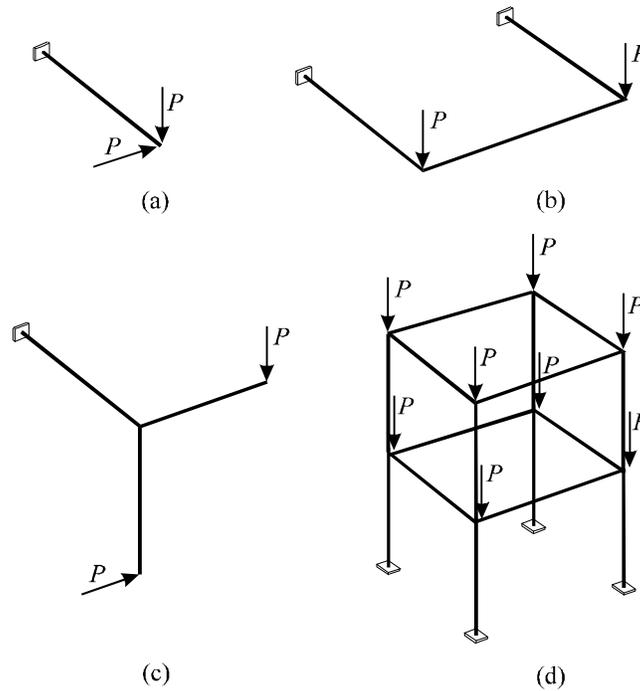


Figura 1.93

**1.7.1 Apoios**

Os principais apoios dos sistemas espaciais são os seguintes:

- apoio simples

**impede:** o movimento do ponto vinculado na direção normal à do plano de vinculação.

**permite:** o movimento do ponto vinculado em qualquer direção paralela ao plano de vinculação;  
o movimento de rotação do sólido em torno de qualquer eixo que passa pelo ponto vinculado.

O apoio simples é indicado pelos símbolos



O primeiro destes símbolos é uma representação esquemática de um dos dispositivos mecânicos utilizados para construir um apoio simples: uma articulação ligada a uma base que se movimenta livremente sobre o plano de vinculação.

Para impedir o movimento do ponto vinculado na direção normal à do plano de vinculação o apoio simples introduz neste ponto do sólido uma força com a direção do movimento impedido, como se mostra na Figura 1.94.

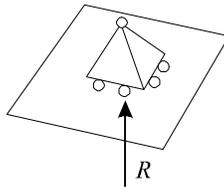


Figura 1.94

A reação de apoio introduzida em uma estrutura espacial por um apoio simples é uma força com direção conhecida, mas com sentido e intensidade a determinar em cada caso particular.

Como um apoio simples restringe um único movimento do ponto vinculado – o movimento numa determinada direção –, introduz um único vínculo no sistema.

Nos cursos de mecânica apresentam-se outros dois apoios que restringem movimentos do ponto vinculado: o *anel* e a *rótula*.

- anel

**impede:** o movimento do ponto vinculado no plano perpendicular à reta de vinculação.

**permite:** o movimento do ponto vinculado na direção da reta de vinculação; a rotação do sólido em torno dos eixos que passam pelo ponto vinculado.

O anel é indicado pelo símbolo da Figura 1.95.

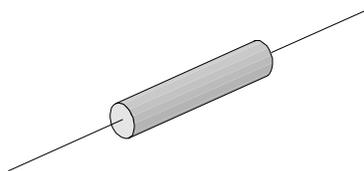


Figura 1.95

O anel impede que o ponto vinculado se movimente no plano perpendicular à reta de vinculação, o plano caracterizado pelos eixos  $x$  e  $y$  da Figura 1.96.

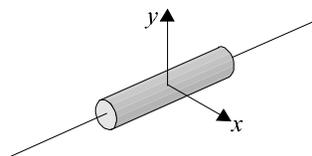


Figura 1.96

Como qualquer movimento de um ponto em um plano pode ser decomposto em duas componentes segundo duas direções distintas situadas nesse plano, dizer que um anel impede qualquer movimento do ponto vinculado no plano  $xy$  da Figura 1.96 é equivalente a dizer que ele impede o movimento do ponto na direção do eixo  $x$  e também o seu movimento na direção do eixo  $y$ .

Para impedir que o ponto vinculado apresente movimento no plano perpendicular à reta de vinculação o anel introduz neste ponto do sistema uma força situada no plano dos movimentos impedidos – a força  $R$  da Figura 1.97(a) –, com direção, sentido e intensidade a determinar em cada caso particular.

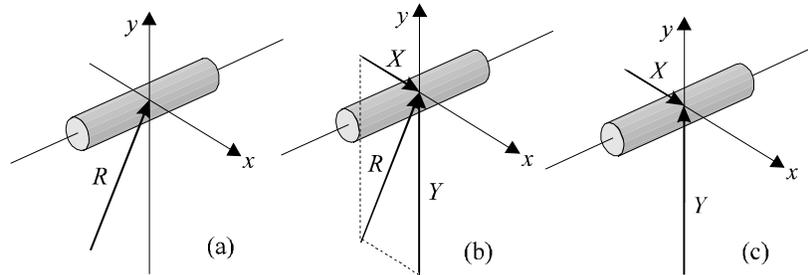


Figura 1.97

Como uma força situada em um plano pode ser sempre decomposta em duas componentes segundo duas direções distintas nesse plano, pode-se dizer que o anel introduz como reações de apoio as duas componentes de  $R$  segundo os eixos  $x$  e  $y$ , como se indica na Figura 1.97(b). A reação  $X$  impede o movimento do ponto na direção do eixo  $x$  e a reação  $Y$ , o movimento na direção do eixo  $y$ .

Pode-se dizer, portanto, que as reações de apoio introduzidas por um anel em um sistema são duas forças com direções conhecidas, mas com sentidos e intensidades a determinar em cada caso particular, as forças  $X$  e  $Y$  da Figura 1.97(c).

Como impede os movimentos de um ponto segundo duas direções distintas, um anel introduz dois vínculos em um sistema.

Pode-se facilmente verificar que dois apoios simples convenientemente posicionados são equivalentes a um anel, como se mostra na Figura 1.98.

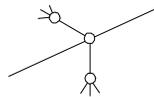


Figura 1.98

Ao impedir que o ponto vinculado apresente movimento nas duas direções normais à reta de vinculação, os dois apoios simples da Figura 1.98 estão impedindo que ele apresente qualquer movimento no plano perpendicular a essa reta, o que torna os apoios das Figuras 1.95 e 1.98 equivalentes.

Esta forma de se considerar um anel – como o resultado da combinação de dois apoios simples – tem a grande vantagem de deixar bem claros quantos vínculos e quantas reações de apoio um anel introduz em uma estrutura.

- rótula

**impede:** qualquer movimento do ponto vinculado.

**permite:** a rotação do sistema em torno dos eixos que passam pelo ponto vinculado.

Indica-se uma rótula por meio do símbolo da Figura 1.99.

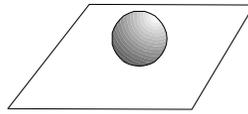


Figura 1.99

Os comentários relativos a uma rótula são qualitativamente semelhantes aos feitos a respeito de um anel. Como um movimento qualquer no espaço pode ser sempre decomposto em três componentes segundo três direções não-coplanares, dizer que uma rótula impede qualquer movimento de um ponto é equivalente a dizer que ela impede os movimentos deste ponto em três direções não-coplanares, por exemplo as direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  da Figura 1.100.

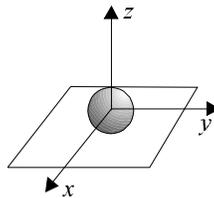


Figura 1.100

Para impedir qualquer movimento do ponto vinculado uma rótula nele aplica uma força  $R$  – mostrada na Figura 1.101(a) –, cuja direção, sentido e intensidade devem ser determinados em cada caso particular.

Esta força reativa pode ser decomposta em suas componentes segundas os eixos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , como se mostra na Figura 1.101(b). As forças  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  impedem, respectivamente, os movimentos do ponto nas direções dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

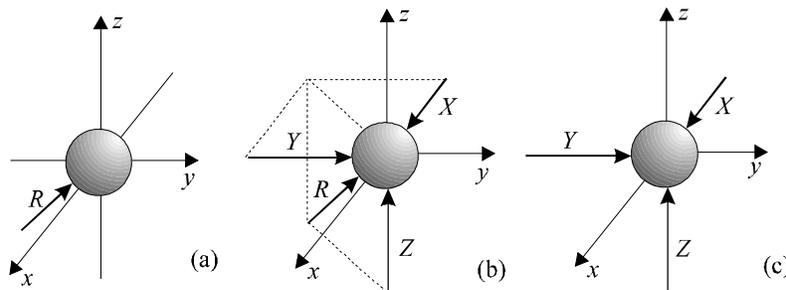


Figura 1.101

Pode-se dizer então que as reações de apoio introduzidas por uma rótula são três forças com direções conhecidas, mas com sentidos e intensidades a determinar, as forças  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  da Figura 1.101(c).

Como impede três movimentos de um ponto, uma rótula introduz três vínculos no sistema.

Três apoios simples convenientemente dispostos – como se mostra na Figura 1.102 – são equivalentes a uma rótula: ao impedir os movimentos do ponto em três direções não-coplanares, os apoios simples da Figura 1.102 impedem qualquer movimento do ponto vinculado.

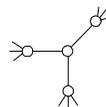


Figura 1.102

Neste texto, um anel será considerado como na Figura 1.98: uma combinação adequada de dois apoios simples; de igual forma, se considerará uma rótula como uma combinação conveniente de apoios simples, como na Figura 1.102.

Os três apoios que acabam de ser examinados impedem movimentos do ponto vinculado, mas todos eles permitem a rotação do sistema em torno dos eixos que passam por esse ponto.

Será examinado agora um apoio que também impede rotações.

- engastamento

**impede:** qualquer movimento do ponto vinculado;  
a rotação do sistema em torno dos eixos que passam pelo ponto vinculado.

Indica-se o engastamento espacial pelo símbolo



No estudo que se acaba de fazer sobre a rótula foram determinados os esforços que um apoio introduz em um sistema ao impedir que o ponto vinculado apresente qualquer movimento.

Da mesma forma que a rótula, também o engastamento, ao impedir qualquer movimento do ponto engastado, nele aplica uma força com direção, sentido e intensidade a serem determinados.

Como esta força pode ser decomposta segundo três direções não-coplanares, pode-se dizer alternativamente que um engastamento introduz no ponto vinculado três forças com direções conhecidas, mas com sentidos e intensidades a determinar, as forças  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  da Figura 1.103.

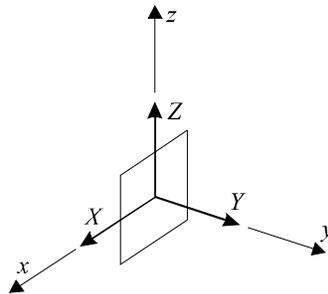


Figura 1.103

Além de impedir qualquer movimento do ponto vinculado, o engastamento também impede a rotação do sistema em torno de qualquer eixo que passa por este ponto. Para isso, aplica no ponto engastado um momento com direção, sentido e intensidade a determinar em cada caso particular (Figura 1.104(a)).

O momento reativo  $M$  da Figura 1.104(a) pode ser decomposto segundo três direções não-coplanares, como se indica na Figura 1.104(b).

Pode-se, então, dizer que para impedir a rotação do sistema em torno de qualquer eixo que passa pelo ponto vinculado um engastamento introduz neste ponto três momentos com direções conhecidas, mas com sentidos e intensidades a determinar, os momentos  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_z$  da Figura 1.104(c).

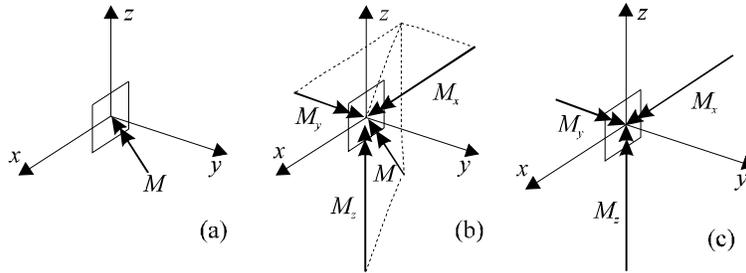


Figura 1.104

O momento  $M$  da Figura 1.104(a) impede a rotação do sistema em torno do eixo que possui a direção do vetor que representa esse momento; essa rotação pode ser sempre considerada como a composição de três rotações do sistema, em torno dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

As componentes  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_z$  de  $M$  impedem, respectivamente, as rotações do sistema em torno dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , impedindo desta forma que o sistema apresente rotação em torno de qualquer eixo que passe pelo ponto vinculado.

Um engastamento, portanto, ao impedir o movimento de um ponto em três direções não-coplanares e as rotações deste ponto em torno destes três eixos, introduz seis vínculos no sistema.

As seis reações de apoio que impedem esses seis movimentos estão indicadas na Figura 1.105.

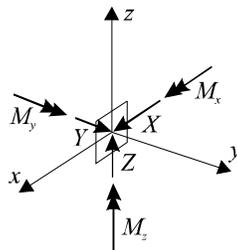


Figura 1.105

Para finalizar esta seção deve-se notar que, da mesma forma que para os sistemas planos, também no caso dos sistemas espaciais os deslocamentos lineares dos pontos vinculados são impedidos por forças e os deslocamentos angulares, isto é, as rotações do sistema em torno dos eixos que passam por um ponto, são impedidos por momentos.

### 1.7.2 Movimentos de um sistema material espacial

Um sistema rígido espacial possui seis graus de liberdade, ou seja, são necessários seis parâmetros para caracterizar um movimento do sistema; três desses parâmetros definem a translação do sólido e os outros três, a rotação.

Considere-se o sólido da Figura 1.106, que da *posição 0* passa à *posição 4*, fazendo com que o ponto  $P$  passe à posição  $P'$ .

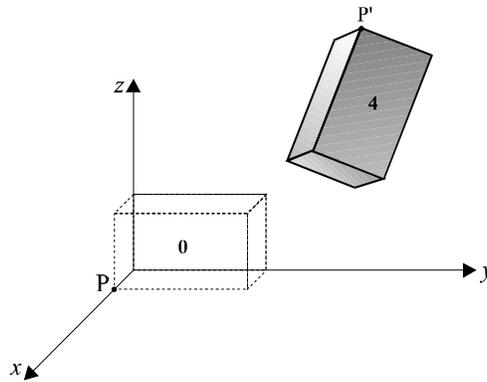


Figura 1.106

Este movimento pode ser considerado como a composição de três translações e três rotações.

As três translações do sólido que levam o ponto  $P$  à posição  $P'$  estão indicadas na Figura 1.107: uma translação na direção do eixo  $x$ , que o leva da *posição 0* à *posição 1*, uma translação na direção do eixo  $y$ , que o leva à *posição 2*, e uma translação na direção do eixo  $z$ , que o leva à *posição 3*. O movimento que leva o sólido da *posição 3* à *posição final 4* é a composição de três rotações, em torno dos eixos  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$ , que passam por  $P'$  e são paralelos aos eixos coordenados (Figura 1.108).

