

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESCOLA POLITÉCNICA

Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica

**CURSO BÁSICO DE
RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS**

FASCÍCULO N° 1

Tração ou compressão puras. Cisalhamento simples

H. Britto

2.010

RELAÇÃO DOS FASCÍCULOS

- 1) Tração ou compressão puras. Cisalhamento simples
- 2) Figuras planas
- 3) Torção uniforme
- 4) Flexão reta
- 5) Flexão oblíqua
- 6) Cisalhamento na flexão
- 7) Deformações na flexão. Linha elástica
- 8) Flambagem de Euler
- 9) Estado duplo de tensão. Círculo de Mohr
- 10) Estado triplo de tensão. Critérios de resistência

TRAÇÃO OU COMPRESSÃO. CISALHAMENTO SIMPLES

1) Introdução. Escopo da Resistência dos Materiais

Entende-se por estrutura a parte (ou as partes) de um sistema, destinadas a resistir às ações externas (do meio ambiente sobre o sistema). Em todas as especialidades da Engenharia há estruturas.

Exemplos: Pontes, barragens, edifícios altos, passarelas para pedestres, túneis, coberturas de estádios esportivos, reservatórios de líquidos, vasos de pressão, silos para armazenamento de grãos, chassis de caminhões, carrocerias monobloco de automóveis e ônibus, asas e fuselagens de aviões, cascos de navios e submarinos, plataformas oceânicas de exploração de petróleo, torres de resfriamento de usinas nucleares, tubulações industriais, mísseis balísticos ou teleguiados, pontes rolantes industriais, quadros de bicicletas e motos, robôs industriais, torres de transmissão de energia, fios elétricos com alma de aço, eixos de motores elétricos, próteses anatômicas, estruturas de sustentação de pratos parabólicos de radiotelescópios, veículos aeroespaciais, chaminés altas, torres *estaiadas* de antenas de rádio e televisão, estruturas de reatores de termofusão nuclear (tokamak) , etc..

A Resistência dos Materiais é a primeira disciplina da Mecânica das Estruturas. Ela estuda, principalmente, o comportamento das estruturas *reticuladas* (formadas por barras), tais como: vigas de todos os tipos, pórticos e treliças (planos ou espaciais), e grelhas.

Os esforços que agem sobre uma estrutura podem ser *externos* ou *internos*. Os externos são *ativos* (cargas aplicadas) ou *reativos* (introduzidos pelos apoios). Os esforços internos se subdividem em *solicitantes* (força normal, força cortante, momento fletor e momento de torção), e *resistentes* (tensões normais e tensões tangenciais). Os esforços solicitantes são equivalentes às tensões e na realidade não existem. O que existe são as tensões, às quais o material resiste. Os esforços solicitantes são entidades fictícias, espécie de meio termo entre os esforços externos e as tensões, e foram criados, na Mecânica das Estruturas, com a finalidade de facilitar o cálculo.

A Resistência dos Materiais tem como enfoque principal o estudo das *tensões* e o estudo das *deformações* em estruturas reticuladas. Numa primeira etapa se procede à *resolução* da estrutura, isto é, à determinação das reações de apoio e dos esforços solicitantes. Em seguida vem o *dimensionamento*, com a limitação das tensões (condições *últimas*, ou de *segurança*) e o controle das deformações (condições de *utilização*, ou de *serviço*).

O estudo das deformações é importante sob dois aspectos: limitar os deslocamentos de determinados pontos da estrutura e, mais importante ainda, viabilizar a resolução dos sistemas hiperestáticos. Sob este último prisma, a Resistência dos Materiais pode ser vista como uma continuação da Estática, já que esta última só resolve sistemas isostáticos. Para a resolução dos sistemas hiperestáticos dispõem-se de três conjuntos de equações: as equações de equilíbrio da Estática, as equações de *compatibilidade* (geometria das deformações) e as equações *constitutivas* (relações entre tensões e deformações), onde entra o material que compõe a estrutura.

Como exemplo de dimensionamento com controle das deformações, imagine-se a caixa de mudanças de um caminhão, que representa um sistema bastante complexo. As engrenagens,

eixos, rolamentos e demais peças que compõem o sistema devem ser capazes de resistir às tensões decorrentes da transmissão de potência do motor para o eixo cardan, e daí para as rodas motrizes (condição de segurança). Entretanto, isso não basta. É preciso, ainda, assegurar que as deformações dessas peças não sejam grandes a ponto de afetar a própria cinemática do mecanismo (condição de serviço).

Como outro exemplo, na área de Engenharia Civil, considere-se uma passarela para pedestres de grandes vãos (por exemplo, destinada a transpor um rio). Tal estrutura precisa ter resistência suficiente para suportar o peso próprio e o peso das pessoas, além das forças horizontais devidas ao vento e às variações térmicas diárias e sazonais. Além disso, ela deve ter a *esbeltez* controlada, de modo a evitar excesso de flexibilidade, que pode conduzir a vibrações indesejáveis devidas ao vento e à cadência do andar das pessoas.

2) O conceito de tensão

A tensão e a deformação não são grandezas físicas das mais simples. Neste item será introduzido o conceito de tensão.

Seja, na figura 1-1, um sólido V (que representa uma estrutura), em equilíbrio sob a ação de esforços externos ativos e reativos. Seja P um ponto interno do sólido, para o qual queremos definir o estado de tensão.

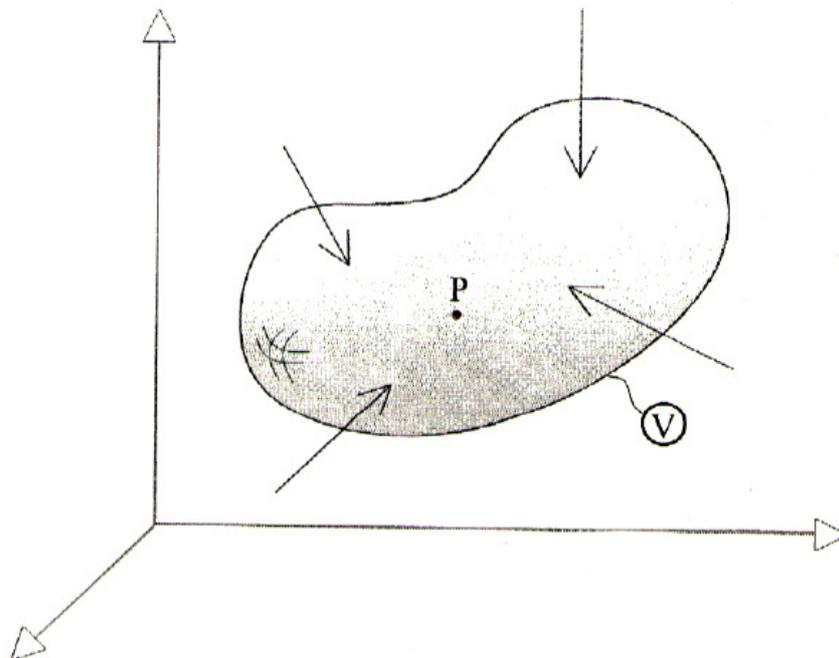


Figura 1 – 1

Para isso consideremos um plano qualquer α , que contém o ponto P , e que divide o sólido em duas partes distintas, que vamos chamar de I e II (figura 1-2). Consideremos o equilíbrio da parte I, após a divisão. Há que considerar, no diagrama de corpo livre, além dos esforços externos que

já atuavam na parte I, os esforços internos que II aplicava em I antes do corte (e que, após o corte, passam a ser externos para a parte I). Esses esforços são forças distribuídas ao longo do plano α .

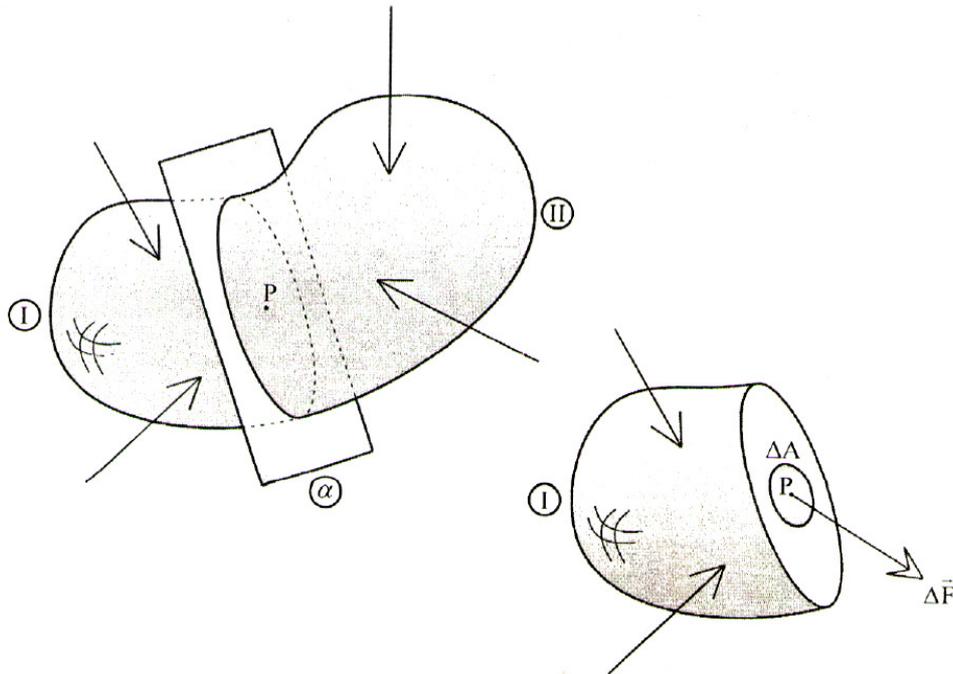


Figura 1 – 2

Seja ΔA a área de uma pequena superfície, contida no plano α , e no entorno do ponto P. A resultante das forças distribuídas que II aplicava em I, na área ΔA , é $\Delta \vec{F}$.

