Dinâmica da partícula fluida

J. L. Baliño

Escola Politécnica - Universidade de São Paulo

Apostila de aula
2017, v.1

Sumário

Forças volumétricas

Proporcionais ao volume ($\sim L^3$). Se $\boldsymbol{G}$ é o campo de força por unidade de massa, resulta:

$$\boldsymbol{G} = \frac{\delta \boldsymbol{F}_G}{\delta m}$$

A força volumétrica $\boldsymbol{F}_G$ em um sistema de partículas resulta:

$$\boldsymbol{F}_G = \int_{\mathcal{V}} \rho \, \boldsymbol{G} \, d\mathcal{V}$$

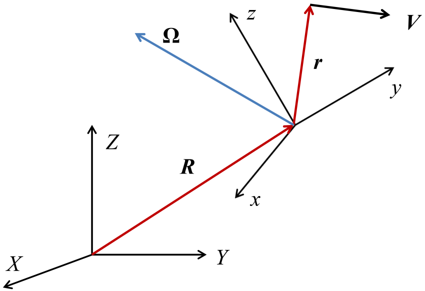
O exemplo típico de força volumétrica é o *campo gravitacional*; neste caso $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{g}$ constante e $\boldsymbol{F}_G = \boldsymbol{g} \int_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V} = M \, \boldsymbol{g}$ é o *peso* do sistema de partículas. Se o campo $\boldsymbol{G}$ é *conservativo*, então ele pode ser obtido de um *potencial escalar* $\mathcal{U}$ (energia potencial):

$$\boldsymbol{G} = -\nabla \mathcal{U}$$

O campo gravitacional é conservativo; se $\boldsymbol{g} = -g \, \breve{\boldsymbol{k}}$, a energia potencial gravitacional resulta $\mathcal{U} = g \, z + cte$.

Forças não inerciais

Aparecem quando a posição $\boldsymbol{r}$ e a velocidade $\boldsymbol{V}$ são medidas em um sistema de referência não inercial, para satisfazer a equação de conservação do momento linear; elas não satisfazem o princípio de ação e reação. O sistema não inercial xyz rota com velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}$ e se desloca com posição $\boldsymbol{R}$ em relação ao sistema absoluto XYZ.



Forças não inerciais

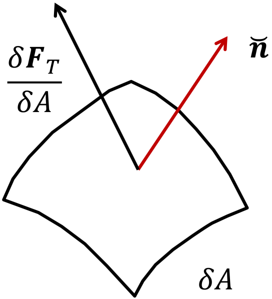
É necessário acrescentar o campo de forças volumétricas não-inerciais $\boldsymbol{G}_{NI}$:

$$\boldsymbol{G}_{NI} = -\left[\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \boldsymbol{r} + 2\,\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})\right]$$

onde identificamos respectivamente as acelerações da origem do sistema não inercial, angular, de Coriolis e centrífuga.

Forças superficiais

Proporcionais à superfície ($\sim L^2$). Seja $\boldsymbol{f}_T$ a força por unidade de área (tensão) resultante de retirar o meio externo ao elemento de área δA com normal $\breve{\boldsymbol{n}}$. A relação funcional (transformação linear) entre tensão e versor normal define o *tensor de tensões* $\underline{\boldsymbol{T}}$.



$$\boldsymbol{f}_T = \frac{\delta \boldsymbol{F}_T}{\delta A} = \underline{\boldsymbol{T}} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}$$

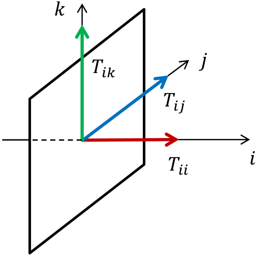
$$\boldsymbol{F}_T = \int_{SC} \underline{\boldsymbol{T}} \cdot \breve{\boldsymbol{n}} \, dA$$

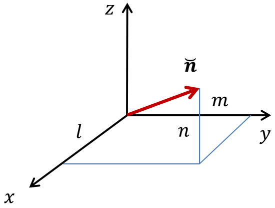
Matriz associada (simétrica):

$$\{T_{ij}\} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{zx} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{yz} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

Matriz associada $\{T_{ij}\}$

No elemento T_{ij}, o subscrito i indica a direção normal ao elemento de área considerado, enquanto j indica a direção da tensão; assim, se $i = j$ a tensão é *normal*, enquanto se $i \neq j$ a tensão é de *cisalhamento*. Para um versor normal de cosenos diretores l, m e n (cosenos dos ângulos formados respectivamente com os eixos x, y e z) resulta:





$$\begin{pmatrix} f_{T\,x} \\ f_{T\,y} \\ f_{T\,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{zx} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{yz} & T_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l\,T_{xx} + m\,T_{xy} + n\,T_{zx} \\ l\,T_{xy} + m\,T_{yy} + n\,T_{yz} \\ l\,T_{zx} + m\,T_{yz} + n\,T_{zz} \end{pmatrix}$$

Pressão e tensão viscosa

$$\underline{\boldsymbol{T}} = -p\,\underline{\boldsymbol{I}} + \underline{\boldsymbol{\tau}}$$

onde p é a *pressão*, $\underline{\boldsymbol{I}}$ é o *tensor identidade* e $\underline{\boldsymbol{\tau}}$ é o *tensor de tensões viscosas*. A pressão depende do *estado termodinâmico* do fluido, enquanto o tensor viscoso depende da *viscosidade* e da existencia de *taxa de deformação* do fluido.