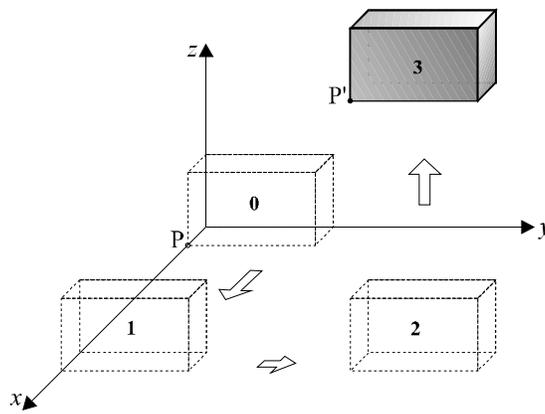


Figura 1.107

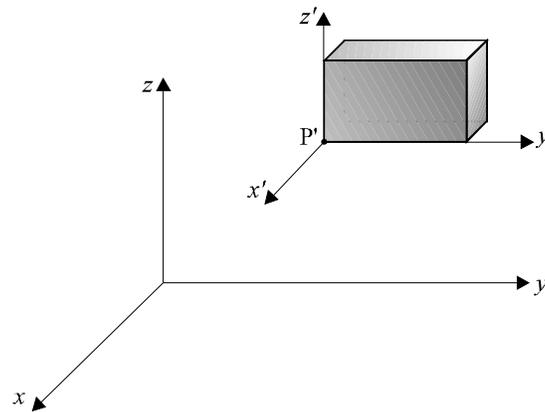


Figura 1.108

Como é difícil representar esta seqüência de rotações, optou-se por apresentar isoladamente cada uma destas rotações na Figura 1.109. Na Figura 1.109(a) mostra-se a rotação em torno de  $x'$ , na Figura 1.109(b), a rotação em torno de  $y'$  e na Figura 1.109(c), a rotação em torno de  $z'$ .

Nesta figura não se está mostrando o que de fato ocorre. Na realidade, é o sólido 3' da Figura 1.109(a) que gira em torno de  $y'$  e em seguida em torno de  $z'$ , atingindo desta forma a *posição final* 4.

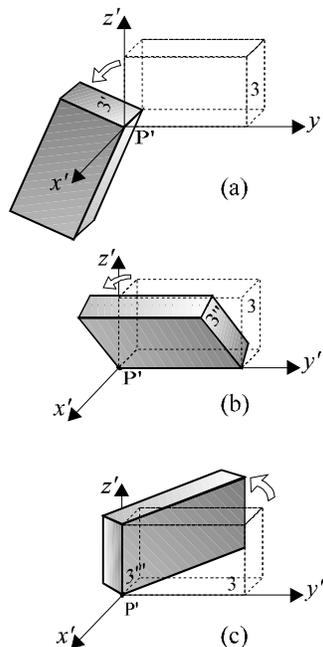


Figura 1.109

O movimento que leva um sistema rígido espacial de uma posição a outra pode, portanto, ser sempre considerado como o resultado de seis movimentos independentes: três translações e três rotações.

É por isso que se diz que um sistema material espacial possui seis graus de liberdade.

Comentou-se ao se estudar os sistemas rígidos planos que os graus de liberdade de um sistema também podem ser definidos como sendo o número mínimo de parâmetros necessários para caracterizar a posição do sistema em relação a um determinado referencial.

As duas definições para graus de liberdade de um sistema estão relacionadas, não sendo difícil mostrar que também de acordo com esta segunda definição um sistema rígido espacial possui seis graus de liberdade.

### 1.7.3 Estruturas hipostáticas, isostáticas e hiperestáticas

Tudo o que foi visto a respeito da estaticidade dos sistemas rígidos planos se aplica aos sistemas rígidos espaciais, devendo-se lembrar apenas que um sistema espacial possui seis graus de liberdade, enquanto um sistema plano possui apenas três.

Assim, um sistema espacial cujos apoios introduzem menos que seis vínculos no sistema é hipostático. Como exemplo, tem-se a estrutura da Figura 1.110, vinculada por meio de um anel e de uma rótula, que não impedem a rotação em torno do eixo definido pelos pontos A e B.

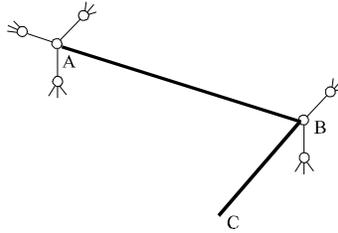


Figura 1.110

Um sistema espacial isostático possui apoios que introduzem seis vínculos no sistema. Como exemplo de um sistema espacial isostático tem-se a estrutura da Figura 1.111, vinculada por uma rótula, um anel e um apoio simples. Ela é semelhante à estrutura da Figura 1.110, mas apresenta uma restrição de movimento adicional, o impedimento ao deslocamento vertical do ponto C, que impede a rotação da estrutura em torno do eixo AB.

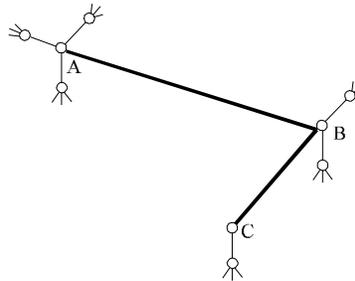


Figura 1.111

Lembra-se mais uma vez que não basta que haja seis vínculos para que uma estrutura seja isostática: apesar de possuir seis vínculos, a estrutura da Figura 1.112 pode apresentar rotação em torno do eixo AB.

Uma estrutura hiperestática espacial possui sempre mais que seis vínculos. Na Figura 1.113 mostra-se uma estrutura hiperestática com dois graus de hiperestaticidade, como se depreende ao compará-la com a estrutura da Figura 1.111, que é isostática.

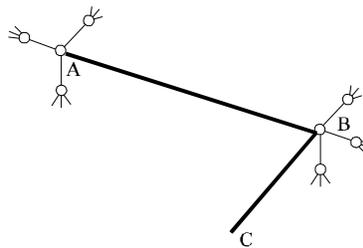


Figura 1.112

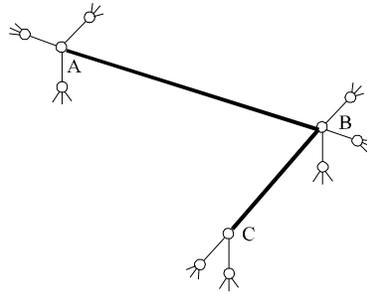


Figura 1.113

Novamente vale a pena lembrar que o fato de uma estrutura espacial possuir mais que seis vínculos não é condição suficiente para que ela seja hiperestática.

Embora possua sete vínculos, a estrutura da Figura 1.114 é hipostática, já que pode girar em torno do eixo AB.

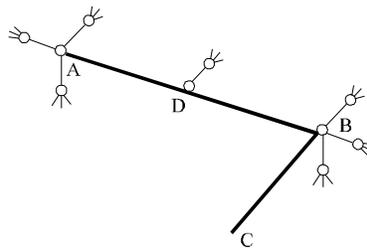


Figura 1.114

### 1.7.4 Momento de uma força em relação a um eixo

Nesta seção será apresentado o momento de uma força em relação a um eixo, que será utilizado na obtenção das equações de equilíbrio de um sistema material espacial.

Considerem-se os seguintes elementos mostrados na Figura 1.115:

- um eixo  $r$
- uma força aplicada (P,  $\vec{F}$ )
- o plano  $\alpha$  que passa por P e é ortogonal ao eixo  $r$
- a interseção A do eixo  $r$  com o plano  $\alpha$
- as componentes  $\vec{F}_n$  e  $\vec{F}_t$  de  $\vec{F}$ ,  $\vec{F}_n$  ortogonal ao plano  $\alpha$  e  $\vec{F}_t$  situada no plano  $\alpha$

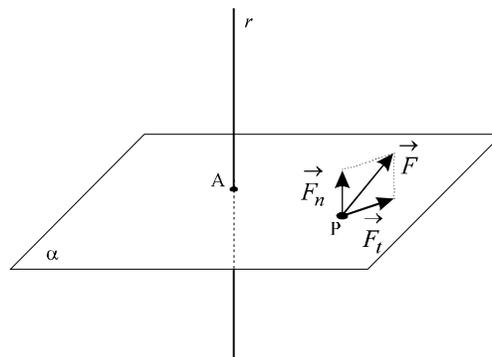


Figura 1.115

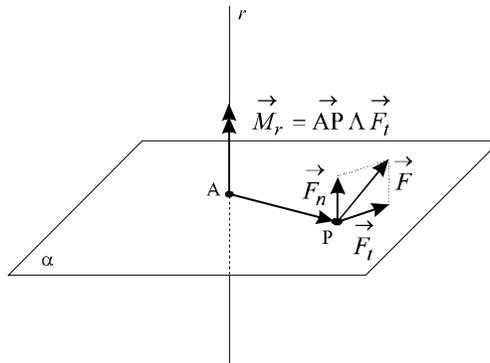
**Definição 1.18**

Define-se como momento da força  $(P, \vec{F})$  em relação ao eixo  $r$  o vetor

$$\vec{M}_r = \vec{AP} \wedge \vec{F}_t, \quad (1.72)$$

ou seja, o momento da força  $(P, \vec{F})$  em relação ao eixo  $r$  é o momento da componente  $(P, \vec{F}_t)$  em relação ao ponto A.

O momento da força  $(P, \vec{F})$  em relação ao eixo  $r$  está indicado na Figura 1.116; observa-se que este momento é paralelo ao eixo  $r$ .

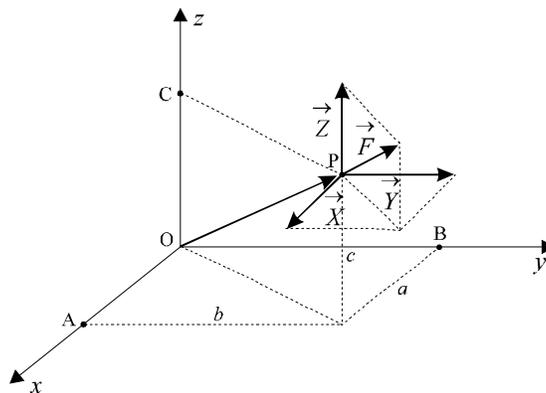


**Figura 1.116**

**Propriedade 1.13**

O momento de uma força em relação a um eixo paralelo a ela é nulo.

A demonstração desta propriedade é imediata, pois se a força é paralela ao eixo então  $\vec{F}_t = \vec{0}$ , logo  $\vec{M}_r = \vec{AP} \wedge \vec{F}_t = \vec{0}$ .



**Figura 1.117**

**Propriedade 1.14**

O momento de uma força em relação a um ponto é a soma vetorial dos momentos desta força em relação a três eixos ortogonais entre si que passam por esse ponto.

Considere-se a Figura 1.117. De acordo com a Propriedade 1.14 o momento  $\vec{M}_O$  da força  $(P, \vec{F})$  em relação ao ponto O é

$$\vec{M}_O = \vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_z, \quad (1.73)$$

onde  $\vec{M}_x$ ,  $\vec{M}_y$  e  $\vec{M}_z$  são respectivamente os momentos da força  $(P, \vec{F})$  em relação aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

A demonstração dessa propriedade não é difícil.

Tem-se  $\vec{OP} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$  e  $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ , logo

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \vec{OP} \wedge \vec{F} = (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) \wedge (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) = \\ &= a\vec{i} \wedge (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) + b\vec{j} \wedge (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) + c\vec{k} \wedge (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) = \\ &= a\vec{i} \wedge X\vec{i} + a\vec{i} \wedge Y\vec{j} + a\vec{i} \wedge Z\vec{k} + b\vec{j} \wedge X\vec{i} + b\vec{j} \wedge Y\vec{j} + b\vec{j} \wedge Z\vec{k} + \\ &+ c\vec{k} \wedge X\vec{i} + c\vec{k} \wedge Y\vec{j} + c\vec{k} \wedge Z\vec{k} = \vec{0} + Ya\vec{k} - Za\vec{j} - Xb\vec{k} + \vec{0} + Zb\vec{i} + \\ &+ Xc\vec{j} - Yc\vec{i} + \vec{0} = (Zb - Yc)\vec{i} + (Xc - Za)\vec{j} + (Ya - Xb)\vec{k}. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Mostrar-se-á agora que

$$\begin{aligned} \vec{M}_x &= (Zb - Yc)\vec{i}, \\ \vec{M}_y &= (Xc - Za)\vec{j}, \\ \vec{M}_z &= (Ya - Xb)\vec{k}, \end{aligned} \quad (1.75)$$

logo que

$$\vec{M}_O = \vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_z, \quad (1.76)$$

como se desejava demonstrar.

Pela definição de momento de uma força em relação a um eixo tem-se

$$\begin{aligned} \vec{M}_x &= \vec{AP} \wedge (Y\vec{j} + Z\vec{k}) = (b\vec{j} + c\vec{k}) \wedge (Y\vec{j} + Z\vec{k}) = b\vec{j} \wedge (Y\vec{j} + Z\vec{k}) + \\ &c\vec{k} \wedge (Y\vec{j} + Z\vec{k}) = b\vec{j} \wedge Y\vec{j} + b\vec{j} \wedge Z\vec{k} + c\vec{k} \wedge Y\vec{j} + c\vec{k} \wedge Z\vec{k} = \vec{0} + \\ &Zb\vec{i} - Yc\vec{i} + \vec{0} = (Zb - Yc)\vec{i}. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Analogamente, verifica-se que

$$\begin{aligned} \vec{M}_y &= (Xc - Za)\vec{j}, \\ \vec{M}_z &= (Ya - Xb)\vec{k}, \end{aligned} \quad (1.78)$$

ficando assim demonstrada a Propriedade 1.14.

Examinando a expressão (1.77), observa-se que, como era de se esperar, o momento de uma força em relação a um eixo é a soma vetorial dos momentos que as componentes dessa força têm em relação a esse eixo.

### 1.7.5 Equações de equilíbrio

Viu-se na Seção 1.5 que se um sistema material espacial está em equilíbrio então a resultante das forças externas que nele atuam é nula e que o momento destas forças em relação a um ponto qualquer do espaço também é nulo.

Na Figura 1.118 representa-se um sistema espacial em equilíbrio sob a ação de um conjunto de forças externas ativas e reativas.

Como o sistema está em equilíbrio, tem-se

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \quad (1.79)$$

e

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{OP}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{0} .$$

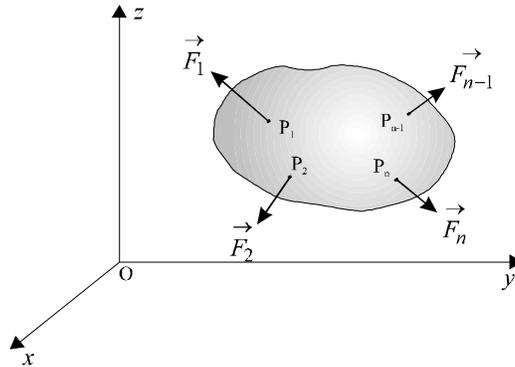


Figura 1.118

A primeira destas equações pode ser desenvolvida como

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (X_i \vec{i} + Y_i \vec{j} + Z_i \vec{k}) = \\ &\left( \sum_{i=1}^n X_i \right) \vec{i} + \left( \sum_{i=1}^n Y_i \right) \vec{j} + \left( \sum_{i=1}^n Z_i \right) \vec{k} = \vec{0}, \end{aligned} \quad (1.80)$$

de onde decorre

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n Y_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n Z_i &= 0. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Nestas expressões,  $X_i$ ,  $Y_i$  e  $Z_i$  são as componentes das forças  $F_i$  segundo os três eixos coordenados. O fato de a resultante das forças que atuam no sistema ser nula implica, portanto, em que as somas das componentes destas forças segundo três eixos coordenados também sejam nulas.

Tem-se ainda que

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{O_i} = \sum_{i=1}^n \vec{OP}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{0} . \quad (1.82)$$

Lembrando que

$$\vec{M}_{O_i} = M_{x_i} \vec{i} + M_{y_i} \vec{j} + M_{z_i} \vec{k}, \quad (1.83)$$

onde  $M_{x_i} \vec{i}$ ,  $M_{y_i} \vec{j}$  e  $M_{z_i} \vec{k}$  são os momentos das forças ( $P_i, \vec{F}_i$ ) em relação aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , pode-se reescrever (1.82) como

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \sum_{i=1}^n \vec{M}_{O_i} = \sum_{i=1}^n (M_{x_i} \vec{i} + M_{y_i} \vec{j} + M_{z_i} \vec{k}) = \\ &\left( \sum_{i=1}^n M_{x_i} \right) \vec{i} + \left( \sum_{i=1}^n M_{y_i} \right) \vec{j} + \left( \sum_{i=1}^n M_{z_i} \right) \vec{k} = \vec{0}, \end{aligned} \quad (1.84)$$

de onde decorre

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_{x_i} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n M_{y_i} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n M_{z_i} &= 0. \end{aligned} \quad (1.85)$$

O fato de o momento das forças que atuam no sistema ser nulo em relação a um ponto  $O$  implica portanto em que as somas dos momentos destas forças em relação aos três eixos coordenados também sejam nulas. Os esforços externos que atuam em um sólido espacial em equilíbrio satisfazem então as seguintes seis equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n Y_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n Z_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{x_i} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{y_i} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{z_i} &= 0. \end{aligned} \quad (1.86)$$

### 1.7.6 Determinação das reações de apoio

A determinação das reações de apoio das estruturas espaciais isostáticas é feita mediante o emprego das seis equações de equilíbrio (1.86).