Por definição, a *tensão média* em P, no plano α e na área ΔA , é dada por:

$$\boxed{\bar{\rho}_m = \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}} \quad (1)$$

A tensão média depende do ponto P, do plano α e da área ΔA . Essa última dependência é incômoda e pode ser eliminada fazendo ΔA tender a zero. Aparece assim o conceito de tensão no ponto P e no plano α :

$$\bar{\rho} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{\rho} = \frac{d\vec{F}}{dA}} \quad (2)$$

A tensão $\bar{\rho}$ depende do ponto P e do plano α , e pode ser decomposta, conforme a figura 1-3, numa componente normal ao plano (tensão normal $\bar{\sigma}$, que pode ser de tração ou compressão) e noutra componente, contida no plano (tensão tangencial $\bar{\tau}$), tais que:

$$\boxed{\bar{\rho} = \bar{\sigma} + \bar{\tau}} \quad (3)$$

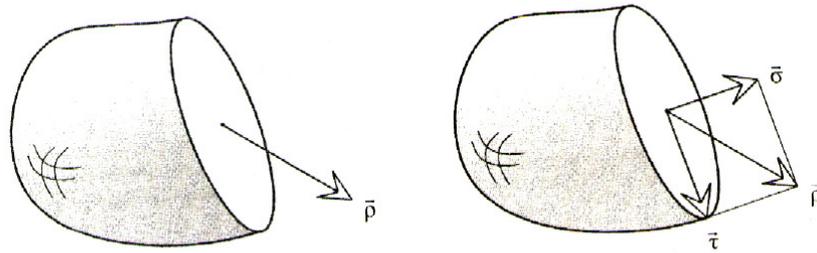


Figura 1 – 3

Observação (Prof. Décio Leal de Zagottis – Elasticidade e Elementos Finitos – 1.979)

As grandezas físicas têm sido classificadas em grandezas escalares e vetoriais.

As grandezas escalares são aquelas que ficam perfeitamente caracterizadas, em cada ponto, por um número real, ou seja, que ficam perfeitamente caracterizadas em um sólido V por uma função escalar de ponto

$$\mu = \mu(P)$$

como, por exemplo, a massa específica ou a temperatura.

As grandezas vetoriais são aquelas que ficam perfeitamente caracterizadas, em cada ponto, por um vetor, ou seja, que ficam perfeitamente caracterizadas em um sólido V por uma função vetorial de ponto

$$\bar{v} = \bar{v}(P)$$

como, por exemplo, a velocidade ou a aceleração.

O estado de tensão em um ponto P somente fica perfeitamente caracterizado pelo conhecimento de todas as tensões $\bar{\rho}$ que podem ser associadas aos infinitos planos α que passam pelo ponto, ou seja, o estado de tensão em um sólido somente fica caracterizado pelo conhecimento da função

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}(P, \alpha)$$

Esta grandeza, bastante mais complexa que as escalares e vetoriais, não é nem escalar nem vetorial. Historicamente, ela foi a primeira grandeza física a ser introduzida sem ser escalar nem vetorial. O ente matemático, posteriormente criado para representá-la, por esse motivo recebeu o nome de tensor. O tensor, em sua conceituação geral, engloba o escalar, o vetor, e outros mais complexos.

As grandezas físicas que não são escalares nem vetoriais, em face do que foi dito, recebem o nome de grandezas tensoriais. Elas existem hoje em grande número na Física, não apenas na

Mecânica dos Sólidos Deformáveis, onde apareceram pela primeira vez, mas principalmente na Teoria da Relatividade e em outras teorias da Física Moderna.

3) Tração ou Compressão Simples

Seja, na figura 1-4, uma barra homogênea e prismática, sujeita a um esforço de tração N (por exemplo, uma barra de treliça). A seção transversal (que é, por definição, perpendicular ao eixo da barra) pode ser uma figura plana qualquer, de área A .

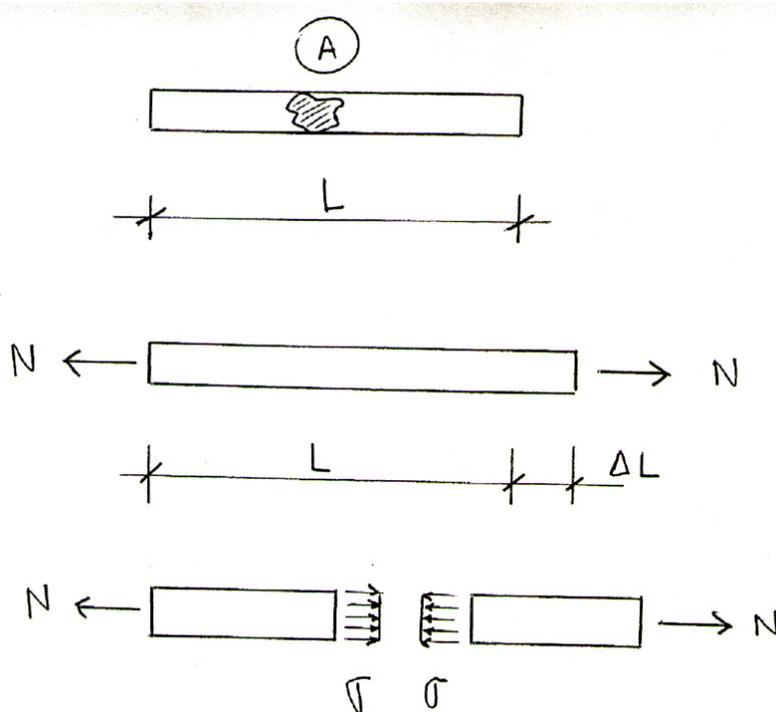


Figura 1 - 4

Se a força N estiver aplicada no centróide da seção, demonstra-se (v. anexo A) que a única tensão que aparece, no plano da seção transversal, é a tensão normal constante:

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A}} \quad (4)$$

A tensão normal é positiva se for de tração e negativa de compressão. A unidade de tensão, no S.I., é o Pascal (N/m^2). A tensão, como foi visto no item anterior, é um esforço interno e não deve ser confundida com pressão, que é um esforço externo.

Em outros planos, diferentes do plano da seção (planos inclinados em relação ao eixo), há também, além das tensões normais, tensões tangenciais. Mas, por enquanto, ficaremos restritos ao que acontece no plano da seção transversal.

A barra, que tinha um comprimento inicial L , se alonga e passa a ter um comprimento $L + \Delta L$. Define-se como *deformação longitudinal* da barra à grandeza

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}} \quad (5)$$

A deformação longitudinal é um número puro e sua ordem de grandeza é do milésimo, para os materiais estruturais mais comuns. O sinal da deformação é o mesmo da variação de comprimento ΔL : positivo se for alongamento e negativo no caso de encurtamento.

Para cada material pode-se levantar, experimentalmente, o diagrama tensão-deformação, com σ em ordenadas e ε em abscissas (figura 1-5). Para tensões baixas este diagrama é sensivelmente linear, para a maioria dos materiais. A constante E , dada pela relação

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon}} \quad (6)$$

é uma característica de cada material, e recebe o nome de *módulo de elasticidade longitudinal*, ou *módulo de Young*. A expressão (6) é conhecida como Lei de Hooke na tração ou compressão simples.

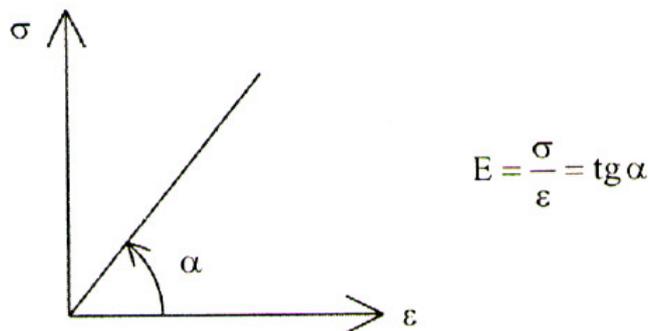


Figura 1 – 5

A unidade de E , no S.I., é o Pascal (N/m^2). O módulo de elasticidade é, geralmente, de valor elevado, em virtude da deformação ser um número pequeno. Alguns exemplos podem ser dados, como referencia:

Aço: $E = 2.100.000 \text{ kgf / cm}^2$

Alumínio: $E = 700.000 \text{ kgf / cm}^2$

Concreto: $E = 300.000 \text{ kgf / cm}^2$

Para o concreto, o valor de E depende fortemente da qualidade. O valor dado corresponde a um concreto com resistência ao redor de 400 kgf / cm^2 , usado na construção de pontes.

Levando o ensaio físico até as últimas conseqüências, nota-se que existem dois tipos básicos de materiais: os *dúcteis* e os *frágeis* (figura 1-6).

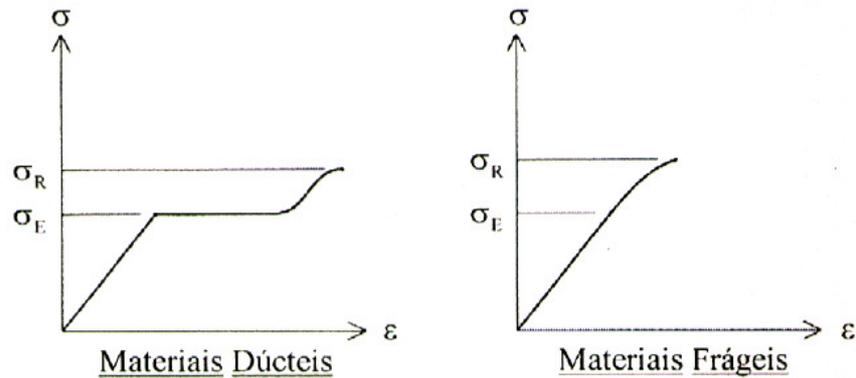


Figura 1 – 6

Os materiais dúcteis (que são os metais em geral, com exceção do ferro fundido, que é frágil) têm a mesma resistência à tração do que à compressão, e apresentam um nítido *patamar de escoamento*, em que as deformações crescem com a tensão praticamente constante. Chamam-se de σ_e a *tensão de escoamento* e de σ_R a *tensão de ruptura* (esta última representa o limite de resistência do material).