Como $\{I_{ij}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, resulta $-p\,\underline{\boldsymbol{I}} \cdot \breve{\boldsymbol{n}} = -p\,\breve{\boldsymbol{n}}$, isto é, a pressão age sempre na direção contrária ao versor normal, com um módulo independente da direção (princípio de Pascal).

$$\boldsymbol{F}_T = \boldsymbol{F}_p + \boldsymbol{F}_v$$

$$\boldsymbol{F}_p = \int_{CS} (-p)\,\breve{\boldsymbol{n}}\,dA \quad \text{(força de pressão)}$$

$$\boldsymbol{F}_v = \int_{CS} \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}\,dA \quad \text{(força viscosa)}$$

Força resultante de pressão

A força de pressão em um sistema de partículas resulta:

$$\boldsymbol{F}_p = \int_A -p\,\underline{\boldsymbol{I}} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}\, dA = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (-p\,\underline{\boldsymbol{I}})\; d\mathcal{V}$$

onde transformamos a integral através do *teorema do divergente*.

Temos que:

$$\nabla \cdot (-p\,\underline{\boldsymbol{I}}) = -p\,\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{I}} - \underline{\boldsymbol{I}} \cdot \nabla p = -\nabla p$$

pois $\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{I}} = \underline{\boldsymbol{0}}$ e $\underline{\boldsymbol{I}} \cdot \nabla p = \nabla p$. Substituindo, resulta:

$$\boldsymbol{F}_p = \int_{\mathcal{V}} -\nabla p\, d\mathcal{V}$$

A quantidade $-\nabla p$ é a força resultante de pressão por unidade de volume. A força de pressão resultante por unidade de massa resulta:

$$\frac{\delta \boldsymbol{F}_p}{\delta m} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$

Força resultante de tensão viscosa

A força de tensão viscosa em um sistema de partículas resulta:

$$\boldsymbol{F}_V = \int_A \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}\, dA = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}\, d\mathcal{V}$$

onde transformamos a integral através do *teorema do divergente*. A quantidade $\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}$ é a força resultante de tensão viscosa por unidade de volume. A força de tensão viscosa resultante por unidade de massa resulta:

$$\frac{\delta \boldsymbol{F}_V}{\delta m} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}$$

Em coordenadas cartesianas:

$$\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Conservação do momento linear em forma diferencial

A conservação do momento linear em forma diferencial resulta:

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{G}$$

Em coordenadas cartesianas, a componente x resulta, a modo de exemplo:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) + G_x$$

Precisamos fechar matematicamente o problema através de uma lei constitutiva que relacione o tensor viscoso com o campo de velocidade.

Equação de Euler

Em regiões do escoamento onde são desprezíveis os efeitos viscosos, existe um estado hidrostático de tensão, resultando a equação de Euler (Leonard Euler, 1755):

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \boldsymbol{G}$$

A equação de Euler é não-linear e de primeira ordem na velocidade.

Equação de Bernoulli

Realizamos uma integral de caminho da equação de Euler, multiplicando escalarmente por $\boldsymbol{dr}$. Definindo $\delta\varphi = \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{dr}$, supondo $\boldsymbol{G} = -\nabla\mathcal{U}$ e utilizando a indentidade:

$$\nabla\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V} = \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) - \boldsymbol{V} \times (\nabla \times \boldsymbol{V}) = \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) - \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\omega}$$

resulta:

$$\delta\left(\mathcal{U} + \frac{V^2}{2}\right) + \frac{\delta p}{\rho} + \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{dr} = (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{dr}$$

O lado direito é nulo para $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ (caso trivial), $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$ (escoamento *irrotacional*), $\boldsymbol{dr} \parallel \boldsymbol{\omega}$ (linha de vorticidade) ou $\boldsymbol{dr} \parallel \boldsymbol{V}$ (linha de corrente). Para estes casos é possível integrar, resultando:

$$\frac{1}{2}\left(V_2^2 - V_1^2\right) + (\mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_1) + \int_1^2 \frac{\delta p}{\rho} + \int_1^2 \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{dr} = 0$$

Equação de Bernoulli

O termo de pressão pode ser integrado para escoamentos barotrópicos, isto é, aqueles onde $p = p(\rho)$.
Para um escoamento permanente, incompressível e com forças gravitacionais, resulta a equação de Bernoulli (Daniel Bernoulli, 1738):

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + g\, z = cte$$

A constante de integração pode variar com a linha de corrente (ou vorticidade), mas se o escoamento for irrotacional, a constante é a mesma para todas as linhas de corrente (é uma constante do campo).

Altura de energia: $H_E = \dfrac{p}{\rho\, g} + \dfrac{V^2}{2\, g} + z$

Pressão de estagnação: $P = p + \dfrac{1}{2}\, \rho\, V^2 + \rho\, g\, z$