#### Exemplo 1.14

Determinar as reações de apoio da viga da Figura 1.119(a).

Na Figura 1.119(b) indicam-se os esforços externos reativos que podem ser introduzidos na viga pelo engastamento em A.

Os esforços externos ativos e reativos representados na Figura 1.119(b) devem satisfazer as seis equações de equilíbrio da estática:

$$\sum X = 0 \Rightarrow X_A = 0$$

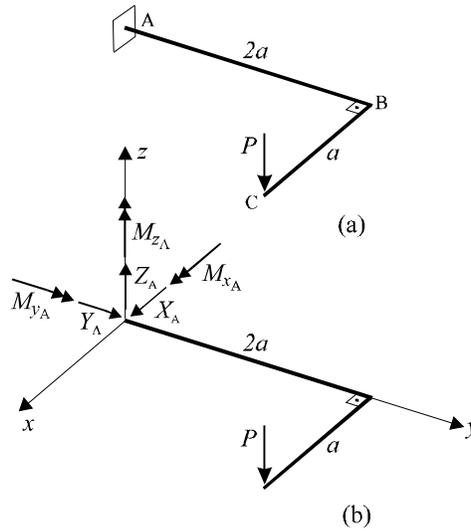


Figura 1.119

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_A = 0$$

$$\sum Z = 0 \Rightarrow Z_A - P = 0 \Rightarrow Z_A = P$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow M_{x_A} - P \cdot 2a = 0 \Rightarrow M_{x_A} = 2Pa \quad (1.87)$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow M_{y_A} + Pa = 0 \Rightarrow M_{y_A} = -Pa$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M_{z_A} = 0 .$$

Nota-se que nestas equações, de forma semelhante ao que já se fez antes, está-se usando uma notação simplificada, indicando-se  $\sum_{i=1}^n X_i$ ,  $\sum_{i=1}^n Y_i$ ,  $\sum_{i=1}^n Z_i$ ,  $\sum_{i=1}^n M_{x_i}$ ,  $\sum_{i=1}^n M_{y_i}$  e  $\sum_{i=1}^n M_{z_i}$  respectivamente como  $\sum X$ ,  $\sum Y$ ,  $\sum Z$ ,  $\sum M_x$ ,  $\sum M_y$  e  $\sum M_z$ .

As reações de apoio não-nulas decorrentes do sistema (1.87) são

$$\begin{aligned} Z_A &= P \\ M_{x_A} &= 2Pa \\ M_{y_A} &= -Pa, \end{aligned} \quad (1.88)$$

encontrando-se representadas na Figura 1.120.

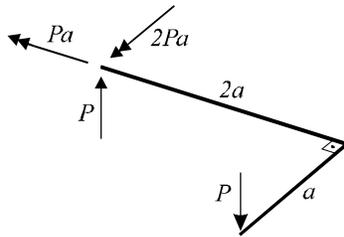


Figura 1.120

Exemplo 1.15

Determinar as reações de apoio da estrutura da Figura 1.121(a).

As reações que podem ser introduzidas na viga pelo engastamento estão indicadas na Figura 1.121(b).

Os esforços externos que atuam na estrutura devem satisfazer as seis equações de equilíbrio

$$\sum X = 0 \Rightarrow X_A + 3P = 0$$

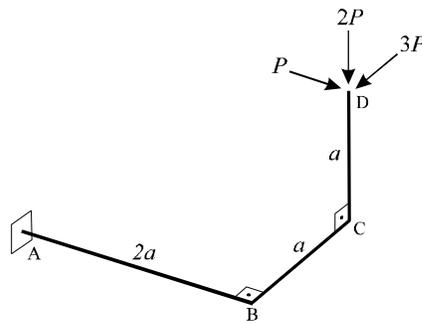
$$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_A + P = 0$$

$$\sum Z = 0 \Rightarrow Z_A - 2P = 0$$

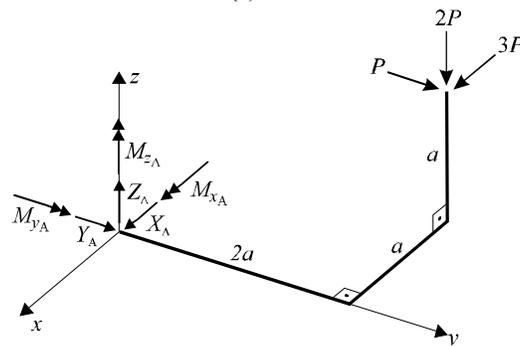
$$\sum M_x = 0 \Rightarrow M_{x_A} - P a - 2P 2a = 0 \quad (1.89)$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow M_{y_A} - 2P a + 3P a = 0$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M_{z_A} - P a - 3P 2a = 0 ,$$



(a)



(b)

Figura 1.121



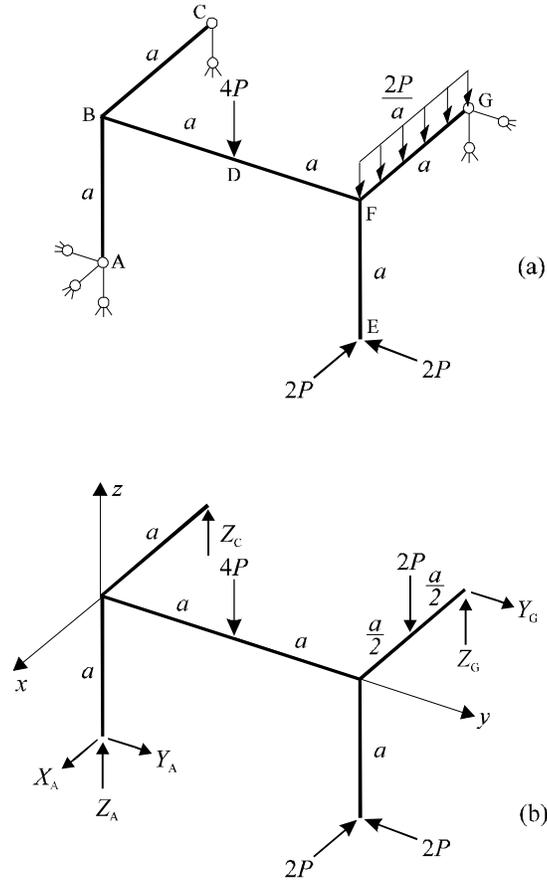


Figura 1.123

Os esforços indicados na Figura 1.123(b) devem satisfazer as equações de equilíbrio

$$\begin{aligned} \sum X = 0 &\Rightarrow X_A - 2P = 0 \\ \sum Y = 0 &\Rightarrow Y_A - 2P + Y_G = 0 \\ \sum Z = 0 &\Rightarrow Z_A + Z_C - 4P - 2P + Z_G = 0 \\ \sum M_x = 0 &\Rightarrow Y_A a - 4Pa - 2Pa - 2P2a + Z_G 2a = 0 \quad (1.91) \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow -X_A a + Z_C a + 2Pa - 2P\frac{a}{2} + Z_G a = 0 \\ \sum M_z = 0 &\Rightarrow 2P2a - Y_G a = 0, \end{aligned}$$

de onde decorrem as reações

$$\begin{aligned} X_A &= 2P \\ Y_A &= -2P \\ Z_A &= 5P \\ Z_C &= -5P \\ Y_G &= 4P \\ Z_G &= 6P, \end{aligned} \quad (1.92)$$

indicadas na Figura 1.124(a).

Sugeriu-se anteriormente que no caso dos problemas um pouco mais complexos se fizesse uma verificação das reações encontradas por meio de equações de equilíbrio de momentos suplementares.

Vai-se aqui fazer uma conferência das reações obtidas, calculando os momentos dos esforços que atuam na estrutura em relação aos eixos  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  indicados na Figura 1.124(b).

Tem-se

$$\begin{aligned} \sum M_{\bar{x}} &= 5P2a - 5P2a - 2Pa + 4Pa - 2Pa = 0 \\ \sum M_{\bar{y}} &= -5Pa - 2P\frac{a}{2} + 6Pa = 0. \end{aligned} \quad (1.93)$$

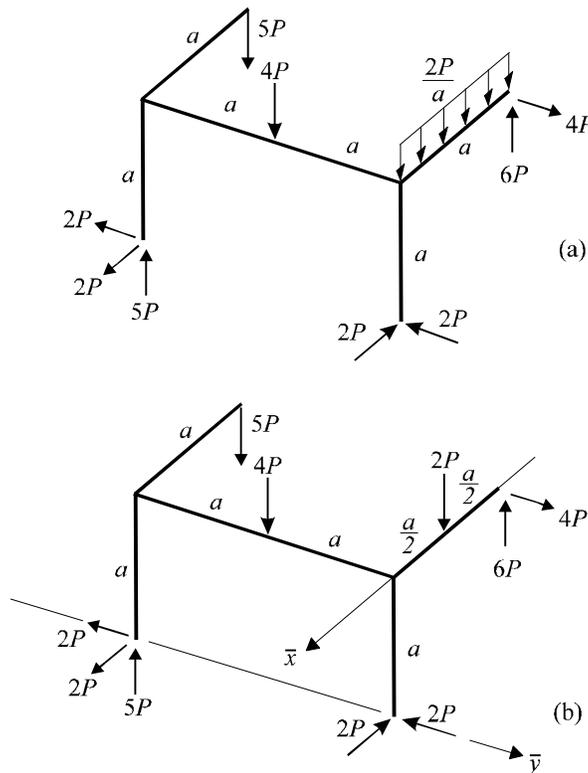


Figura 1.124

O fato destes dois momentos serem nulos é uma boa indicação de que as reações obtidas devem estar corretas, pois não seria muito provável que, com reações incorretas, se obtivessem duas equações de equilíbrio de momentos suplementares nulas.

Mais uma vez, entretanto, lembra-se que este teste não é infalível, pois o fato das equações de momentos suplementares serem nulas é condição necessária, mas não suficiente para que as reações obtidas sejam as corretas.

## Capítulo 2

### O Conceito de Tensão

No Capítulo I foram recordadas algumas noções de estática dos sistemas rígidos que serão utilizadas no curso de mecânica das estruturas.

Neste capítulo inicia-se o estudo dos sólidos que serão o objeto do curso de mecânica das estruturas: os sólidos deformáveis, ou seja, os sólidos que mudam de forma quando solicitados por esforços.

Todos os sólidos reais são deformáveis, e é neste fato que reside a importância fundamental da mecânica dos sólidos deformáveis. Para projetar uma estrutura real é necessário levar em consideração a deformabilidade de seu material.

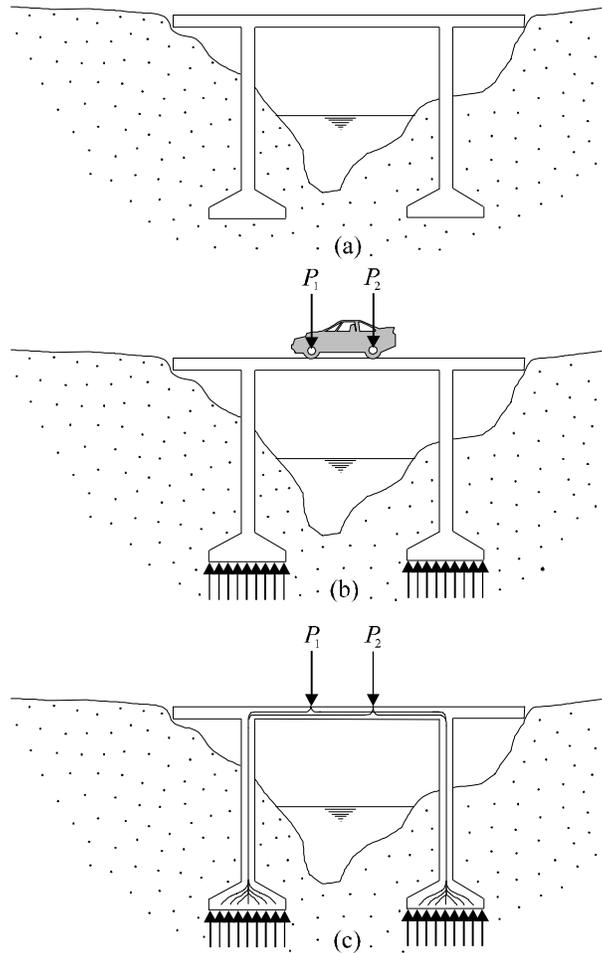
Vai-se iniciar o estudo dos sólidos deformáveis apresentando o conceito de tensão. Antes de se passar a uma formalização maior, vai-se dar uma primeira ideia muito informal do que são as tensões no interior de um sólido.

Para isto, considere-se a ponte esquematizada na Figura 2.1(a).

O que acontece nesta ponte quando um veículo passa por ela? Na Figura 2.1(b) mostram-se as forças introduzidas na ponte pelo veículo e também os esforços reativos que as equilibram, aplicados pelo solo nas bases das sapatas de fundação.

Como funciona a estrutura desta ponte? As forças  $P_1$  e  $P_2$  aplicadas na ponte pelo veículo caminham pelo tabuleiro até os pilares, descendo até as sapatas de fundação, de onde passam para o solo. Na Figura 2.1(c) mostra-se este caminho que os esforços percorrem no interior da estrutura, desde o tabuleiro até o solo.

O que ocorre neste exemplo simples se estende a todas as demais estruturas, podendo-se dizer de uma maneira bastante simplista e geral que a finalidade de uma estrutura é permitir que os esforços externos ativos caminhem desde os pontos em que são aplicados até os apoios, onde passam ao solo – no caso das construções – ou a outras estruturas.



**Figura 2.1**

A finalidade da estrutura da ponte da Figura 2.1 é permitir que os esforços aplicados pelos veículos que passam por ela possam atingir as sapatas de fundação, de onde passam para o solo. Ao caminhar pela estrutura os esforços modificam as posições relativas de suas moléculas, dando-se então a deformação da estrutura.

Outro fato também explicado por esse caminhamento dos esforços pelo interior de uma estrutura é sua ruptura.

Por que a ponte se romperá se as forças aplicadas pelos veículos forem muito grandes? Porque neste caso os esforços que irão caminhar por seu interior também serão muito grandes, atingindo a capacidade de resistência do material que constitui a estrutura, que irá então se quebrar.

Este exemplo simples mostra que tanto a deformação como a ruptura de uma estrutura estão ligadas ao caminhamento dos esforços externos ativos desde os pontos em que são aplicadas até os apoios.

Pode-se dar agora uma primeira idéia do que são as tensões no interior de uma estrutura: elas são os esforços que surgem em seu interior quando os esforços externos ativos caminham desde seus pontos de aplicação até os apoios.

Para reforçar ainda mais esta idéia intuitiva do que é uma tensão, serão agora idealizadas algumas experiências, que, embora muito simples, são muito ricas.

*Introdução à Mecânica das Estruturas*  
*Capítulo 2 - O Conceito de Tensão*

A primeira experiência é a seguinte: segura-se uma das extremidades de um pedaço de giz com os dedos da mão esquerda, e puxa-se a outra extremidade com os dedos da mão direita. Sabe-se que para manter o giz em equilíbrio a mão esquerda tem que aplicar nele uma força adequada, pois se não aplicar nenhuma força ou então aplicar uma força insuficiente o pedaço de giz se deslocará no mesmo sentido que a mão direita. Sabe-se também que forças crescentes aplicadas com a mão direita exigem que a mão esquerda aplique forças cada vez maiores para manter o giz em equilíbrio.