Os materiais frágeis, por sua vez, resistem à compressão muito mais do que à tração. No concreto, por exemplo, a resistência à compressão é cerca de 10 vezes maior do que a resistência à tração. Eles não apresentam um nítido patamar de escoamento, mas a partir de certo ponto o diagrama deixa de ser linear. A tensão que corresponde a esse ponto é chamada, por conveniência, de *tensão de escoamento* (σ_e) *convencional*.

No trecho linear, em que $\sigma < \sigma_e$, o material se diz *elástico linear*: as deformações são instantâneas, reversíveis, e $\sigma = E\epsilon$. Existe também o material *elástico não-linear* (figura 1-7), em que as deformações, apesar de imediatas e reversíveis, não são proporcionais às tensões (por exemplo, o concreto, para tensões baixas, apresenta um diagrama ligeiramente não-linear).

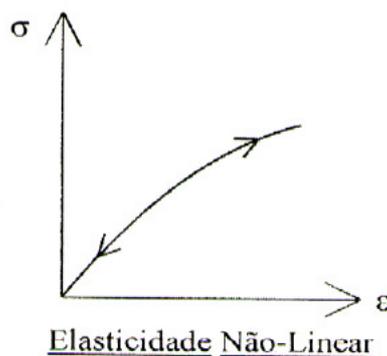


Figura 1 – 7

Portanto, elasticidade é sinônimo de deformações imediatas e reversíveis, e não de deformações lineares. Para além da tensão de escoamento, as deformações, apesar de instantâneas, não são recuperadas totalmente por ocasião do descarregamento (figura 1-8).

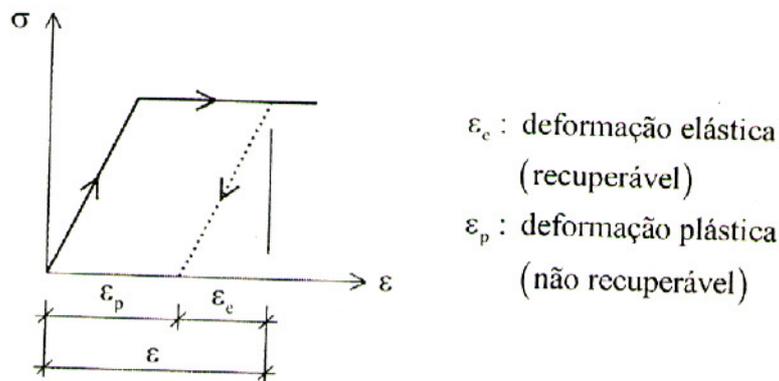


Figura 1 – 8

Na maior parte deste curso serão considerados apenas os materiais elásticos lineares, *homogêneos* e *isótopos*. Por definição, materiais homogêneos são aqueles em que as propriedades físicas são as mesmas, qualquer que seja o ponto considerado. Materiais isótopos, ou isotrópicos, por sua vez, são aqueles para os quais, num mesmo ponto, as propriedades físicas não dependem da direção que se considere. A madeira é um contra-exemplo, por ser um material anisótropo, ou anisotrópico (a madeira tem uma boa resistência à tração na direção das fibras e quase nenhuma na direção perpendicular a elas).

4) Cisalhamento simples

Neste item será descrito um outro estado simples de tensão, conhecido como *cisalhamento simples*. Tal estado ocorre quando em dois planos, perpendiculares entre si, não há tensões normais ($\sigma = 0$), apenas cisalhamento ($\tau \neq 0$). Demonstra-se (v. fascículo 9 – estado plano de tensão) que, em planos perpendiculares entre si, as tensões de cisalhamento são iguais em módulo, mas têm sentidos opostos.

O ensaio de *cisalhamento simples* era feito, antigamente, usando um corpo de prova com o formato de uma *pastilha*, sujeito a uma força cortante F (figura 1-9). A tensão de cisalhamento, supostamente constante no plano de ruptura, é dada por:

$$\tau = \frac{F}{A}$$

onde A é a área da superfície plana de corte. O problema com este ensaio é que, na prática, ele é muito difícil de ser realizado.

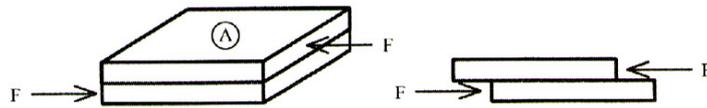


Figura 1 – 9

Atualmente se usa o ensaio de *torção pura*, onde um corpo de prova com o formato de um cilindro de parede fina, feito com o material a ser ensaiado, é submetido à torção (figura 1-10). Um elemento da parede lateral do corpo de prova fica sujeito a um estado de *cisalhamento simples* (os detalhes serão estudados no fascículo 3 – torção uniforme). A deformação de cisalhamento, correspondente à tensão τ , é a *distorção*, ou seja, o ângulo γ (medido em radianos).

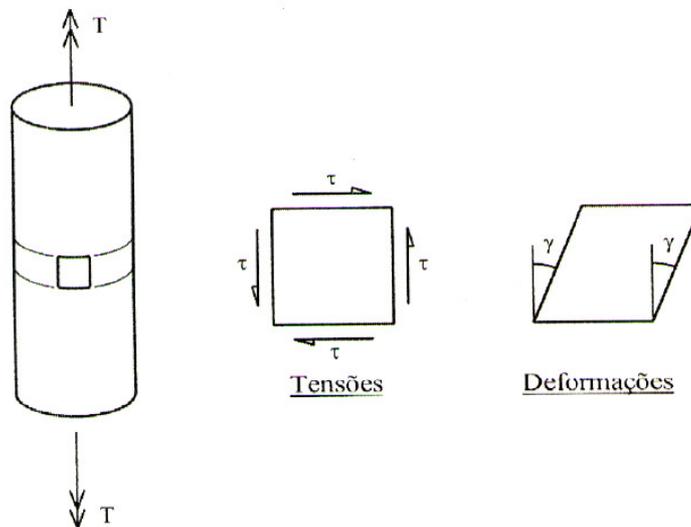


Figura 1 – 10

Aqui também há dois comportamentos básicos (materiais dúcteis e materiais frágeis), aos quais correspondem dois diagramas tensão-deformação ($\tau-\gamma$) que são em tudo semelhantes aos diagramas ($\sigma-\epsilon$) da figura 1-6.

A *Lei de Hooke* para o cisalhamento simples é, por analogia com a expressão (6):

$$\boxed{G = \frac{\tau}{\gamma}} \quad (7)$$

sendo G é o *módulo de elasticidade transversal* do material. Demonstra-se que existe a seguinte relação entre os parâmetros G e E :

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}} \quad (8)$$

onde ν é o *coeficiente de Poisson*, que controla as deformações transversais na tração ou compressão simples (assunto a ser estudado no item 7 a seguir).

Portanto, um material homogêneo e isótropo fica totalmente caracterizado por duas constantes *reológicas*, ou dois parâmetros (como se sabe, reologia é a ciência que estuda as relações entre as tensões e as deformações, para os diversos materiais).

5) Tensões admissíveis. Introdução da segurança

Quando há estados simples de tensão, a introdução da segurança fica muito facilitada, dispensando-se o uso dos *critérios de resistência*, que são necessários apenas quando há estados múltiplos de tensão.

Basta fazer com que as tensões atuantes na estrutura (tensões de serviço) não ultrapassem as *tensões admissíveis*, que são dadas pelas seguintes expressões:

$$\text{Tração: } \boxed{\bar{\sigma}_T = \frac{(\sigma_R)_T}{s}} \quad (9)$$

$$\text{Compressão: } \boxed{\bar{\sigma}_C = \frac{(\sigma_R)_C}{s}} \quad (10)$$

$$\text{Cisalhamento: } \boxed{\bar{\tau} = \frac{\tau_R}{s}} \quad (11)$$

Nas fórmulas acima, s é o *coeficiente de segurança* ($s > 1$). O coeficiente de segurança é tal que as tensões admissíveis são menores do que as respectivas tensões de escoamento, fazendo com que o material trabalhe sempre no regime elástico, para as cargas de serviço. Às vezes se considera a tensão de escoamento, em vez da tensão de ruptura, no cálculo das tensões admissíveis.

Na prática há dois tipos de cálculo, o de *dimensionamento* e o de *verificação*. Considere-se, para exemplificar, um caso de tração pura.

- a) Na **verificação** as dimensões são conhecidas (neste caso a área é conhecida), e procura-se um valor máximo admissível para a carga de serviço:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \bar{\sigma}_T \quad \Rightarrow \quad \boxed{N \leq A \bar{\sigma}_T}$$

- b) No **dimensionamento** o que se quer é a área:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \bar{\sigma}_T \quad \Rightarrow \quad \boxed{A \geq \frac{N}{\bar{\sigma}_T}}$$

Exemplo de aplicação (Prof. Victor de Souza Lima) Na ligação mostrada na figura 1-11, achar as dimensões c, d, s, e, a. São dadas as tensões admissíveis:

$$\bar{\sigma}_1 = 60 \text{ kgf/cm}^2 \text{ e } \bar{\tau}_1 = 15 \text{ kgf/cm}^2 \text{ (madeira)}$$

$$\bar{\sigma}_2 = 120 \text{ kgf/cm}^2 \text{ e } \bar{\tau}_2 = 75 \text{ kgf/cm}^2 \text{ (metal)}$$

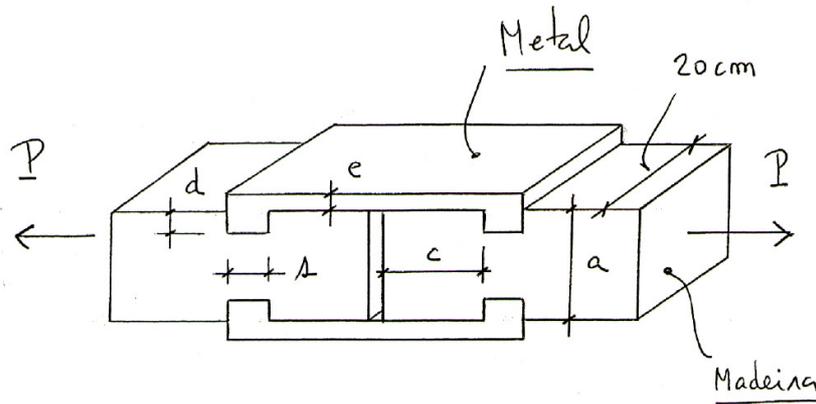


Figura 1 - 11 ($P = 12.000 \text{ kgf}$)

Resolução: Em problemas desse tipo é preciso imaginar qual seria, em cada caso, a *configuração de ruptura*, e impor o equilíbrio no *diagrama de corpo livre* associado.

Para achar c, supõe-se que a madeira pode romper por cisalhamento:

$$2(20c)15 = 12.000 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = 20 \text{ cm}}$$

Para achar d, supõe-se que a madeira pode romper por compressão:

$$2(20d)60 = 12.000 \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = 5 \text{ cm}}$$

Para achar s, supõe-se que o metal pode romper por cisalhamento:

$$2(20s)75 = 12.000 \quad \Rightarrow \quad \boxed{s = 4 \text{ cm}}$$

Para achar e, supõe-se que o metal pode romper por tração:

$$2(20e)120 = 12.000 \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = 2,5 \text{ cm}}$$

Para achar a, supõe-se que a madeira pode romper por tração:

$$20(a - 2d)60 = 12.000 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 20 \text{ cm}}$$

6) Cálculo da variação de comprimento da barra

Das expressões (5), (6) e (4) vem:

$$\Delta L = \varepsilon L = \frac{\sigma}{E} L \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta L = \frac{NL}{EA}} \quad (12)$$

Quando a força normal N e a área A são variáveis ao longo do eixo da barra, considera-se um elemento dx , que sofre um alongamento dL :

$$\boxed{\Delta L = \int dL = \int \frac{N dx}{EA} = \frac{1}{E} \int_0^L \frac{N}{A} dx} \quad (13)$$

Exemplo de aplicação

Na figura 1-12, sendo a barra BC infinitamente rígida (ou seja, indeformável), dimensionar, com segurança igual a 3, o fio (1), com a condição $v_B \leq 5 \text{ cm}$ (o deslocamento vertical do ponto B não pode ultrapassar 5 cm). São dados, para o fio, a tensão de ruptura à tração, o coeficiente de segurança, e o módulo de Young: $\sigma_R = 600 \text{ MPa}$, $s = 3$ e $E = 8 \text{ GPa}$

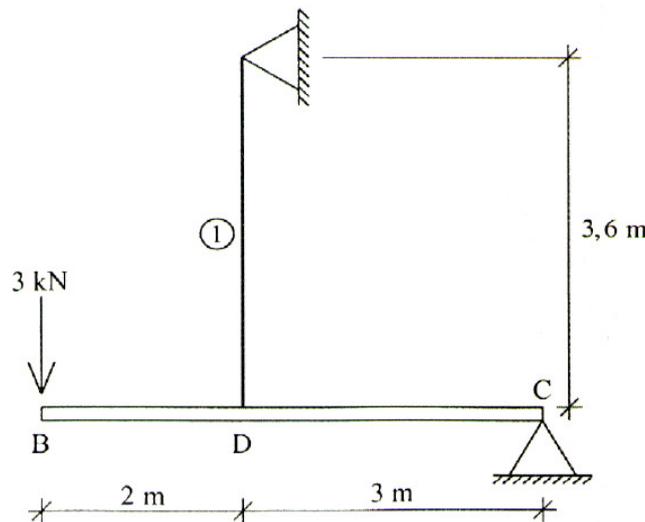


Figura 1 – 12

Resolução:

A tensão admissível vale: $\bar{\sigma}_T = \frac{\sigma_R}{s} = 200 \text{ MPa}$

Tomando momentos em relação ao apoio C, acha-se o valor da força no fio: $N = 5 \text{ kN}$.

A área necessária, pela condição de segurança, se obtém como:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \bar{\sigma}_T \quad \Rightarrow \quad A \geq \frac{N}{\bar{\sigma}_T} = \frac{5.000}{200(10)^6} = 0,25(10)^{-4} \text{ m}^2$$

Por considerações de economia de material, vamos usar o valor mínimo necessário:

$$A = 0,25(10)^{-4} \text{ m}^2$$

Resta verificar a condição de deformabilidade. O deslocamento vertical do ponto D é dado, aproximadamente, por:

$$v_D = (\Delta L)_{\text{fio}} = \frac{NL}{EA} = \frac{5.000(3,6)}{8(10)^9 (0,25)(10)^{-4}} = 0,09 \text{ m}$$

Portanto, o deslocamento do ponto B vale:

$$v_B = \frac{5}{3} v_D = 0,15 \text{ m} > 0,05 \text{ m}$$

A estrutura está muito flexível. É preciso enrijecê-la, aumentando a área do fio. A nova área se calcula como a área antiga multiplicada pelo fator de correção adequado:

$$A = 0,25(10)^{-4} \left(\frac{0,15}{0,05} \right) \Rightarrow \boxed{A = 0,75(10)^{-4} \text{ m}^2}$$

7) Deformação transversal na tração ou compressão simples. Coeficiente de Poisson

Quando uma barra está sujeita a uma força normal, ela sofre uma deformação transversal ϵ_t que é proporcional à deformação longitudinal ϵ , mas de sinal oposto (figura 1-13):

$$\boxed{\epsilon_t = -\nu \epsilon} \quad (14)$$

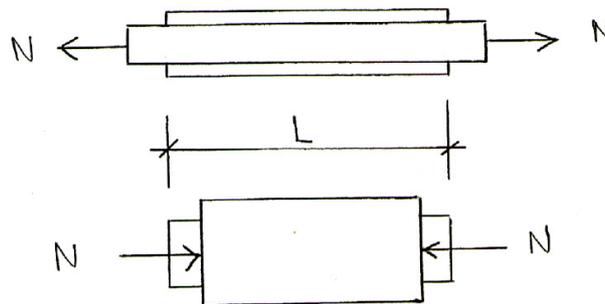


Figura 1 – 13

A constante de proporcionalidade ν é o *coeficiente de Poisson*, o qual é uma característica física do material. Conforme a figura 1-13, se a barra é tracionada, a sua seção diminui, e se a barra é comprimida, a seção aumenta.

O coeficiente de Poisson varia desde o valor zero (materiais que não apresentam deformação transversal, como a cortiça) até 0,5 (materiais incompressíveis, como a borracha e os solos saturados):

$$0 \leq \nu \leq 0,5$$

Para o aço tem-se $\nu = 0,3$, e para o concreto, $\nu = 0,15$. Como já foi visto, os parâmetros E e ν definem completamente um material elástico linear, homogêneo e isótropo.

8) Lei de Hooke generalizada

Consideremos um elemento de volume sujeito a um estado tripla de tensão, de conformidade com a figura 1-14. Combinando a expressão (6) com o efeito de Poisson, obtemos a *Lei de Hooke generalizada*:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] \tag{15}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

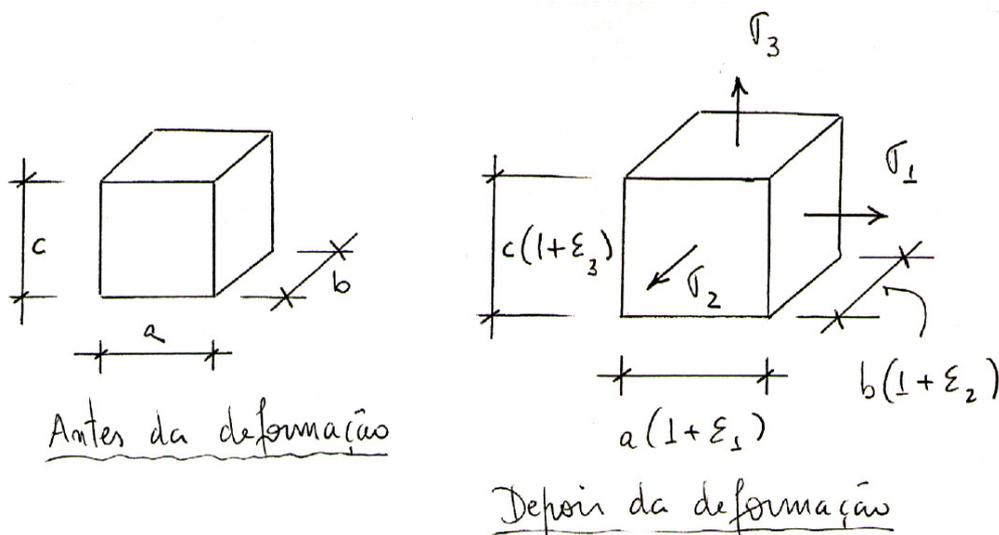


Figura 1 – 14

Exemplo de aplicação

Seja, na figura 1-15, um tubo de parede fina, fechado nas extremidades e submetido à pressão interna (*vaso de pressão*). Calcular o aumento do comprimento (ΔL), o aumento do diâmetro (Δd), e a diminuição da espessura (Δe).