Este fato mostra que a força aplicada pela mão direita – a força ativa – é transmitida pelo giz até a mão esquerda, onde ela é equilibrada pela força introduzida por esta mão – a força reativa.

Sabe-se ainda que, ao ser transmitida de uma extremidade à outra do giz, a força ativa solicita o material que constitui a barra de giz, tanto assim que o giz acaba se rompendo quando a força ativa é muito grande.

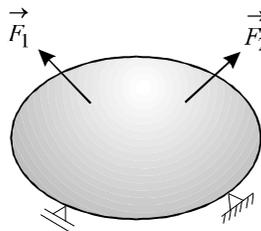
Deve-se acrescentar ainda que o giz se deforma, isto é, muda de forma, quando transmite esforços de uma extremidade à outra. Como já se mencionou, todos os sólidos se deformam sob a ação de esforços; alguns bastante rígidos, se deformam pouco, e sua mudança de forma é praticamente imperceptível. É o caso do pedaço de giz, que aparentemente não se deforma. É claro que se a experiência fosse com um elástico, segurado pela mão esquerda e puxado pela mão direita, a deformação seria perfeitamente visível.

A descrição da experiência com o giz tem como finalidade permitir que o conceito de tensão seja mais uma vez apresentado de forma intuitiva. Como já se viu, as tensões nada mais são que os esforços internos que surgem em um sólido quando esforços externos são transmitidos de um ponto a outro por seu intermédio. No caso do giz, as tensões são os esforços internos que nele surgem quando a força aplicada pela mão direita é transmitida para a mão esquerda, onde ela é equilibrada. Cada material resiste a estas tensões até um determinado limite, rompendo-se se ele for atingido. Por esta razão, ao se fazer o projeto de uma estrutura, precisa-se determinar as tensões que deverão surgir em seu interior e compará-las com as tensões limites do material que será utilizado em sua construção. As tensões limites de cada material são obtidas experimentalmente.

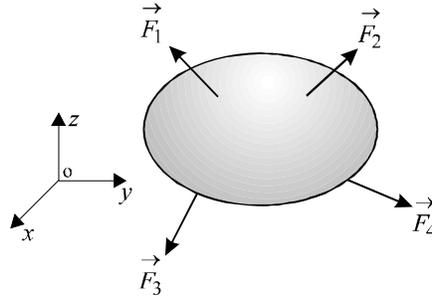
É oportuno mencionar que um mesmo material resiste de forma distinta a diferentes esforços internos, isto é, a diferentes tensões. Repetindo-se a experiência com o giz, se em vez de puxado ele for empurrado, se irá verificar que ele resistirá a esforços muito maiores quando empurrado que quando puxado.

O conceito de tensão, que acaba de ser apresentado de forma simples e intuitiva, será agora abordado de maneira mais formal e rigorosa, de modo a se definir matematicamente o que é uma tensão.

Para isto, considere-se a Figura 2.2, em que se representa uma estrutura genérica submetida aos esforços externos ativos  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , equilibrados pelas reações de vínculo  $\vec{F}_3$  e  $\vec{F}_4$  (Figura 2.3). Como já se mencionou, as forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  caminham pela estrutura até atingirem os vínculos, onde são equilibradas pelas reações  $\vec{F}_3$  e  $\vec{F}_4$ . É este caminhamento dos esforços que origina as tensões nos pontos internos da estrutura.



**Figura 2.2**



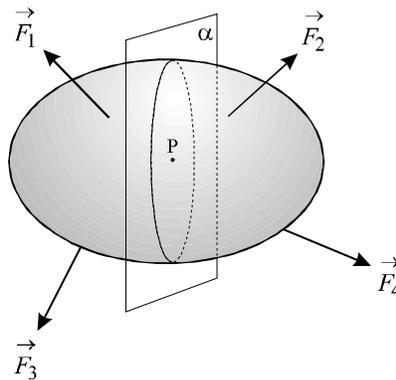
**Figura 2.3**

Estando a estrutura em equilíbrio, os esforços externos que nela atuam – os esforços externos ativos  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  e os esforços externos reativos  $\vec{F}_3$  e  $\vec{F}_4$  – satisfazem as seis equações de equilíbrio da estática, a saber:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum Z = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  são os três eixos coordenados indicados na Figura 2.3.

Considerando agora um ponto interno P do sólido e um plano  $\alpha$  que passa por P (Figura 2.4), pode-se, num esforço de imaginação, supor o sólido separado em duas partes por meio de um corte segundo o plano  $\alpha$  (Figura 2.5).

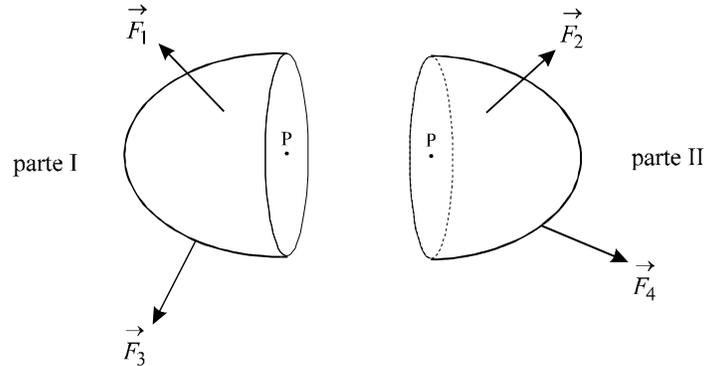


**Figura 2.4**

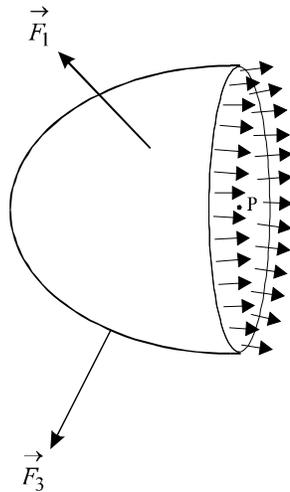
No caso geral, a parte do sólido à esquerda do corte (parte I) não fica em equilíbrio sob a ação exclusiva dos esforços externos  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_3$ ; o mesmo se pode dizer da parte do sólido à direita do corte (parte II), que também não fica em equilíbrio sob a ação exclusiva de  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}_4$ . Sabe-se, entretanto, que a situação representada na Figura 2.5 não pode ser a existente no sólido real, em que as duas partes se encontram unidas, pois, se assim fosse, elas não ficariam em equilíbrio, e se separariam uma da outra: a parte I se deslocaria para a esquerda e a parte II, para a direita. Com certeza, existem então outros esforços aplicados na parte I, equilibrando-a. Além de  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_3$ , os únicos esforços que podem atuar na parte I são

*Introdução à Mecânica das Estruturas*  
 Capítulo 2 - O Conceito de Tensão

esforços internos, aplicados na seção do corte – como se indica na Figura 2.6 –, e são realmente esforços deste tipo que promovem o equilíbrio deste trecho do sólido. Eles representam a ação que a parte II exerce sobre a parte I.



**Figura 2.5**



**Figura 2.6**

É fácil concluir que o equilíbrio da parte I não poderia se dar de outra forma: no sólido original, não separado em duas partes, são as forças  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}_4$  que equilibram  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_3$ ; não é porque mentalmente se supôs o sólido separado em dois trechos que as forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_3$  aplicadas na parte I deixarão de ser equilibradas pelas forças  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}_4$  aplicadas na parte II. De alguma forma a ação de  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}_4$  deve se fazer sentir na parte I e equilibrá-la. Pois bem, é por meio dos esforços distribuídos aplicados na seção do corte que a ação de  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}_4$  é exercida sobre a parte I.

Todo este raciocínio se aplica também ao equilíbrio da parte II do sólido: a ação das forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_3$ , isto é, a ação da parte I se faz sentir na parte II por meio de forças distribuídas aplicadas na seção do corte – como se indica na Figura 2.7 –, equilibrando-a.

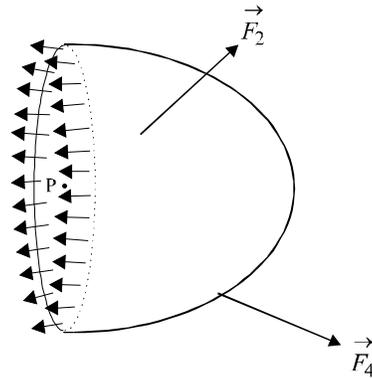


Figura 2.7

As forças distribuídas indicadas na Figura 2.6 se constituem, portanto, na ação que a parte II do sólido exerce sobre a parte I; de forma análoga, as forças distribuídas indicadas na Figura 2.7 se constituem na ação que a parte II exerce sobre a parte I. Da natureza física destes esforços e do princípio da ação e reação decorre que as forças distribuídas em pontos correspondentes da parte I e da parte II têm a mesma intensidade e a mesma direção, mas sentidos opostos.

São estas forças distribuídas que atuam nos planos internos do sólido e representam a ação que uma de suas partes exerce sobre a outra que recebem o nome de tensões. Para definir matematicamente a tensão em P segundo o plano  $\alpha$ , considere-se a Figura 2.8, em que se indica uma região do plano  $\alpha$  que contém o ponto P.

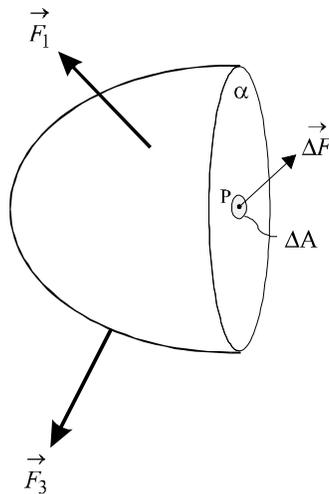


Figura 2.8

Se  $\vec{\Delta F}$  a resultante das forças distribuídas que atuam nesta região e  $\Delta A$  a sua área, define-se como tensão média na região considerada:

$$\vec{\rho}_m = \frac{\vec{\Delta F}}{\Delta A} \quad (2.2)$$

Observa-se que  $\vec{\rho}_m$  é um vetor: tem a direção e o sentido de  $\vec{\Delta F}$  e a intensidade  $\|\vec{\Delta F}\| / \Delta A$ . A dimensão de  $\vec{\rho}_m$  é a de uma força dividida por uma área.

*Introdução à Mecânica das Estruturas*  
 Capítulo 2 - O Conceito de Tensão

Fazendo agora  $\Delta A$  tender a zero, sempre mantendo o ponto P em seu interior, define-se como tensão  $\vec{\rho}$  em P segundo  $\alpha$ :

$$\vec{\rho} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \vec{\rho}_m = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta F}}{\Delta A}. \quad (2.3)$$

A definição matemática acima claramente está de acordo com o significado físico que anteriormente se deu às tensões: a tensão  $\vec{\rho}$  em P segundo o plano  $\alpha$  nada mais é que o valor – aqui entendido como um vetor – apresentado em P pelas forças distribuídas que atuam em  $\alpha$  e se constituem na ação que a parte II exerce sobre a parte I do sólido.

Como já se mencionou, as tensões são grandezas vetoriais, logo dotadas de direção, sentido e intensidade; sua dimensão é a de uma força dividida por uma área. No Sistema Internacional a unidade de medida das tensões é o pascal, sendo:

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2. \quad (2.4)$$

Observa-se que esta unidade de medida é a mesma utilizada para pressões, o que decorre do fato de tensões e pressões terem a mesma dimensão.

No Sistema Técnico utiliza-se como unidade de medida das tensões o  $\text{kgf/cm}^2$ , tendo-se a seguinte relação entre estas unidades:

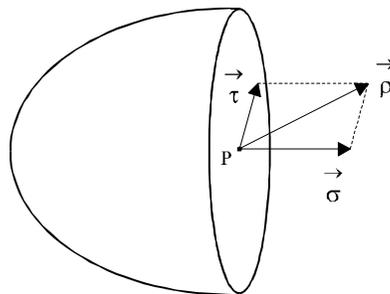
$$1 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \cong \frac{10 \text{ N}}{10^{-4} \text{ m}^2} = 10^5 \text{ Pa}. \quad (2.5)$$

Como o pascal é uma unidade de medida muito pequena para as tensões encontradas na prática, utilizar-se-á neste curso como unidade de medida o  $\text{kN/cm}^2$ , tendo-se

$$1 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 1000 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} \cong 100 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} = 10 \text{ MPa} \quad (2.6)$$

Voltando agora à tensão em P segundo o plano  $\alpha$ , observa-se que no caso geral ela não apresenta nenhuma direção particular, podendo então ser decomposta em uma componente normal ao plano  $\alpha$  e em uma componente situada no plano  $\alpha$  (Figura 2.9). Estas componentes recebem respectivamente os nomes de tensão normal ( $\vec{\sigma}$ ) e tensão tangencial ou tensão de cisalhamento ( $\vec{\tau}$ ). Vetorialmente, tem-se

$$\vec{\rho} = \vec{\sigma} + \vec{\tau}. \quad (2.7)$$



**Figura 2.9**

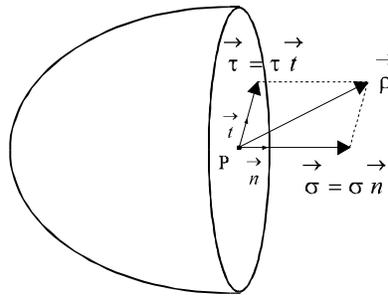


Figura 2.10

Sendo  $\vec{n}$  o versor que caracteriza a direção da normal externa em P e sendo  $\vec{t}$  o versor que caracteriza a direção da tensão tangencial, tem-se (Figura 2.10)

$$\vec{\rho} = \vec{\sigma} + \vec{\tau} = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t}, \quad (2.8)$$

onde  $\sigma$  e  $\tau$  são respectivamente a medida da tensão normal e a medida da tensão de cisalhamento.

A tensão normal recebe o nome de tensão normal de tração – ou, mais simplesmente, tensão de tração – quando tem o sentido da normal externa, isto é, o sentido de  $\vec{n}$  (Figura 2.11). Neste caso, tem-se  $\sigma > 0$ . Ela recebe o nome de tensão normal de compressão – ou, mais simplesmente, tensão de compressão – quando tem o sentido contrário ao da normal externa, isto é, o sentido de  $-\vec{n}$  (Figura 2.12). Neste caso, tem-se  $\sigma < 0$ . As tensões de cisalhamento não recebem nenhum qualificativo especial, sendo sempre chamadas tensões de cisalhamento, qualquer que seja o seu sentido.

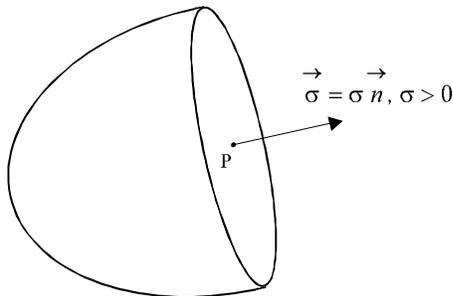
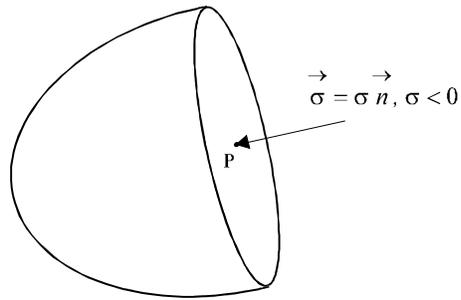


Figura 2.11

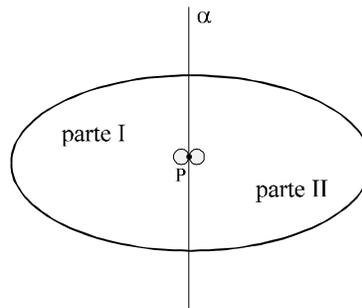
Não é por mera conveniência matemática que existe interesse em conhecer as componentes  $\vec{\sigma}$  e  $\vec{\tau}$  da tensão  $\vec{\rho}$  em P e identificar a tensão normal como sendo de tração ou de compressão. A importância de se fazer esta caracterização tem razões físicas: as tensões de tração, compressão e de cisalhamento correspondem a fenômenos físicos distintos, e é por esta razão que é imprescindível distingui-las e quantificá-las.