São dados: $p = 20 \text{ kgf/cm}^2$ (pressão interna)
 $d = 2 \text{ m}$ (diâmetro médio)
 $e = 4 \text{ mm}$ (espessura da parede)
 $L = 6 \text{ m}$ (comprimento)
 $E = 2,5(10)^6 \text{ kgf/cm}^2$ (módulo de elasticidade longitudinal)
 $\nu = 0,3$ (coeficiente de Poisson)

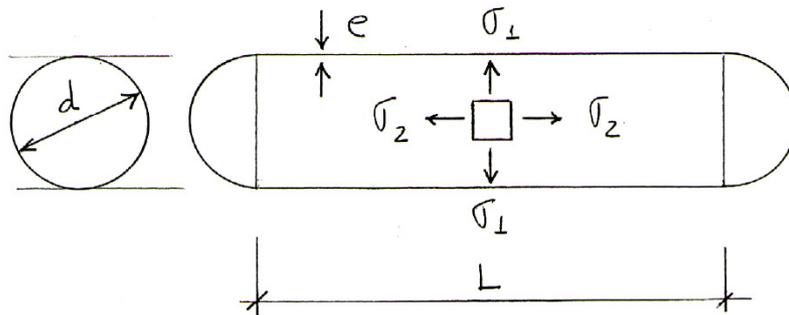


Figura 1 – 15

Resolução: As tensões que atuam num elemento da parede do tubo são (figura 1-15):

$$\sigma_1 = \frac{p(Ld)}{2(Le)} = \frac{pd}{2e} = \frac{20(200)}{2(0,4)} \Rightarrow \boxed{\sigma_1 = 5.000 \text{ kgf/cm}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{p(0,25 \pi d^2)}{\pi de} = \frac{pd}{4e} = \frac{\sigma_1}{2} \Rightarrow \boxed{\sigma_2 = 2.500 \text{ kgf/cm}^2}$$

A tensão σ_3 vale zero na superfície externa e $-p$ na interna. Como p é pequeno face a σ_1 e σ_2 , faremos:

$$\boxed{\sigma_3 \cong 0}$$

Pela Lei de Hooke generalizada, temos as deformações:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \Rightarrow \boxed{\epsilon_1 = 1,7(10)^{-3}} \quad (= 1,7 \text{ ‰})$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] \Rightarrow \boxed{\epsilon_2 = 0,4 (10)^{-3}} \quad (= 0,4 \text{ ‰})$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \Rightarrow \boxed{\epsilon_3 = -0,9(10)^{-3}} \quad (= -0,9 \text{ ‰})$$

Portanto:

$$\Delta L = \varepsilon_2 (L) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta L = 2,4(10)^{-3} \text{ m}} \quad (= 2,4 \text{ mm})$$

$$\Delta d = \varepsilon_1 (d) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta d = 3,4(10)^{-3} \text{ m}} \quad (= 3,4 \text{ mm})$$

$$\Delta e = \varepsilon_3 (e) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta e = -0,0036 (10)^{-3} \text{ m}} \quad (= -0,0036 \text{ mm})$$

9) Deformação volumétrica

Considerando a figura 1-14, chama-se de *deformação volumétrica* à variação de volume do elemento por unidade de volume:

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = \frac{a(1+\varepsilon_1)b(1+\varepsilon_2)c(1+\varepsilon_3) - abc}{abc} = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) - 1$$

Desprezando os infinitésimos de ordem superior, ficamos com:

$$\boxed{\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3} \quad (16)$$

Introduzindo (15) em (16), obtém-se:

$$\boxed{\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)} \quad (17)$$

Quando $\nu = 0,5$ temos $\varepsilon_v = 0$ (materiais *incompressíveis*: a borracha, por exemplo)

No caso particular em que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$ (estado hidrostático de tensão), a expressão (17) assume a forma:

$$\boxed{\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = \frac{3(1-2\nu)}{E} p} \quad (18)$$

Neste caso podemos definir uma grandeza K, análoga aos módulos E e G, e de mesma dimensão (Pascal no S.I.), chamada *módulo de elasticidade volumétrica*, que é uma propriedade do material:

$$\boxed{K = \frac{p}{\varepsilon_v} = \frac{E}{3(1-2\nu)}} \quad (19)$$

Como $K > 0$, percebe-se que o coeficiente de Poisson não pode ser maior do que meio. Para o caso limite em que $\nu = 0,5$ (materiais incompressíveis) temos $K \rightarrow \infty$

Caso particular: tração ou compressão simples

No caso particular de uma barra em tração ou compressão puras, todos os pontos estão sujeitos a um estado simples de tensão, dado por:

$$\boxed{\sigma_1 = \sigma = \frac{N}{A}} \quad \text{e} \quad \boxed{\sigma_2 = \sigma_3 = 0}$$

Assim, a expressão (17) fica:

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E} \sigma \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_v = \varepsilon (1-2\nu)} \quad (20)$$

Quando $\nu = 0$, como na cortiça, $\varepsilon_v = \varepsilon$ (ou seja, a seção transversal não se deforma).

Quando o material é incompressível ($\nu = 0,5$), como na borracha, $\varepsilon_v = 0$.

Exemplo de aplicação:

Na figura 1-16 se representa um paralelepípedo de um material parcialmente confinado. Desprezando o atrito entre o material e o recipiente, achar:

- a) σ_1, σ_2 e σ_3
- b) Δc
- c) Δb

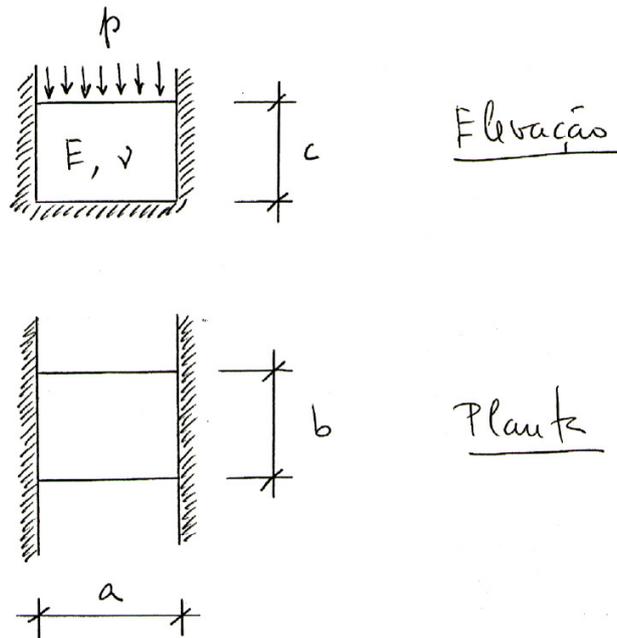


Figura 1 - 16

Resolução:

a) Na figura 1-17 mostram-se as tensões atuantes. É claro que:

$$\boxed{\sigma_2 = 0} \quad \text{e} \quad \boxed{\sigma_3 = -p}$$

Para encontrar σ_1 , impõe-se que $\epsilon_1 = 0$:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = 0 \Rightarrow \sigma_1 = \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \Rightarrow \boxed{\sigma_1 = -\nu p}$$

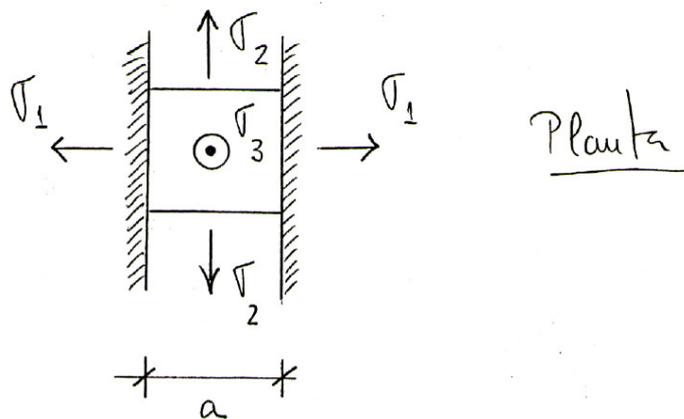


Figura 1 - 17

b) $\Delta c = c(\epsilon_3) = c \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] = c \frac{1}{E} [-p - \nu(-\nu p + 0)]$

$$\Delta c = -\left(\frac{1-\nu^2}{E}\right) p c$$

c) $\Delta b = b (\epsilon_2) = b \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] = b \frac{1}{E} [0 - \nu(-\nu p - p)]$

$$\Delta b = \frac{\nu(1+\nu)}{E} p b$$

Se não houvesse o confinamento seria:

$$\Delta b = \frac{\nu}{E} p b$$

10) Sistemas com barras rígidas e tirantes flexíveis

Mostraremos, neste último item, dois exemplos de dimensionamento com controle de deformações, o primeiro isostático e o segundo hiperestático. Estes exemplos envolvem sistemas com barras rígidas submetidas à flexão, e barras flexíveis sujeitas à força normal (chamadas de *tirantes* ou *escoras*, conforme a força normal seja de tração ou de compressão, respectivamente).

1º exemplo)

Na figura 1-18 a barra BCD é rígida, por hipótese ($E = \infty$). Achar a área **A** do tirante (1) de modo que o deslocamento vertical do ponto B não ultrapasse um valor dado ($v_B \leq 4$ cm).

São dados, para o material dúctil que compõe o tirante:

$$\bar{\sigma}_T = \bar{\sigma}_C = \bar{\sigma} = 10 \text{ MPa} \quad \text{e} \quad E = 10^3 \text{ MPa} .$$

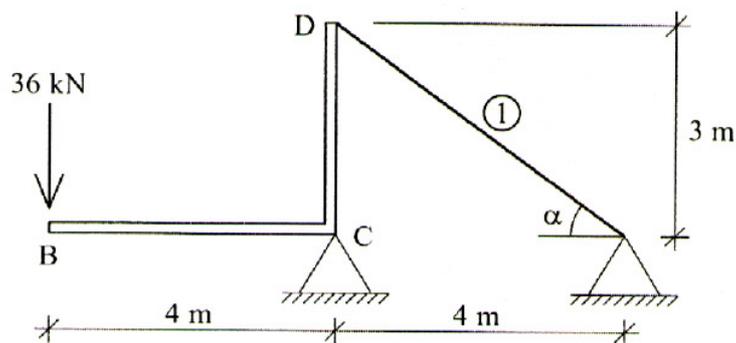


Figura 1 - 18

Resolução:

Como a estrutura é isostática, a força no tirante pode ser achada simplesmente aplicando as condições de equilíbrio. O equilíbrio de momentos em relação ao apoio C fornece (N é a força no tirante):

$$(N \cos \alpha) 3 = (36) 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = 60 \text{ kN}}$$

Para dimensionar, inicialmente impõe-se a condição de segurança:

$$A = \frac{N}{\bar{\sigma}} = \frac{60.000}{10^7} = 60(10)^{-4} \text{ m}^2$$

A seguir, verifica-se a condição de deformabilidade, usando para a área o valor acima calculado. O alongamento do tirante é dado pela lei de Hooke:

$$\Delta L = \frac{N L}{E A} = \frac{60.000 (5)}{10^9 (60) 10^{-4}} = 0,05 \text{ m}$$

O deslocamento horizontal de D é dado pela relação *deformação-deslocamento* (figura 1-19):

$$h_D = \frac{\Delta L}{\cos \alpha} \quad \Rightarrow \quad h_D = \frac{0,05}{0,8} = 0,0625 \text{ m}$$

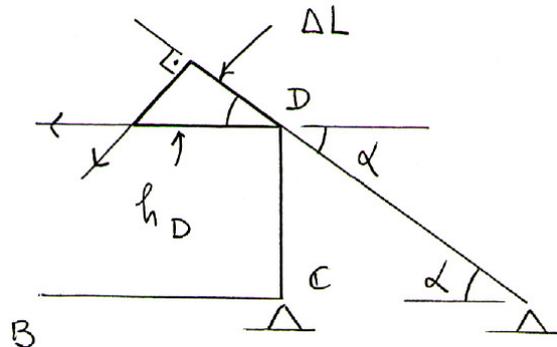


Figura 1 – 19

O deslocamento vertical do ponto B pode agora ser calculado:

$$v_B = \frac{4}{3} h_D = 0,0833... \text{ m}$$

O valor obtido é maior do que o valor máximo permissível, que é de quatro centímetros. Portanto é preciso enrijecer o tirante, aumentando a área. O novo (e definitivo) valor da área pode ser calculado simplesmente corrigindo o valor inicial por meio de um fator adequado:

$$A = \left(\frac{0,0833...}{0,04} \right) 60(10^{-4}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 125(10)^{-4} \text{ m}^2}$$

2º exemplo)

A barra BCD, que aparece na figura 1-20, é rígida ($E = \infty$). Achar a área A dos fios (1) e (2), de modo que $v_B \leq 3,75$ cm. Para os fios são dados: $\bar{\sigma} = 15$ MPa e $E = 5$ GPa.

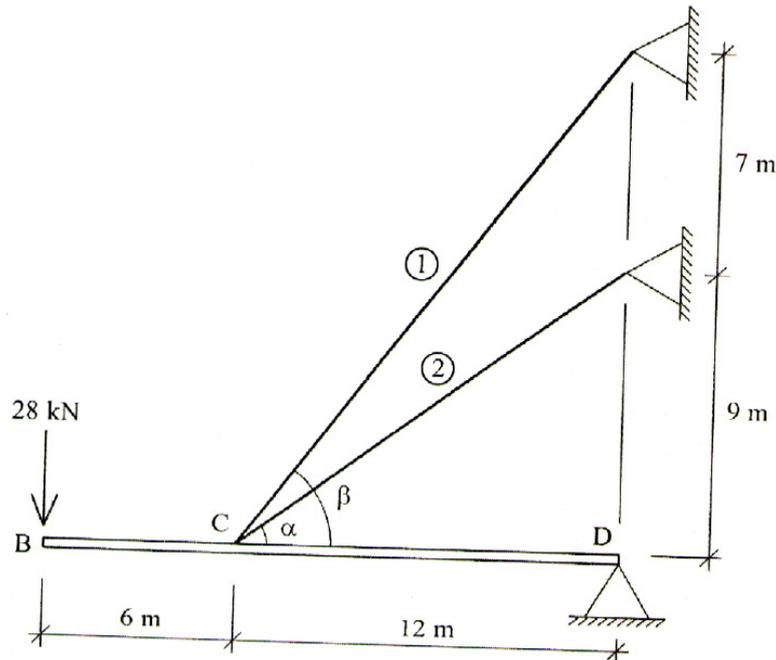


Figura 1 – 20

Resolução:

a) Equilíbrio:

A somatória dos momentos, em relação ao apoio D, é escrita como:

$$(28)18 = (N_1 \text{ sen}\beta)12 + (N_2 \text{ sen}\alpha)12 \Rightarrow 42 = 0,8 N_1 + 0,6 N_2$$

$$\boxed{210 = 4 N_1 + 3 N_2} \quad (21)$$

A equação (21) é a única equação de equilíbrio que envolve apenas as forças nos fios. Como há duas incógnitas, o problema é hiperestático. O grau de hiperestaticidade da estrutura vale, portanto, $g = 1$ (o grau de hiperestaticidade é a diferença entre o número de incógnitas e o número de equações de equilíbrio).

Para resolver um problema hiperestático, são necessárias, além das condições de equilíbrio, as equações de compatibilidade (que refletem a geometria das deformações) e as equações constitutivas (neste caso, a lei de Hooke).

b) Compatibilidade

A figura 1-21 mostra o sistema em sua geometria original (indeformada) e a posição final do nó C, que sofre um deslocamento v_C (que pode ser considerado vertical, dada a pequenez do ângulo de rotação da barra BCD).

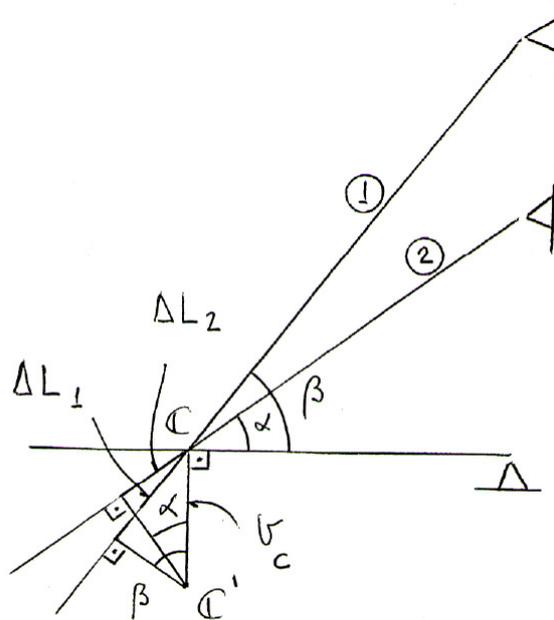


Figura 1 – 21

Para obtermos a variação de comprimento dos tirantes (1) e (2), **projetamos a posição final do nó na direção inicial de cada tirante**. Assim, podemos inicialmente escrever as chamadas *relações deformação-deslocamento*:

$$\begin{cases} \Delta L_1 = v_C \operatorname{sen} \beta \\ \Delta L_2 = v_C \operatorname{sen} \alpha \end{cases} \quad (22)$$

das quais é possível, eliminando o deslocamento do ponto C, obter a equação de compatibilidade (que relaciona as variações de comprimento dos tirantes):

$$v_C = \frac{\Delta L_1}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\Delta L_2}{\operatorname{sen} \alpha} \Rightarrow \frac{\Delta L_1}{0,8} = \frac{\Delta L_2}{0,6} \Rightarrow \boxed{3\Delta L_1 = 4\Delta L_2} \quad (23)$$

c) Lei de Hooke

$$\boxed{\Delta L_1 = \frac{N_1 (20)}{EA}} \quad \boxed{\Delta L_2 = \frac{N_2 (15)}{EA}} \quad (24)$$

Para resolver o sistema de equações obtido, primeiro introduz-se (24) em (23). O resultado é:

$$\boxed{N_1 = N_2} \quad (25)$$

A equação (25) parece ser uma equação de equilíbrio, mas é a equação de compatibilidade em função das forças nos tirantes. Finalmente, as equações (21) e (25) resolvem a estrutura:

$$\boxed{N_1 = N_2 = 30 \text{ kN}}$$

É interessante observar que as forças nos tirantes dependem das suas áreas, ou mais especificamente, da relação entre essas áreas. O resultado encontrado ($N_1 = N_2 = 30 \text{ kN}$) seria outro se as áreas não fossem iguais entre si. O fato da resolução da estrutura depender da geometria dos seus elementos é uma característica dos problemas hiperestáticos. O mesmo não acontece com os problemas isostáticos, cuja resolução só depende do equilíbrio.

Agora vem a segunda fase. Uma vez resolvida a estrutura, passamos ao *dimensionamento*. Pelo critério de segurança, a área A vale:

$$A = \frac{N}{\bar{\sigma}} = \frac{30.000}{15(10)^6} = 20(10)^{-4} \text{ m}^2$$

(se as forças nos tirantes fossem diferentes entre si, faríamos o cálculo da área A usando, naturalmente, a maior dentre elas).

Para finalizar o dimensionamento, resta apenas verificar a condição de deformabilidade. Escolhendo, por exemplo, o fio de número (1), podemos escrever, usando a área acima calculada:

$$\Delta L_1 = \frac{30.000(20)}{5(10)^9 20(10)^{-4}} = 0,06 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad v_C = \frac{\Delta L_1}{\text{sen } \beta} = \frac{0,06}{0,8} = 0,075 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \quad v_B = \frac{18}{12} v_C = 0,1125 \text{ m} > 0,0375 \text{ m}$$

Portanto, o deslocamento do ponto B excede o valor máximo admissível. É preciso aumentar a área dos tirantes. A nova área vale:

$$A = \left(\frac{0,1125}{0,0375} \right) 20(10^{-4}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 60 (10)^{-4} \text{ m}^2}$$

ANEXO A

Na figura 1-22 considere-se que a seção mostrada, de área A , está sujeita a uma tensão normal **constante** σ (de tração), gerada por uma força N aplicada num certo ponto C .