Como já se mencionou anteriormente, sob a ação de esforços externos todo sólido se deforma, pois os esforços externos provocam uma mudança nas posições relativas das partículas do sólido. O material do sólido opõe resistência a esta mudança das posições relativas de suas partículas: esta resistência são as tensões, e são elas que possibilitam que os esforços externos ativos caminhem através da estrutura até os apoios, onde são equilibrados pelas reações de vínculo. Caso o sólido não opusesse resistência à mudança das posições relativas de suas partículas, ele se desintegraria, se pulverizaria, suas partículas se separariam umas das outras.



**Figura 2.12**

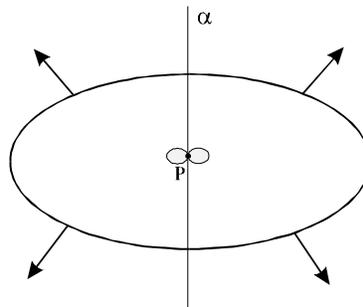
Para compreender como se processa o mecanismo de surgimento das tensões, considere-se a Figura 2.13, em que se indicam duas partículas vizinhas ao plano  $\alpha$ , uma delas pertencente à parte I e a outra, à parte II.



**Figura 2.13**

Quando os esforços externos fazem com que uma partícula se afaste da outra na direção normal ao plano  $\alpha$  as ligações moleculares entre as partículas oferecem resistência a este afastamento, surgindo então uma tensão de tração em P (Figura 2.14).

É esta resistência, isto é, é esta tensão que impede a separação do sólido, ao impedir que ele se deforme indefinidamente. Tração, portanto, está ligada ao afastamento das partículas perpendicularmente ao plano  $\alpha$ . Todos já experimentaram a resistência oposta por um sólido ao afastamento de suas partículas ao esticar com as mãos um pedaço de elástico.

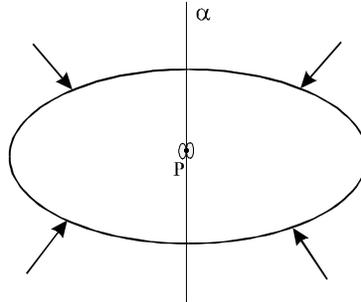


**Figura 2.14**

*Introdução à Mecânica das Estruturas*  
*Capítulo 2 - O Conceito de Tensão*

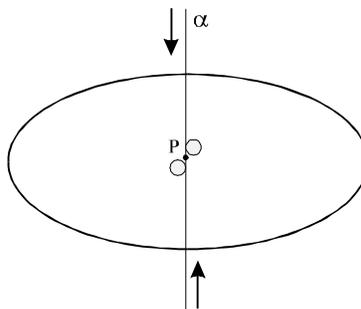
Quando os esforços externos fazem com que as duas partículas se aproximem uma da outra normalmente ao plano  $\alpha$  as ligações moleculares entre as partículas reagem a esta aproximação, surgindo assim uma tensão de compressão em P (Figura 2.15); esta tensão impede a desagregação do sólido. Compressão, portanto, está ligada à aproximação das partículas perpendicularmente ao plano  $\alpha$ .

Finalmente, quando os esforços externos fazem com que as partículas se afastem uma da outra tangencialmente ao plano  $\alpha$ , as ligações moleculares entre elas opõem resistência a este afastamento, surgindo desta forma uma tensão de cisalhamento em P (Figura 2.16); ela impede a separação do sólido por escorregamento de uma parte sobre a outra. Cisalhamento, portanto, está ligado ao afastamento das partículas tangencialmente ao plano  $\alpha$ .



**Figura 2.15**

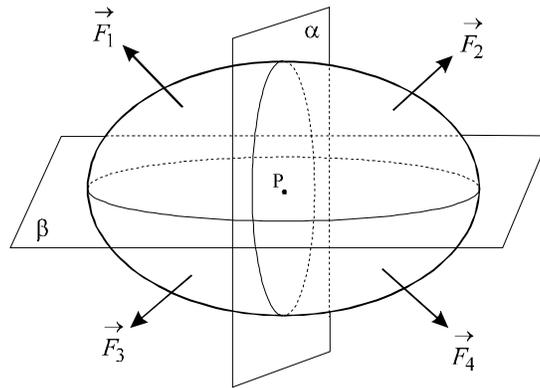
Até o momento vem-se sempre associando a tensão  $\vec{p}$  em P ao plano  $\alpha$  em que ela atua, mas ainda não se enfatizou a necessidade desta associação. Pode-se mostrar com facilidade que o conceito de tensão em um ponto só tem sentido se se mencionar o plano em que ela atua. Isto, porque não existe apenas uma tensão em um ponto, mas sim infinitas tensões atuando nos infinitos planos que por ele passam.



**Figura 2.16**

Na Figura 2.17 reproduz-se o sólido utilizado para apresentar o conceito de tensão em P segundo  $\alpha$ ; nele indica-se um plano horizontal  $\beta$  que também passa por P.

*Introdução à Mecânica das Estruturas*  
 Capítulo 2 - O Conceito de Tensão



**Figura 2.17**

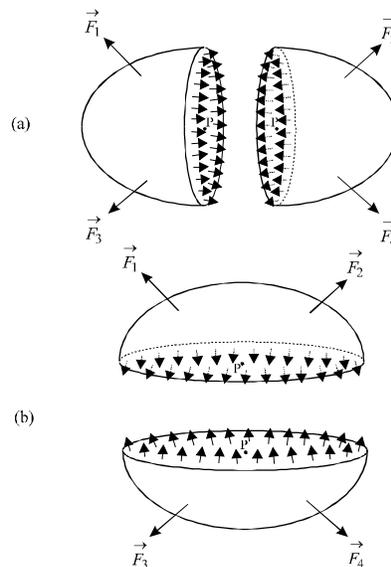
O raciocínio empregado anteriormente pode ser repetido, supondo-se o sólido separado em duas partes pelo plano  $\beta$ . O equilíbrio de cada uma das partes do sólido é estabelecido pelas tensões que atuam na seção do corte. Na Figura 2.18 representam-se as tensões que atuam no sólido segundo os planos  $\alpha$  (Figura 2.18(a)) e  $\beta$  (Figura 2.18(b)).

Percebe-se facilmente que, no caso do sólido da Figura 2.18, as tensões em P segundo os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são completamente distintas uma da outra.

As tensões em P segundo os outros infinitos planos que por ele passam se definem de forma totalmente análoga à empregada no caso dos planos  $\alpha$  e  $\beta$ .

Verifica-se experimentalmente que o nível de sollicitação do material em um ponto como P não é caracterizado exclusivamente pela tensão segundo o plano  $\alpha$  ou pela tensão segundo o plano  $\beta$  ou então pela tensão segundo qualquer outro plano.

O que caracteriza de fato o nível de sollicitação de um ponto é o conjunto de todas as tensões associadas aos infinitos planos que por ele passam.



**Figura 2.18**

*Introdução à Mecânica das Estruturas*  
*Capítulo 2 - O Conceito de Tensão*

Para avaliar o nível de sollicitação de um determinado ponto não se pode analisar apenas a tensão segundo um particular plano, sem considerar as tensões que atuam segundo todos os outros planos. Dois carregamentos distintos podem levar exatamente às mesmas tensões em P segundo o plano  $\alpha$ , mas a tensões completamente diferentes segundo os demais planos que por ele passam. Fica assim patente a necessidade de examinar o conjunto das tensões e não apenas uma ou outra tensão particular.

Dá-se o nome de estado de tensão em um ponto ao conjunto das infinitas tensões associadas aos infinitos planos que por ele passam. O estado de tensão, portanto, é que caracteriza o nível de sollicitação de um ponto.

Mencionou-se anteriormente, de forma simplista, que os materiais resistem às tensões até determinados limites, e que as tensões limites são obtidas experimentalmente. De forma mais rigorosa, o que se deve afirmar é que os materiais resistem aos estados de tensão até determinados limites, e que os estados de tensão limites são obtidos experimentalmente.

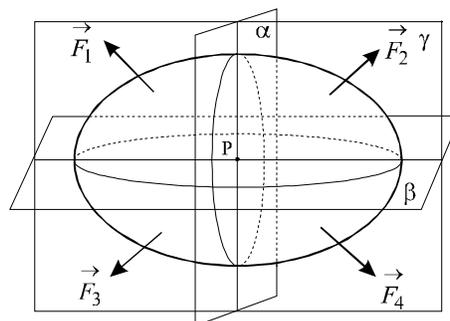
Portanto, ao se fazer um projeto, o que se deve comparar com resultados experimentais é o estado de tensão em um ponto: é o conjunto das tensões no ponto que deve ser comparado com os estados de tensão limites, e não tensões em planos particulares que devem ser comparadas com tensões limites, pois, como se acaba de ver, tensões em planos particulares não caracterizam o nível de sollicitação do ponto.

Felizmente, pode-se demonstrar – o que será feito mais adiante no curso – que as infinitas tensões segundo os infinitos planos que passam por um ponto podem ser determinadas se forem conhecidas as tensões segundo três destes planos, quaisquer que sejam, desde que perpendiculares entre si dois a dois.

O conhecimento das tensões em P segundo os planos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  da Figura 2.19 permite que, utilizando apenas as equações de equilíbrio da estática, se obtenham as tensões segundo todos os demais planos que passam por P.

O trabalho de calcular infinitas tensões, portanto, não existe, se reduzindo ao trabalho de calcular três tensões em três planos perpendiculares entre si.

Para exemplificar a influência que o estado de tensão tem na resistência de um material, considere-se o caso de um prisma de concreto. Colocado em uma prensa, ele se rompe quando a força que o comprime atinge um determinado valor limite. Jogado no mar numa fossa abissal com 10 km de profundidade, ele atinge o fundo do mar sem se romper, apesar de ser sollicitado por forças superiores àquela que o rompe na prensa. A razão desta diferença de comportamentos é que os estados de tensão dos pontos do prisma nos dois casos são fundamentalmente distintos, possuindo o concreto resistências limites diferentes nas duas situações.



**Figura 2.19**

Na Figura 2.20 indicam-se em (a) e (b) as forças distribuídas que sollicitam o prisma nos dois casos.

Para comparar os estados de tensão que se tem em um mesmo ponto do prisma nas duas situações, retira-se deles um mesmo cubo elementar que contém este ponto em seu interior. As tensões que atuam nas faces do cubo nos dois casos estão indicadas na Figura 2.20, em (c) e (d). Observa-se que, no caso destes

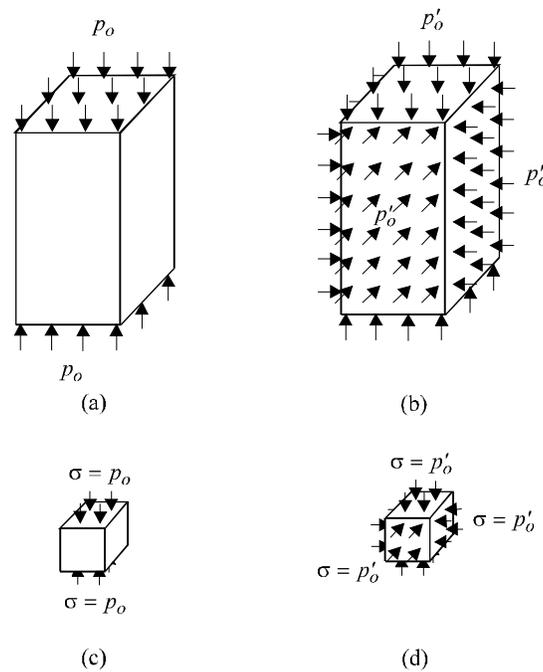
*Introdução à Mecânica das Estruturas*  
 Capítulo 2 - O Conceito de Tensão

carregamentos particulares, as tensões nas faces dos cubos são iguais às forças distribuídas que atuam nas faces dos prismas paralelas a elas.

O estado de tensão dos pontos do prisma colocado na prensa – representado na Figura 2.20(c) – recebe o nome de estado de compressão simples: nas faces verticais as tensões são todas nulas e nas faces horizontais só atuam tensões normais de compressão.

O estado de tensão dos pontos do prisma jogado no mar – representado na Figura 2.20(d) – recebe o nome de estado hidrostático de compressão: em todas as faces tem-se apenas tensões normais de compressão, iguais em todas elas.

Observa-se que estes dois estados de tensão são fundamentalmente distintos: no primeiro caso, o material é comprimido segundo uma única direção; no segundo caso, segundo as três direções. O concreto, assim como todos os demais materiais, tem resistência extremamente elevada quando igualmente comprimido



**Figura 2.20**

em todas as direções; apresenta, entretanto, resistência muito menor se for comprimido segundo uma única direção.

É intuitivo este comportamento: no estado de compressão simples não existem tensões nos planos verticais impedindo a desagregação do material; no estado hidrostático de compressão há um confinamento, existindo tensões nos planos verticais que impedem a desagregação do material por efeito da compressão vertical.

Este exemplo evidencia, portanto, que a resistência do material de fato se liga ao estado de tensão em que ele se encontra.

## Capítulo 3

### Esforços Solicitantes

A Resistência dos Materiais estuda estruturas constituídas por barras, e, para caracterizar o estado de tensão dos pontos destas estruturas, deve-se determinar as tensões que neles atuam segundo três planos perpendiculares entre si dois a dois.

No caso das barras, um destes planos sempre é o plano da seção transversal que contém o ponto cujo estado de tensão se deseja conhecer. Por este motivo, a determinação das tensões nas seções transversais das barras é um dos principais temas estudados pela Resistência dos Materiais.

Para compreender o que são os esforços solicitantes na seção transversal de uma barra, considere-se a Figura 3.1, em que se indica uma barra genérica submetida aos esforços externos ativos  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , equilibrados pelas reações de vínculo  $\vec{F}_3$  e  $\vec{F}_4$  (Figura 3.2). Estas figuras são a particularização das Figuras 2.2 e 2.3 para o caso de uma barra.

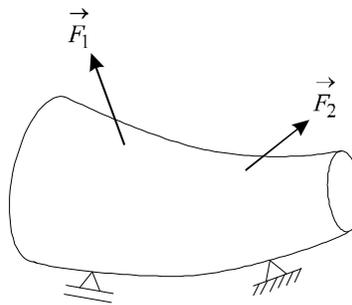


Figura 3.1

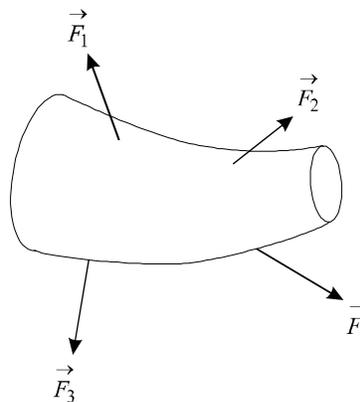


Figura 3.2

É claro que tudo o que se disse na seção anterior para um sólido genérico vale para a barra. Para obter as tensões que atuam em uma seção transversal genérica (plano  $\alpha$  da Figura 3.3), deve-se supor a barra separada em duas partes por um corte segundo esta seção transversal, e determinar as forças distribuídas que atuam na seção de corte e equilibram cada uma das partes da barra (Figura 3.4).