Será demonstrado que, nessas condições, o ponto C coincide com o centróide G da seção. O sistema de referencia (O, α, β) é um sistema auxiliar envolvido na demonstração.

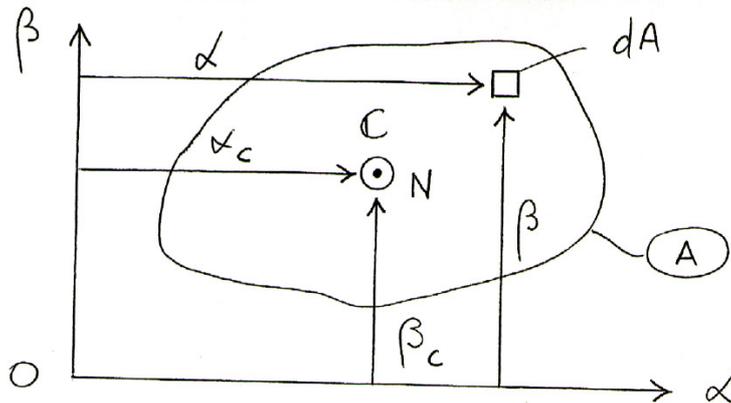


Figura 1 - 22

dem.: basta impor a equivalência estática entre a força N e as tensões σ .

a) *Igualdade de resultantes*

$$N = \int_A \sigma dA = \sigma \int_A dA = \sigma A \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma = \frac{N}{A}}$$

b) *Igualdade de momentos em relação ao eixo $O\alpha$*

$$N \beta_c = \int_A \beta (\sigma dA) = \sigma \int_A \beta dA = \frac{N}{A} \int_A \beta dA = N \left(\frac{\int_A \beta dA}{\int_A dA} \right) = N \beta_G \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta_c = \beta_G}$$

(c.q.d.)

c) *Igualdade de momentos em relação ao eixo $O\beta$*

$$-N \alpha_c = -\int_A \alpha (\sigma dA) = -\sigma \int_A \alpha dA = -\frac{N}{A} \int_A \alpha dA = -N \left(\frac{\int_A \alpha dA}{\int_A dA} \right) = -N \alpha_G$$

donde:

$$\boxed{\alpha_c = \alpha_G}$$

(c.q.d.)

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESCOLA POLITÉCNICA

Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica

CURSO BÁSICO DE

RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

FASCÍCULO Nº 2

Figuras planas

H. Britto

2.010

FIGURAS PLANAS

1) Definições

De acordo com a figura 2-1, podemos definir as seguintes características geométricas das figuras:

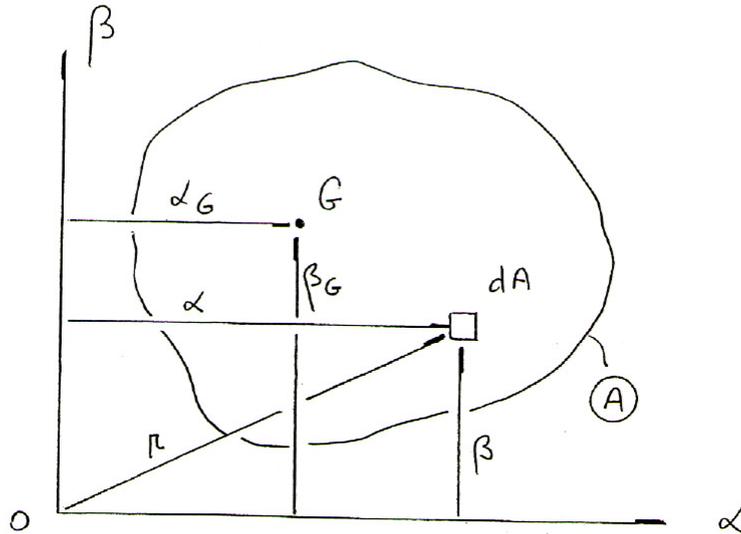


Figura 2 - 1

a) Momentos estáticos

$$\begin{cases} Q_\alpha = \int_A \beta dA \\ Q_\beta = \int_A \alpha dA \end{cases} \quad \text{Unidade de momento estático: (comprimento)}^3$$

Temos que: $\begin{cases} Q_\alpha = A \beta_G \\ Q_\beta = A \alpha_G \end{cases}$ pois, por definição: $\begin{cases} \alpha_G = \frac{\int_A \alpha dA}{\int_A dA} = \frac{Q_\beta}{A} \\ \beta_G = \frac{\int_A \beta dA}{\int_A dA} = \frac{Q_\alpha}{A} \end{cases}$

Conseqüências: $\begin{cases} \text{Se } \alpha_G = 0 \Rightarrow Q_\beta = 0 \\ \text{Se } \beta_G = 0 \Rightarrow Q_\alpha = 0 \end{cases}$

Ou seja, se um eixo passa pelo centróide G da figura, o momento estático da figura em relação a esse eixo é nulo (em Mecânica se diz que a figura está *estaticamente balanceada* em relação a esse eixo).

b) Momentos de inércia

$$\begin{cases} I_{\alpha} = \int_A \beta^2 dA \\ I_{\beta} = \int_A \alpha^2 dA \end{cases} \quad \text{Unidade: (comprimento)}^4$$

c) Momento centrífugo $I_{\alpha\beta} = \int_A \alpha\beta dA$ Unidade: (comprimento)⁴

d) Momento polar $I_O = \int_A r^2 dA$ Unidade: (comprimento)⁴

e) Raios de giração

$$\begin{cases} i_{\alpha} = \sqrt{\frac{I_{\alpha}}{A}} \\ i_{\beta} = \sqrt{\frac{I_{\beta}}{A}} \end{cases} \quad \text{Unidade: (comprimento)}$$

Por conseqüência: $\begin{cases} I_{\alpha} = A i_{\alpha}^2 \\ I_{\beta} = A i_{\beta}^2 \end{cases}$

Vale também para momento polar: $i_o = \sqrt{\frac{I_o}{A}} \Rightarrow I_o = A i_o^2$

Observações:

- 1ª) O momento estático é conhecido como momento de primeira ordem, e os momentos de inércia, centrífugo e polar são os momentos de segunda ordem.
- 2ª) O momento polar é, na verdade, o momento de inércia em relação ao eixo que passa por O e é perpendicular ao plano da figura.
- 3ª) Os momentos de inércia e o momento polar são sempre positivos, enquanto que os momentos estáticos e o momento centrífugo podem ser positivos, negativos ou nulos. Em Mecânica o momento centrífugo é conhecido como *produto de inércia*.

4ª) O momento polar é a soma dos momentos de inércia:

$$I_O = \int_A r^2 dA = \int_A (\beta^2 + \alpha^2) dA = I_\alpha + I_\beta$$

A relação entre os correspondentes raios de giração é a seguinte:

$$\frac{I_O}{A} = \frac{I_\alpha + I_\beta}{A} \Rightarrow i_O^2 = i_\alpha^2 + i_\beta^2$$

2) Translação de eixos

De acordo com a figura 2-2, temos para a translação de eixos a seguinte transformação de coordenadas:

$$\begin{cases} \alpha = y + \alpha_G \\ \beta = z + \beta_G \end{cases}$$

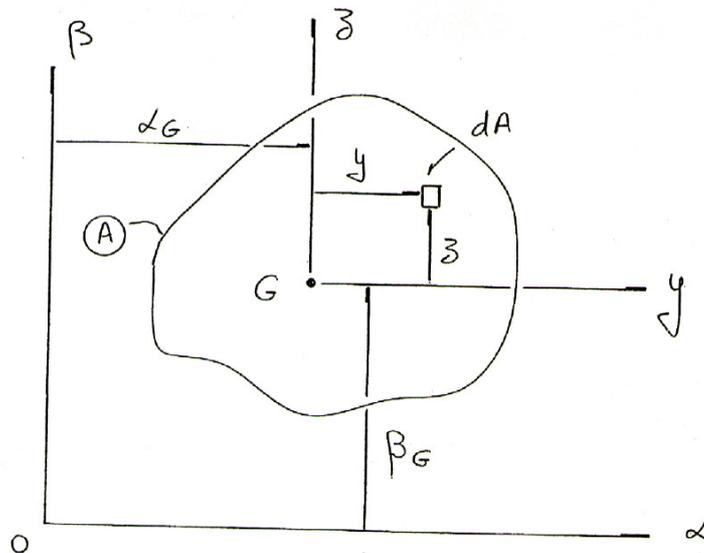


Figura 2 - 2

$$I_\alpha = \int_A \beta^2 dA = \int_A z^2 dA + \beta_G^2 \int_A dA + 2\beta_G \int_A z dA = I_y + A\beta_G^2 + 2\beta_G Q_y$$

Mas o momento estático Q_y é nulo, já que o eixo y é um eixo central. Logo:

$$\boxed{I_\alpha = I_y + A\beta_G^2} \quad (a)$$

Analogamente:

$$\boxed{I_{\beta} = I_z + A \alpha_G^2} \quad (b)$$

$$I_{\alpha\beta} = \int_A \alpha\beta dA = \int_A yz dA + \beta_G \int_A y dA + \alpha_G \int_A z dA + \alpha_G \beta_G \int_A dA = I_{yz} + \beta_G Q_z + \alpha_G Q_y + A \alpha_G \beta_G$$

Sendo nulos os momentos estáticos, fica:

$$\boxed{I_{\alpha\beta} = I_{yz} + A \alpha_G \beta_G} \quad (c)$$

As expressões (a), (b) e (c) constituem o *Teorema de Steiner*, ou *Teorema dos Eixos Paralelos*. O exame delas mostra que, dentre todos os eixos paralelos a uma dada direção, o que apresenta momento de inércia mínimo é o que passa pelo centróide da figura. O mesmo não se pode dizer, evidentemente, com relação ao momento centrífugo.