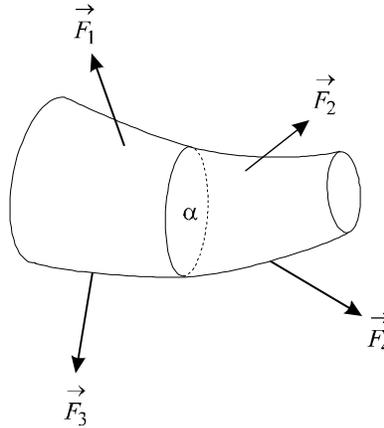


Figura 3.3

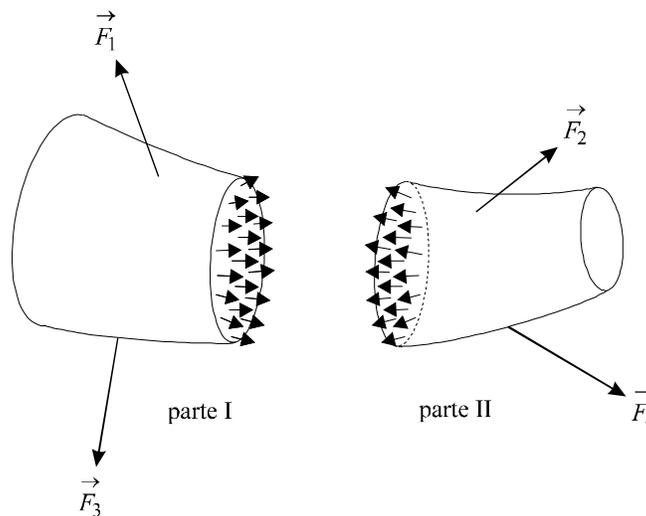


Figura 3.4

Como já se mencionou, a obtenção direta das tensões indicadas na Figura 3.4 não é simples, e a Resistência dos Materiais as calcula de maneira indireta, por intermédio dos esforços solicitantes.

Os esforços solicitantes são os esforços obtidos pela redução das tensões no centro de gravidade da seção transversal em que atuam.

Como se sabe, a redução das tensões em G consiste em aplicar neste ponto dois esforços: a resultante  $\vec{R}$  das tensões e o momento  $\vec{M}$  que as tensões têm em relação a G.

Na Figura 3.5 estão representados os esforços solicitantes determinados para as partes I e II da barra.

Pelo princípio da ação e reação sabe-se que as tensões em pontos correspondentes da parte I e da parte II são iguais em intensidade e direção, mas opostas em sentido; como consequência, os esforços solicitantes que agem na parte I e na parte II também são iguais em intensidade e direção, mas opostos em sentido. Isto já era esperado, pois os esforços solicitantes que atuam na parte I “representam” a ação que a parte II exerce sobre a parte I; da mesma forma, os esforços solicitantes que atuam na parte II “representam” a ação que a parte I exerce sobre a parte II. Estas ações de uma parte da barra sobre a outra obviamente são iguais em intensidade e direção, mas opostas em sentido.

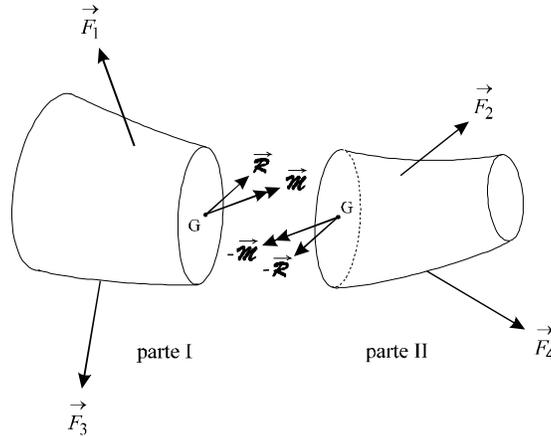


Figura 3.5

Na frase acima o termo “representam” foi colocado entre aspas para deixar bem claro o seguinte: a ação que uma parte da barra exerce sobre a outra é de fato representada pelas tensões, isto é, pelas forças distribuídas que atuam nos pontos da seção transversal, e não pelos esforços solicitantes, que são esforços concentrados. Não agem de fato na seção transversal da barra a força concentrada e o momento concentrado indicados na Figura 3.5; são as tensões da Figura 3.4 que efetivamente atuam nos pontos da seção em que se fez o corte. Como os esforços solicitantes decorrem das tensões, num abuso de linguagem pode-se dizer que eles “representam” a ação que uma parte da barra exerce sobre a outra. É neste sentido que se deve entender o uso do termo “representam” naquela frase.

A redução de um sistema de esforços em um ponto leva a uma força e a um momento mecanicamente equivalentes ao sistema que foi reduzido. Os esforços que atuam na parte I da barra nas Figuras 3.4 e 3.5 são, portanto, mecanicamente equivalentes; o mesmo pode-se dizer dos esforços que atuam na parte II da barra nas Figuras 3.4 e 3.5.

Como as duas partes da barra estão em equilíbrio sob a ação dos esforços indicados na Figura 3.4, conclui-se então que os esforços externos  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_3$  e os esforços solicitantes  $\vec{R}$  e  $\vec{M}$  aplicados na parte I estão em equilíbrio; da mesma forma, os esforços externos  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}_4$  e os esforços solicitantes  $-\vec{R}$  e  $-\vec{M}$  aplicados na parte II também estão em equilíbrio.

É este fato que torna os esforços solicitantes tão úteis e atraentes: é muito fácil determiná-los. Uma vez conhecidos os esforços externos ativos e reativos, a determinação dos esforços solicitantes que atuam na seção transversal de uma barra pode ser feita utilizando apenas as equações de equilíbrio da estática. Eles são a força concentrada e o momento concentrado que, aplicados no centro de gravidade da seção em que se fez o corte, estabelecem o equilíbrio da parte da barra em que se aplicam. É, portanto, extremamente simples obter os esforços solicitantes a partir dos esforços externos.

Verificou-se na seção anterior que é muito importante decompor as tensões em suas componentes normal e tangencial ao plano do corte, pois estas duas componentes têm significados físicos totalmente distintos, o que torna necessário distinguí-las e quantificá-las.

De igual forma, as componentes de  $\vec{R}$  e de  $\vec{M}$  normal e tangencial à seção transversal também têm significados físicos distintos, devendo-se então determiná-las.

Na Figura 3.6 apresentam-se as decomposições de  $\vec{R}$  e de  $\vec{M}$ .

Tem-se

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{V} = N \vec{n} + V \vec{t} \quad (3.1)$$

e

$$\vec{M} = \vec{T} + \vec{M} = T \vec{n} + M \vec{t}'.$$

O versor  $\vec{n}$  é normal à seção transversal e os vetores  $\vec{t}$  e  $\vec{t}'$  estão no plano da seção transversal.

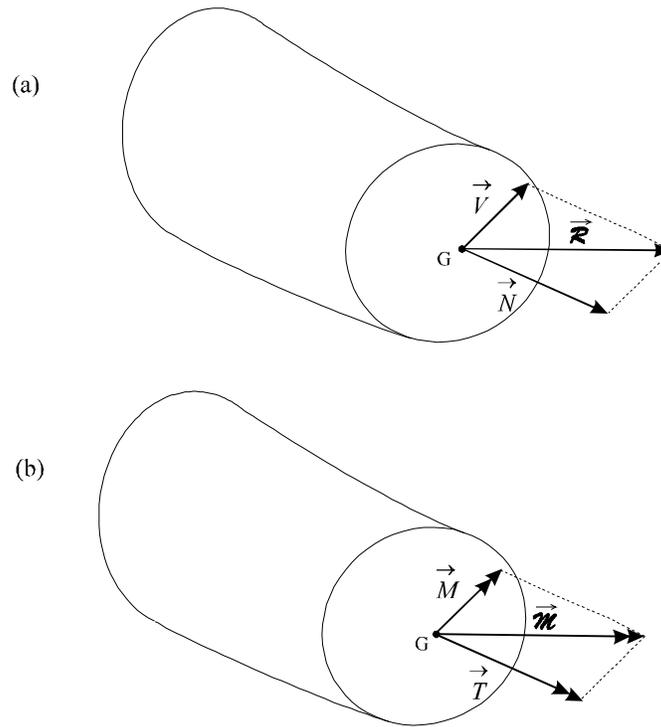


Figura 3.6

As componentes de  $\vec{R}$  recebem o nome de força normal ( $\vec{N}$ ) e de força cortante ( $\vec{V}$ ). A força normal é de tração quando tem o sentido de  $\vec{n}$  e de compressão quando tem o sentido de  $-\vec{n}$ . A força cortante não recebe nenhum qualificativo especial, quaisquer que sejam sua direção e seu sentido.

Fisicamente, como se disse, estas forças têm significados distintos: a força normal está ligada ao alongamento – quando de tração – ou ao encurtamento – quando de compressão – da barra. Já a força cortante está relacionada ao escorregamento das seções transversais, umas sobre as outras (Figura 3.9(c)). Este tipo de deformação recebe o nome de distorção.

Na seção anterior mencionou-se uma experiência em que um pedaço de giz era puxado em suas extremidades pelas mãos de uma pessoa (Figura 3.7). Tem-se então forças normais de tração em todas as seções transversais do giz, e ele se alonga.

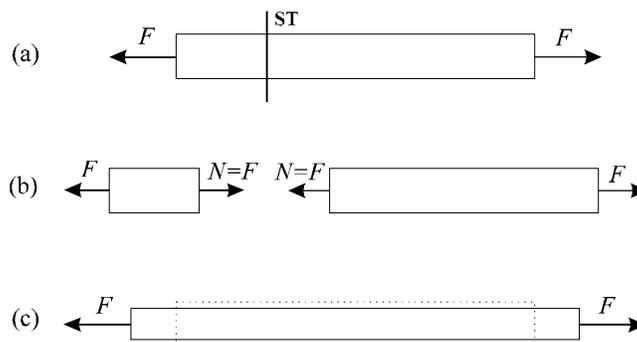


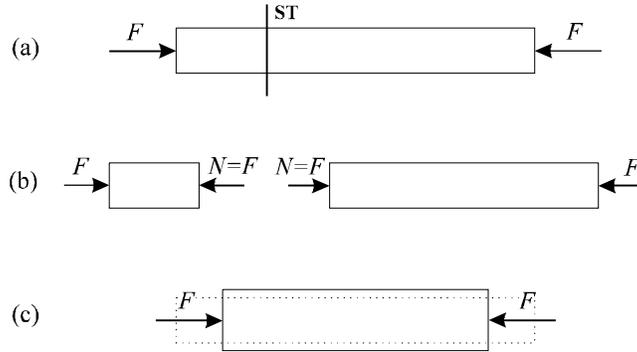
Figura 3.7

Na Figura 3.7 indicam-se o carregamento externo que age no giz (Figura 3.7(a)) e as forças normais que atuam nas duas partes em que se supõe separado o giz por um corte segundo uma seção transversal genérica (Figura 3.7(b)). Indica-se também a deformação do giz (Figura 3.7(c)).

Observa-se que na Figura 3.7 a direção e o sentido das forças estão indicados pelas flechas e a intensidade, pelas letras  $F$  e  $N$ .

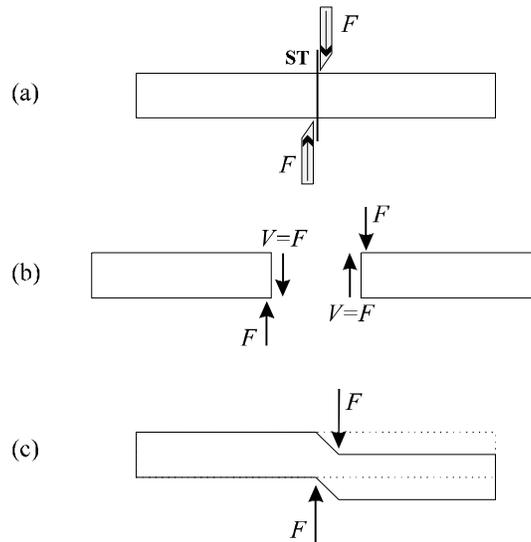
Quando, em lugar de ser puxado, o giz é empurrado pelas duas mãos (Figura 3.8), passa-se a ter forças normais de compressão em todas as suas seções transversais, e o giz se encurta.

Se, com uma tesoura, se tentar cortar o pedaço de giz segundo uma de suas seções transversais, se terá na seção do corte uma força cortante (Figura 3.9).



**Figura 3.8**

As componentes de  $\vec{M}$  recebem o nome de momento de torção ( $\vec{T}$ ) e momento fletor ( $\vec{M}$ ).



**Figura 3.9**

Fisicamente, o momento de torção está ligado à torção da barra, causada pela rotação das seções transversais em torno do eixo da barra (Figura 3.10). Quando uma lavadeira torce uma toalha com as mãos, ela o faz mediante a aplicação de momentos de torção nas duas extremidades da toalha.

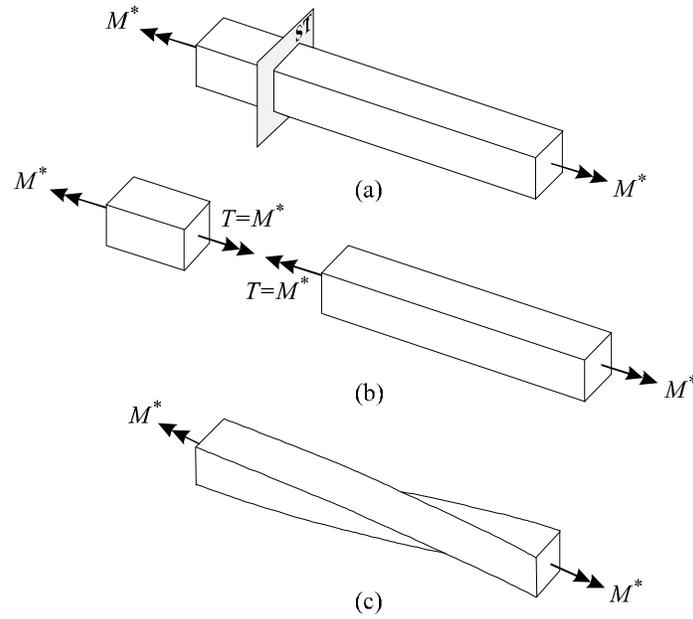


Figura 3.10

O momento fletor está ligado à flexão da barra, isto é, ao encurvamento do eixo da barra (Figura 3.11). Esta flexão é causada por rotações das seções transversais em torno de eixos situados no próprio plano da seção transversal.

Após esta apresentação das quatro componentes dos esforços solicitantes fica clara a origem dos seus nomes: a força normal é normal à seção transversal da barra, a força cortante está ligada ao corte da barra, o momento de torção, à torção da barra e o momento fletor, à flexão da barra.

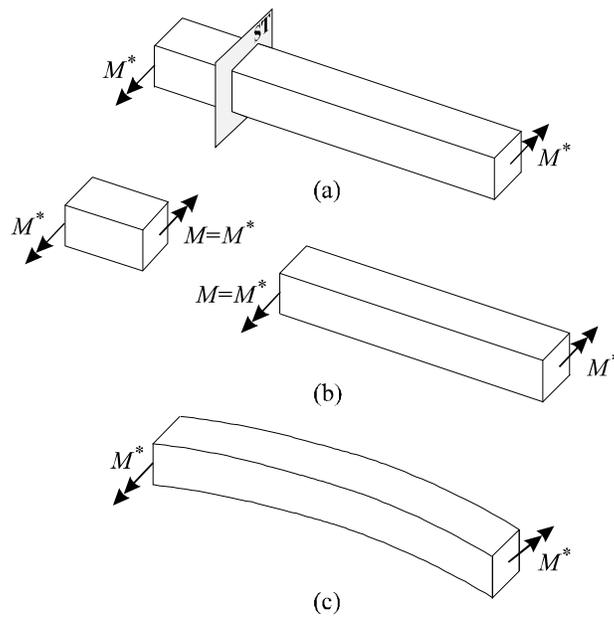


Figura 3.11

Como as componentes de  $\vec{R}$  e de  $\vec{M}$  têm significados físicos completamente distintos, é fundamental determiná-las. Não existe sentido em se falar apenas em  $\vec{R}$  e em  $\vec{M}$ : é necessário conhecer isoladamente  $\vec{N}$ ,  $\vec{V}$ ,  $\vec{T}$  e  $\vec{M}$ . Por esta razão, a partir de agora, quando se fizer menção a esforços solicitantes em uma seção transversal de uma barra, claramente se estará fazendo referência a  $\vec{N}$ ,  $\vec{V}$ ,  $\vec{T}$  e  $\vec{M}$ , e não simplesmente a  $\vec{R}$  e a  $\vec{M}$ .

Quando se carrega uma estrutura, as tensões (e conseqüentemente os esforços solicitantes) e as deformações surgem simultaneamente na estrutura. As tensões (e os esforços solicitantes) sempre coexistem com as deformações. Apesar disso, é muito comum dizer-se, por exemplo, “uma barra submetida a momentos fletores se encurva” ou então “uma barra submetida a forças normais de tração se alonga”. No fundo, o que se está dizendo é que “uma barra em que há momentos fletores encontra-se encurvada” ou então que “uma barra em que há forças normais de tração encontra-se alongada”. Na linguagem corrente, entretanto, transmite-se a sensação de que a deformação decorre dos esforços solicitantes, o que, contudo, não é verdade.

Os esforços solicitantes foram definidos a partir das tensões que atuam na seção transversal de uma barra: eles são os esforços decorrentes da redução dessas tensões no centro de gravidade da seção. Esta definição permite que os esforços solicitantes sejam facilmente determinados a partir das tensões. É o que se fará a seguir.

Na Figura 3.12 estão indicadas as componentes da tensão  $\vec{\rho}$  em um ponto genérico P da seção transversal de uma barra.

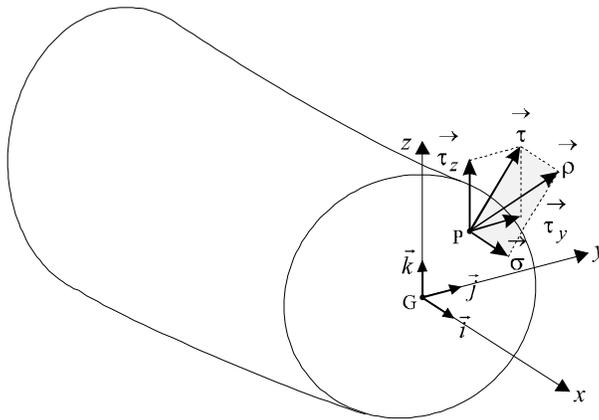


Figura 3.12

O eixo  $x$  é normal à seção transversal, sendo tangente ao eixo da barra em G; os eixos  $y$  e  $z$  se situam na seção transversal da barra.

Tem-se

$$\begin{aligned} \vec{\rho} &= \vec{\sigma} + \vec{\tau} = \vec{\sigma} + \vec{\tau}_y + \vec{\tau}_z = \\ &= \sigma \vec{i} + \tau_y \vec{j} + \tau_z \vec{k}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

tendo-se decomposto a tensão de cisalhamento  $\vec{\tau}$  em suas componentes  $\vec{\tau}_y$  e  $\vec{\tau}_z$ , respectivamente paralelas aos eixos  $y$  e  $z$ .

Em um elemento infinitesimal  $dA$  da seção transversal tomado em torno de P atuam então as tensões  $\vec{\sigma}$ ,  $\vec{\tau}_y$  e  $\vec{\tau}_z$ , logo agem neste elemento as forças  $\vec{\sigma} dA$ ,  $\vec{\tau}_y dA$  e  $\vec{\tau}_z dA$ , como se indica na Figura 3.13. É a redução destas forças em G que leva aos esforços solicitantes.

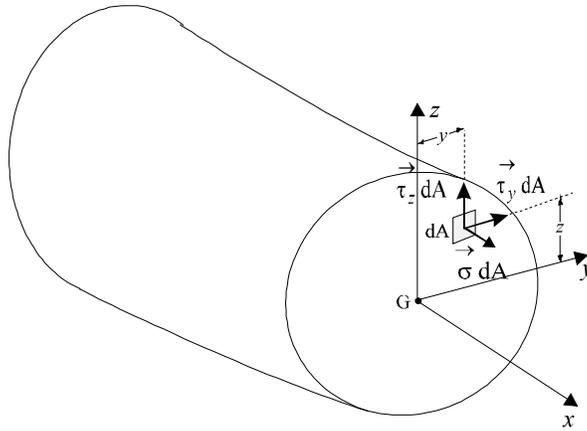


Figura 3.13

Para se chegar às expressões que ligam os esforços solicitantes às tensões deve-se decompor os esforços solicitantes em suas componentes segundo os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , como se mostra na Figura 3.14, em que se apresentam as decomposições de  $\vec{\mathcal{R}}$  (Figura 3.14(a)) e de  $\vec{\mathcal{M}}$  (Figura 3.14(b)). Nota-se que nestas figuras tanto a força cortante  $\vec{V}$  como o momento fletor  $\vec{M}$  foram decompostos em suas componentes segundo os eixos  $y$  e  $z$ .  
 Tem-se então

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{R}} &= \vec{N} + \vec{V} = \vec{N} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} = \\ &= N \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} \end{aligned} \quad (3.3)$$

e

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}} &= \vec{T} + \vec{M} = T \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k} = \\ &= T \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k} . \end{aligned} \quad (3.4)$$

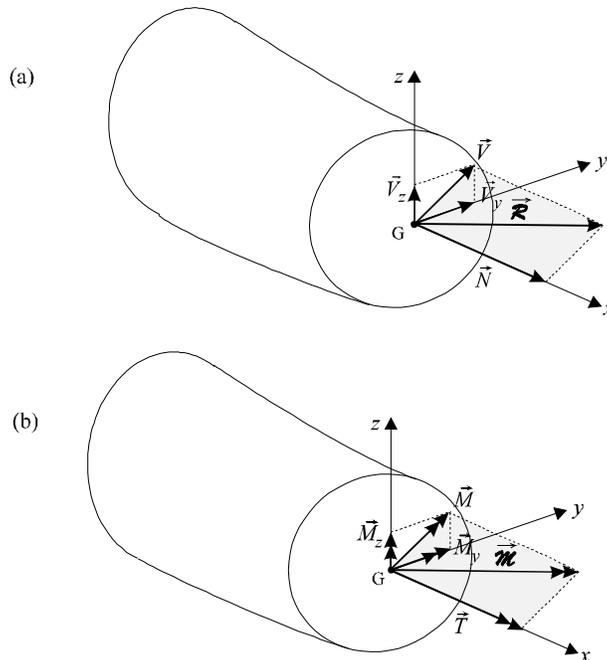


Figura 3.14

Observando as Figuras 3.13 e 3.14, e lembrando mais uma vez que os esforços solicitantes são obtidos pela redução das forças  $\bar{\sigma} dA$ ,  $\bar{\tau}_y dA$  e  $\bar{\tau}_z dA$  em G, chega-se facilmente às relações entre as seis componentes dos esforços solicitantes e as três componentes das tensões:

$$N = \int_A \sigma dA \quad (3.5)$$

$$V_y = \int_A \tau_y dA \quad (3.6)$$

$$V_z = \int_A \tau_z dA \quad (3.7)$$

$$T = \int_A (\tau_z y - \tau_y z) dA \quad (3.8)$$

$$M_y = \int_A \sigma z dA \quad (3.9)$$

$$M_z = - \int_A \sigma y dA \quad (3.10)$$

Verifica-se que as forças  $-N$ ,  $V_y$  e  $V_z$  – nada mais são que as resultantes das tensões a elas paralelas e que os momentos  $-T$ ,  $M_y$  e  $M_z$  – nada mais são que os momentos das tensões em relação aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Nas expressões (3.8) a (3.10) estes momentos são considerados positivos quando têm os sentidos dos eixos.

Como se acaba de mostrar, conhecidas as tensões, a determinação dos esforços solicitantes é imediata. Passar das tensões aos esforços solicitantes é muito simples. Infelizmente, entretanto, não é este o problema que se tem para resolver. O que se procura é exatamente o contrário: conhecidos os esforços solicitantes na seção transversal de uma barra, quais as tensões a eles associadas, quais as tensões que os originam? Responder esta indagação é um dos principais objetivos da Resistência dos Materiais, como se verá na sequência do curso.

## Capítulo 4

### Teorema Fundamental

Neste capítulo se examinará o teorema fundamental da estática das construções, também conhecido como teorema do corte, que se constitui na forma mais simples, rápida e segura de determinar os esforços solicitantes que atuam em uma seção transversal de uma barra.

Apresenta-se inicialmente o enunciado do teorema; mais adiante se verá sua demonstração.

#### Teorema fundamental: enunciado

Os esforços solicitantes que atuam em uma seção transversal de uma barra podem ser obtidos cortando a barra nesta seção e reduzindo no seu centro de gravidade ou todos os esforços externos aplicados de um lado do corte ou então todos os esforços externos aplicados do outro lado do corte.

Para facilitar a compreensão deste enunciado se exemplificará agora o uso do teorema fundamental, mostrando como empregá-lo para determinar os esforços solicitantes que atuam na seção transversal  $S$  da barra da Figura 4.1.

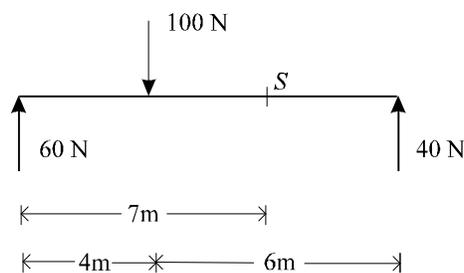


Figura 4.1

De acordo com o teorema fundamental, os esforços solicitantes em  $S$  podem ser obtidos cortando a barra nesta seção e reduzindo em seu centro de gravidade  $G$  ou os esforços externos aplicados à direita do corte ou então os esforços externos aplicados à esquerda do corte.

Na Figura 4.2 representa-se a barra já cortada em  $S$  e os esforços aplicados à direita (Figura 4.2(a)) e à esquerda (Figura 4.2(b)) do corte.

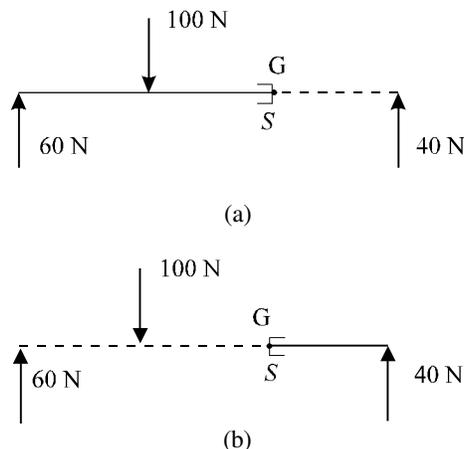
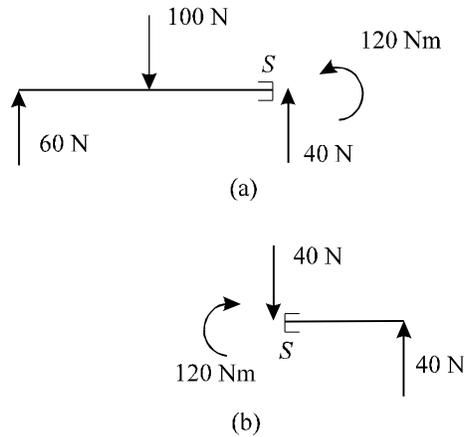


Figura 4.2

A redução em G dos esforços externos aplicados à direita do corte leva aos esforços representados na Figura 4.3(a); a redução em G dos esforços externos aplicados à esquerda do corte, aos esforços representados na Figura 4.3(b).



**Figura 4.3**

Os esforços solicitantes na seção  $S$  são os indicados nas Figuras 4.3(a) e 4.3(b). Em ambas as figuras atua em  $S$  uma força cortante de 40 N, tendendo a girar o trecho de barra em que se aplica no sentido anti-horário. Também se tem nas duas Figuras um momento fletor de 120 Nm, tracionando as fibras inferiores da barra.

Observa-se na Figura 4.3 que os esforços solicitantes que atuam nos dois lados da barra cortada segundo  $S$  são iguais em intensidade, mas com sentidos opostos.

Esta propriedade é geral, e decorre do princípio da ação e reação: os esforços solicitantes que atuam nas duas partes em que fica dividida uma barra cortada segundo uma seção transversal são iguais em intensidade, mas opostos em sentido.

Conhecer os esforços solicitantes que atuam de um lado do corte é, portanto, conhecer também os esforços solicitantes que atuam do outro lado do corte.

Por esta razão, para obter os esforços solicitantes na seção  $S$  da barra da Figura 4.1 basta reduzir no centro de gravidade desta seção ou todos os esforços externos aplicados a sua direita, como se fez na Figura 4.3(a), ou então todos os esforços externos aplicados a sua esquerda, como se fez na Figura 4.3(b). Não é preciso fazer ambas as reduções, pois conhecidos os esforços solicitantes de um lado conhecem-se também os do outro lado. Por este motivo, ao se determinar os esforços solicitantes em uma seção transversal, deve-se optar pela redução de esforços menos trabalhosa e menos sujeita a erros. No caso ilustrado nas Figuras 4.2 e 4.3, é mais simples reduzir em G os esforços externos aplicados à direita do corte - uma única força concentrada - que os esforços externos aplicados à esquerda do corte - duas forças concentradas.

Examinado o enunciado do teorema fundamental, passa-se agora a sua demonstração, que será feita para o caso mais geral de um sistema tridimensional.

#### Teorema fundamental: demonstração

Considere-se a barra da Figura 4.4, em equilíbrio sob a ação de um sistema de forças externas ativas e reativas.

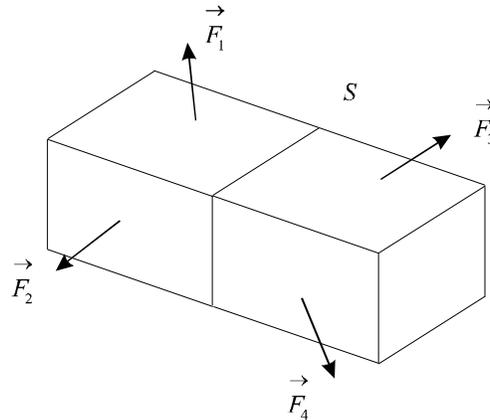
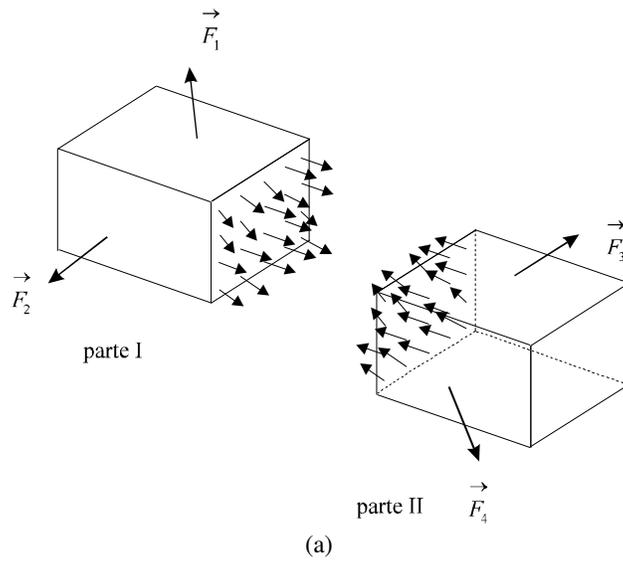
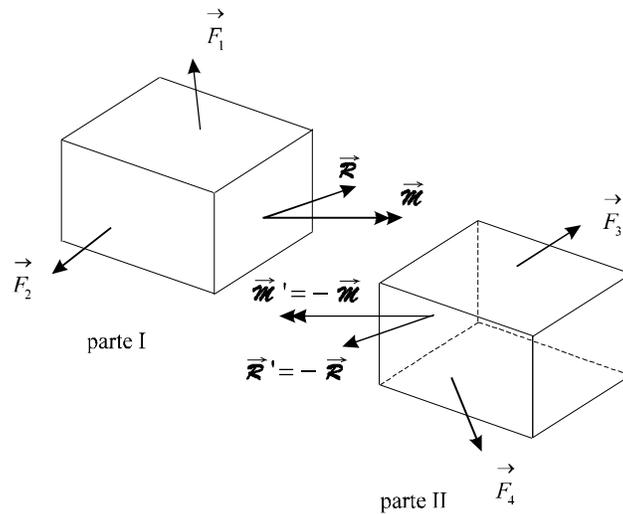


Figura 4.4

O que se deseja demonstrar é que os esforços solicitantes em uma seção transversal genérica  $S$  podem ser determinados cortando a barra nesta seção e reduzindo no seu centro de gravidade  $G$  ou todos os esforços externos aplicados à direita do corte ou então todos os esforços externos aplicados à esquerda do corte.



(a)



(b)

Figura 4.5

Na Figura 4.5(a) mostram-se as tensões que atuam nas duas partes da barra cortada segundo  $S$ ; na Figura 4.5(b) mostram-se os esforços solicitantes que atuam nestas duas partes da barra, decorrentes da redução em  $G$  das tensões que atuam na seção transversal  $S$ .

Do princípio de ação e reação decorre que as tensões que atuam em pontos correspondentes da seção  $S$  nas partes I e II da barra são iguais em intensidade e direção, mas opostas em sentido. Por este motivo, os esforços solicitantes que atuam na seção  $S$  nestas duas partes da barra também são iguais em intensidade e direção, mas opostos em sentido, como se mostra na Figura 4.5(b).

Deve-se lembrar ainda que, conforme se viu no Capítulo 3, a parte I da barra fica em equilíbrio sob a ação dos esforços que nela atuam na Figura 4.5(b); o mesmo se pode dizer também da parte II, que fica em equilíbrio sob a ação dos esforços externos que nela atuam na Figura 4.5(b).

Imagine-se agora que se corte a barra em  $S$  e que se reduzam no seu centro de gravidade  $G$  os esforços externos aplicados à direita do corte como se mostra na Figura 4.6.

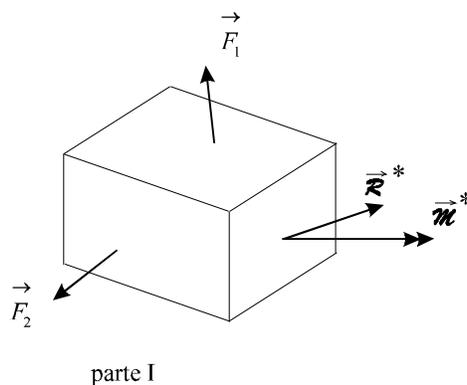


Figura 4.6

Sabe-se do Capítulo I que a redução de um sistema de esforços em um ponto leva a uma força e a um momento mecanicamente equivalentes ao sistema que foi reduzido.

Conclui-se desta propriedade que os esforços que atuam na parte I da barra indicada na Figura 4.6 estão em equilíbrio, pois eles decorrem da redução dos esforços que atuam na barra da Figura 4.4, que está em equilíbrio.

O mesmo se pode dizer dos esforços decorrentes do corte da barra em  $S$  e da redução em  $G$  das forças externas aplicadas à esquerda do corte, mostrados na Figura 4.7.

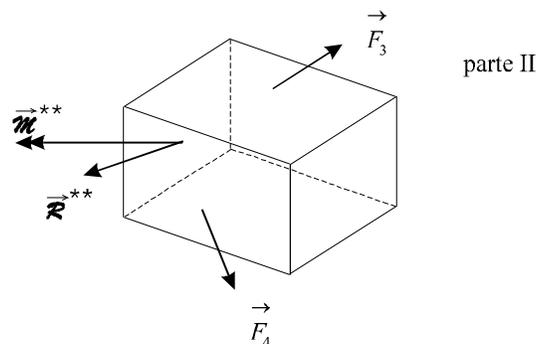


Figura 4.7

Pelas mesmas razões apontadas, os esforços que atuam na parte II da barra indicada na Figura 4.7 estão em equilíbrio.

Voltando agora ao enunciado do teorema fundamental, observa-se que para demonstrá-lo basta provar que se tem

$$\vec{R}^* = \vec{R} \quad \text{e} \quad \vec{M}^* = \vec{M}, \quad (4.1)$$

e ainda que

$$\vec{R}^{**} = \vec{R}' \quad \text{e} \quad \vec{M}^{**} = \vec{M}'. \quad (4.2)$$

Esta prova é bastante fácil.

Comparem-se as partes I da barra mostradas nas Figuras 4.5(b) e 4.6. Como ambas estão em equilíbrio, conclui-se que se tem

$$\vec{R}^* = \vec{R} \quad (4.3)$$

e

$$\vec{M}^* = \vec{M}.$$

De forma análoga, pela comparação das partes II da barra mostradas nas Figuras 4.5(b) e 4.7, conclui-se que se tem

$$\vec{R}^{**} = \vec{R}' = -\vec{R} = -\vec{R}^* \quad (4.4)$$

e

$$\vec{M}^{**} = \vec{M}' = -\vec{M} = -\vec{M}^*$$

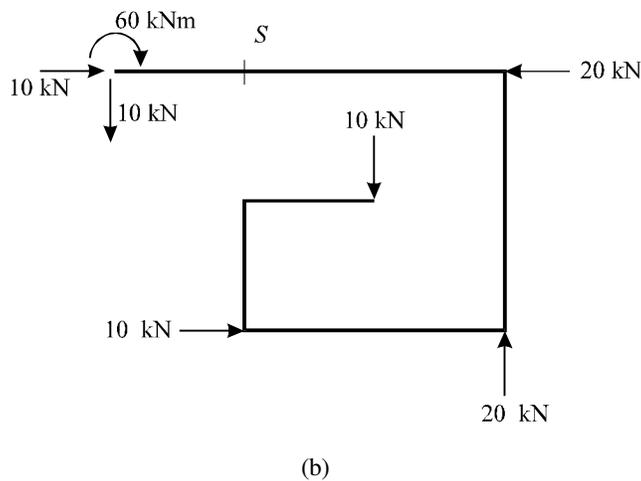
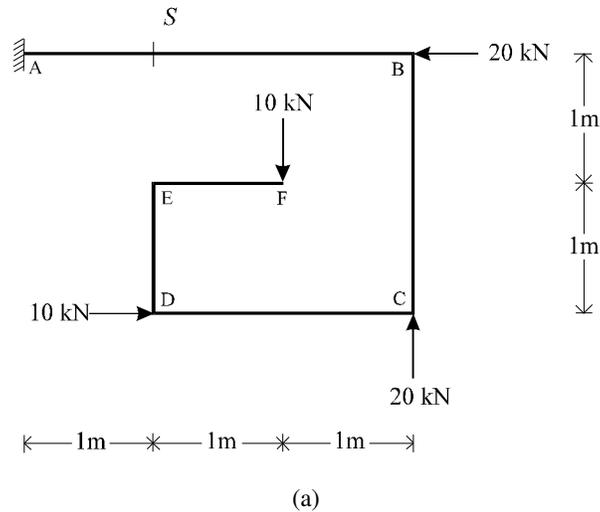
demonstrando-se assim que de fato pelo corte da barra em  $S$  e redução em  $G$  de todos os esforços externos aplicados à direita do corte ou então de todos os esforços externos aplicados à esquerda do corte se obtém os esforços solicitantes que atuam nessa seção, ficando então demonstrado o teorema fundamental.  $\star$

Examinado o teorema fundamental, apresenta-se agora mais um exemplo de sua aplicação.

#### Exemplo 4.1

Determinar os esforços solicitantes que atuam na seção  $S$  da viga poligonal da Figura 4.8(a).

A determinação dos esforços solicitantes na seção  $S$  será feita por meio do teorema fundamental, cortando-se a barra em  $S$  e reduzindo no seu centro de gravidade ou todos os esforços externos aplicados à direita do corte ou então todos os esforços externos aplicados à esquerda do corte.



**Figura 4.8**

Observa-se que os esforços externos aplicados à direita do corte são conhecidos; já os esforços externos aplicados à esquerda do corte são as reações introduzidas na estrutura pelo engastamento, que precisam ser determinadas. Estas reações já foram obtidas no Exemplo 1.10 do Capítulo I, e estão indicadas na Figura 4.8(b).

Passa-se agora ao emprego do teorema fundamental.

Inicialmente serão obtidos os esforços solicitantes que atuam no trecho da viga à esquerda do corte.

Na Figura 4.9(a) representa-se a viga cortada segundo  $S$ , desenhando-se o trecho da viga à esquerda do corte com linha cheia e o trecho da viga à direita do corte com linha tracejada.

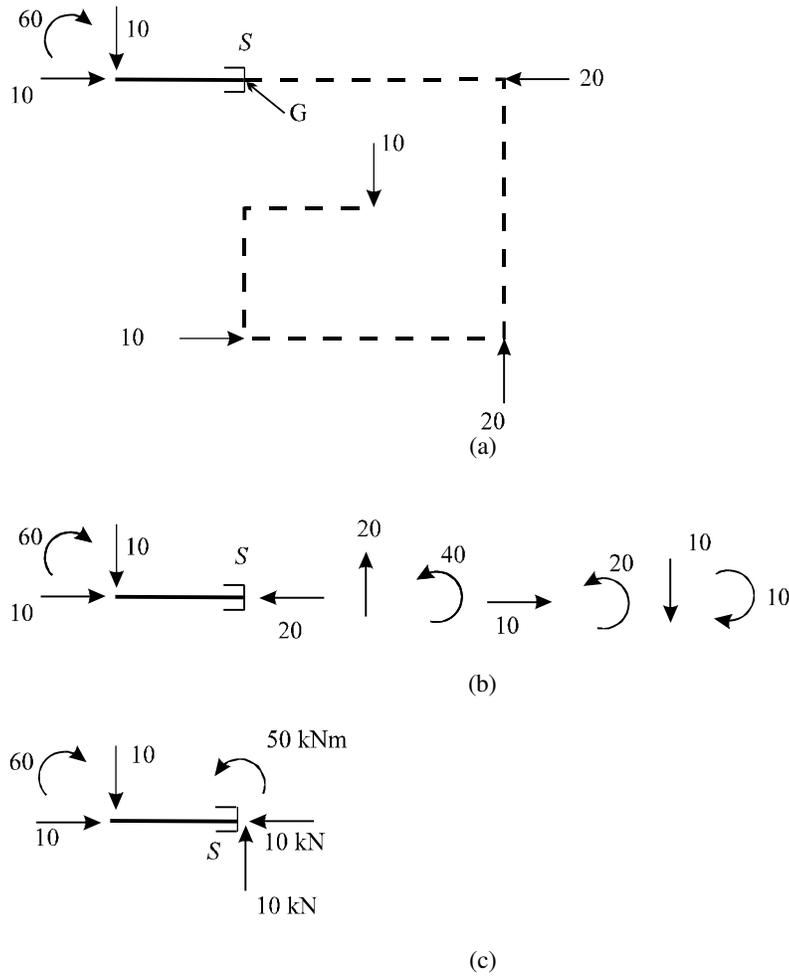
A redução dos esforços externos aplicados à direita do corte no centro de gravidade da seção  $S$  leva aos esforços solicitantes que atuam nessa seção, indicados de forma detalhada na Figura 4.9(b) e de forma concisa na Figura 4.9(c).

Observa-se nesta figura que se tem como esforços solicitantes em  $S$  uma força normal de compressão de 10 kN, uma força cortante de 10 kN girando o trecho de viga em que se aplica no sentido anti-horário e um momento fletor de 50 kNm tracionando as fibras inferiores da barra.

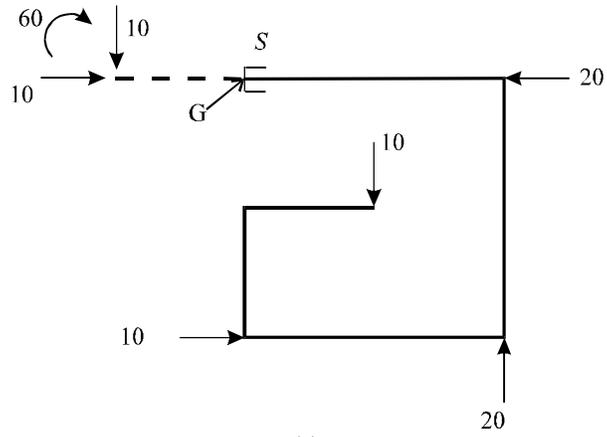
Determinam-se agora os esforços solicitantes que atuam no trecho da viga à direita do corte.

Na Figura 4.10(a) indica-se a viga cortada segundo  $S$ , desenhando-se com linha cheia o trecho da viga à direita do corte e com linha tracejada o trecho da viga à esquerda do corte.

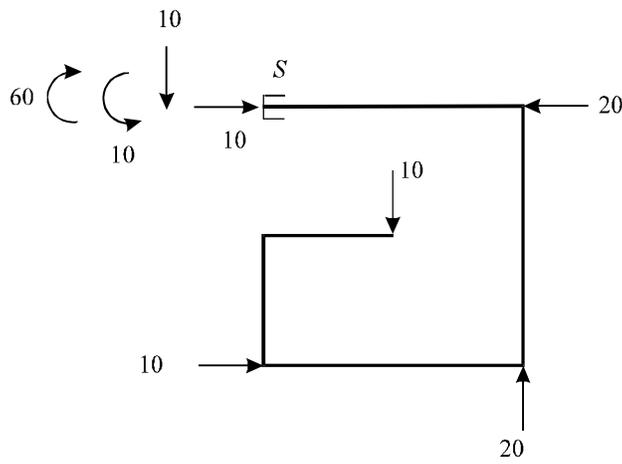
A redução dos esforços externos aplicados à esquerda do corte no centro de gravidade da seção  $S$  leva aos esforços solicitantes que atuam nesta seção, indicados de forma detalhada na Figura 4.10(b) e de forma concisa na Figura 4.10(c).



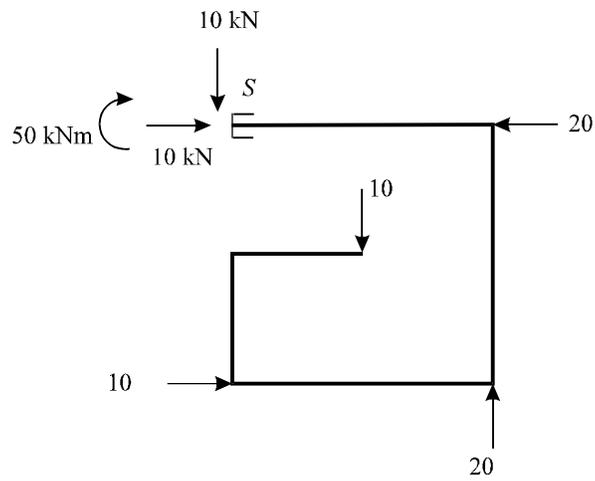
**Figura 4.9**



(a)



(b)



(c)

Figura 4.10

Observa-se que novamente se tem na seção  $S$  uma força normal de compressão de 10 kN, uma força cortante de 10 kN girando o trecho de viga em que se aplica no sentido anti-horário e um momento fletor de 50 kNm tracionando as fibras inferiores da barra.

Como era esperado, os esforços solicitantes determinados nos dois lados do corte - indicados nas Figuras 4.9(c) e 4.10(c) - têm a mesma intensidade e a mesma direção, mas sentidos opostos.

No caso particular dessa seção transversal que se acaba de analisar é mais fácil e menos sujeita a erros a determinação dos esforços solicitantes mediante a redução em  $G$  dos esforços externos aplicados à direita do corte. Isto, porque todos os esforços externos aplicados à direita do corte são conhecidos, e sua redução em  $G$  pode ser feita diretamente, sem que seja necessário calcular as reações de apoio introduzidas em  $A$  pelo engastamento.

Apesar de aparentemente mais simples, por envolver um menor número de esforços a serem reduzidos, a redução em  $G$  dos esforços externos aplicados à esquerda do corte é na realidade mais sujeita a erros, pois como estes esforços são reações de apoio desconhecidas, é preciso primeiro determiná-los e depois fazer sua redução em  $G$ .