Observação: O Teorema vale também para o momento polar. Somando-se membro a membro as expressões (a) e (b) acima, obtém-se, de imediato:

$$\boxed{I_O = I_G + A d^2} \quad \text{sendo } d \text{ a distância de } O \text{ até } G \quad (d)$$

3) Rotação de eixos

Para a rotação de eixos mostrada na figura 2-3, a transformação de coordenadas é a seguinte:

$$\begin{cases} u = \alpha \cos \theta + \beta \operatorname{sen} \theta \\ v = \beta \cos \theta - \alpha \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

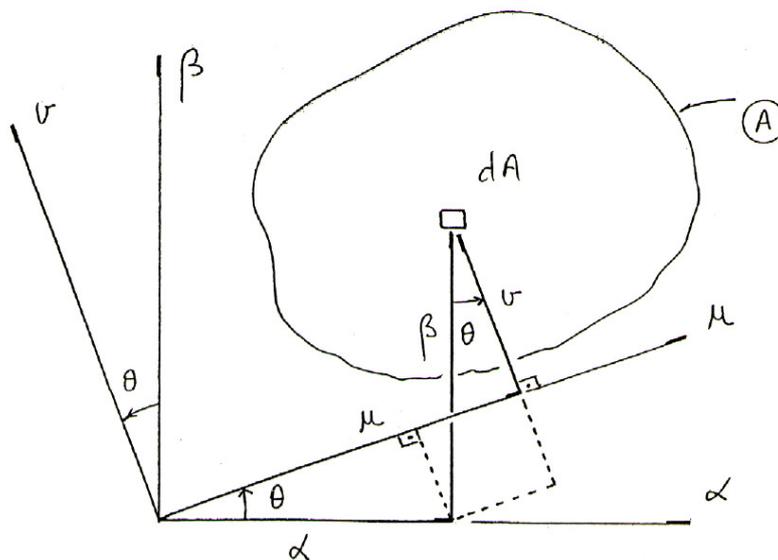


Figura 2 - 3

$$I_u = \int_A v^2 dA = \cos^2 \theta \int_A \beta^2 dA + \sin^2 \theta \int_A \alpha^2 dA - 2 \sin \theta \cos \theta \int_A \alpha \beta dA$$

$$\Rightarrow \boxed{I_u = I_\alpha \cos^2 \theta + I_\beta \sin^2 \theta - 2 I_{\alpha\beta} \sin \theta \cos \theta}$$

Para achar I_v basta fazer $I_v = I_u \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)$, obtendo:

$$I_v = I_\alpha \sin^2 \theta + I_\beta \cos^2 \theta + 2 I_{\alpha\beta} \sin \theta \cos \theta \quad (\text{note-se que: } I_u + I_v = I_\alpha + I_\beta)$$

Analogamente:

$$I_{uv} = \int_A uv dA = \sin \theta \cos \theta \int_A (\beta^2 - \alpha^2) dA + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \int_A \alpha \beta dA$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{uv} = (I_\alpha - I_\beta) \sin \theta \cos \theta + I_{\alpha\beta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}$$

É possível transformar as expressões de I_u e I_{uv} . Sendo:

$$\begin{cases} 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta \\ 2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta \\ 2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta \end{cases}$$

vêm, respectivamente:

$$\boxed{I_u = \frac{I_\alpha + I_\beta}{2} + \frac{I_\alpha - I_\beta}{2} \cos 2\theta - I_{\alpha\beta} \sin 2\theta}$$

$$\boxed{I_{uv} = \frac{I_\alpha - I_\beta}{2} \sin 2\theta + I_{\alpha\beta} \cos 2\theta}$$

Quando θ varia de 0 a π , I_u também varia, passando por um máximo e por um mínimo. Nas aplicações é importante conhecer os valores extremos do momento de inércia. Isso pode ser feito, ou igualando a zero a derivada de I_u em relação a θ , ou então, valendo-se das propriedades de um certo binômio, que serão apresentadas no próximo item.

4) Variação dos binômios $A \sin \varphi + B \cos \varphi$ (Prof. Telêmaco Van Langendonck)

Sejam A e B constantes e φ variável. Pode-se escrever:

$$A \sin \varphi + B \cos \varphi = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\varphi - \omega)$$

onde ω é definido pelas condições: $\text{sen}\omega = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ e $\text{cos}\omega = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Substituindo $A = \sqrt{A^2 + B^2} \text{sen}\omega$ e $B = \sqrt{A^2 + B^2} \text{cos}\omega$ no primeiro membro da expressão do binômio, demonstra-se a validade da mesma.

Quando φ varia, os valores do binômio também variam, e os valores extremos acontecem para $\text{cos}(\varphi - \omega) = \pm 1$:

$$\begin{cases} \varphi_1 - \omega = 0 \rightarrow \text{valor máximo} \quad (= \sqrt{A^2 + B^2}) \\ \varphi_2 - \omega = \pi \rightarrow \text{valor mínimo} \quad (= -\sqrt{A^2 + B^2}) \end{cases}$$

ou ainda: $\varphi = \text{arc tg} \frac{A}{B}$

que fornece os dois valores de φ , defasados de π .

Ao valor máximo $\sqrt{A^2 + B^2}$ corresponde:

$$\varphi_1 = \omega \Rightarrow \text{tg} \frac{\varphi_1}{2} = \text{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1 - \text{cos}\omega}{\text{sen}\omega} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2} - B}{A}$$

Ao valor mínimo $-\sqrt{A^2 + B^2}$ corresponde:

$$\varphi_2 = \omega + \pi \Rightarrow \text{tg} \frac{\varphi_2}{2} = \text{tg} \frac{\omega + \pi}{2} = -\text{cot g} \frac{\omega}{2} = \frac{-1 - \text{cos}\omega}{\text{sen}\omega} = \frac{-\sqrt{A^2 + B^2} - B}{A}$$

5) Momentos principais de inércia e eixos principais de inércia

Voltando ao item 3, lá foi visto que:

$$I_u = \frac{I_\alpha + I_\beta}{2} + \frac{I_\alpha - I_\beta}{2} \text{cos} 2\theta - I_{\alpha\beta} \text{sen} 2\theta$$

$$\text{Fazendo-se:} \quad \begin{cases} \varphi = 2\theta \\ A = -I_{\alpha\beta} \\ B = 0,5(I_\alpha - I_\beta) \end{cases}$$

o momento de inércia fica:

$$I_u = \text{cte.} + B \cos \varphi + A \sin \varphi$$

e, de acordo com o item 4, os valores extremos de I_u são dados por $\text{cte.} \pm \sqrt{A^2 + B^2}$:

$$I_1 = \frac{I_\alpha + I_\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_\alpha - I_\beta}{2}\right)^2 + I_{\alpha\beta}^2}$$

$$I_2 = \frac{I_\alpha + I_\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_\alpha - I_\beta}{2}\right)^2 + I_{\alpha\beta}^2}$$

I_1 e I_2 são os momentos principais de inércia em relação ao ponto O, sendo I_1 o maior e I_2 o menor, por convenção.

As direções dos eixos principais de inércia $O1$ e $O2$ são dadas por:

$$\text{tg}\theta_1 = \frac{\sqrt{A^2 + B^2} - B}{A} \quad \text{e} \quad \text{tg}\theta_2 = \frac{-\sqrt{A^2 + B^2} - B}{A}$$

$$\text{Sendo, porém:} \begin{cases} \sqrt{A^2 + B^2} = I_1 - 0,5(I_\alpha + I_\beta) \\ -\sqrt{A^2 + B^2} = I_2 - 0,5(I_\alpha + I_\beta) \end{cases}$$

vêm:

$$\text{tg}\theta_1 = \frac{I_\alpha - I_1}{I_{\alpha\beta}}$$

$$\text{tg}\theta_2 = \frac{I_\alpha - I_2}{I_{\alpha\beta}}$$

Em relação ao eixo $O1$ o momento de inércia é I_1 , e em relação ao eixo $O2$ o momento de inércia é I_2 .

Finalmente, no item 3 foi visto também que:

$$I_{uv} = \frac{I_\alpha - I_\beta}{2} \sin 2\theta + I_{\alpha\beta} \cos 2\theta = \cos 2\theta \left[\left(\frac{I_\alpha - I_\beta}{2}\right) \text{tg} 2\theta + I_{\alpha\beta} \right]$$

$$\text{Sendo, para os eixos principais, } \text{tg} 2\theta = \frac{2I_{\alpha\beta}}{I_\beta - I_\alpha}, \text{ vem:} \quad \boxed{I_{12} = 0}$$

Note-se que os eixos principais são perpendiculares entre si, já que os ângulos $2\theta_1$ e $2\theta_2$ estão defasados de π (pois eles têm a mesma tangente trigonométrica).

6) Observações

1ª) Os eixos principais, relativos ao ponto $O \equiv G$, chamam-se eixos centrais principais

de inércia. Em Mecânica se diz que a figura está *dinamicamente balanceada* em relação aos eixos centrais principais ($I_{12} = 0$).

2ª) As expressões que fornecem I_1 e I_2 , somadas, dão:

$$I_\alpha + I_\beta = I_1 + I_2 = \text{cte.} \quad (= I_u + I_v = I_O)$$

Multiplicadas, originam:

$$I_\alpha I_\beta - I_{\alpha\beta}^2 = I_1 I_2 = \text{cte.}$$

3ª) Se os eixos de referência forem $O1$ e $O2$, as expressões de I_u e I_{uv} se simplificam:

$$\begin{cases} I_u = \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2} \cos 2\theta \\ I_{uv} = \frac{I_1 - I_2}{2} \sin 2\theta \end{cases}$$

Portanto, se $I_1 = I_2 \Rightarrow I_u = I_1 = I_2$ e $I_{uv} = 0$.

Ou seja, qualquer eixo que passe por O será principal de inércia, e o ponto O é chamado de *ponto principal* da figura. Por exemplo: círculo, quadrado, etc.. (quando $O \equiv G$).

Quando O não coincide com G , apresentam-se dois exemplos na figura 2-4.

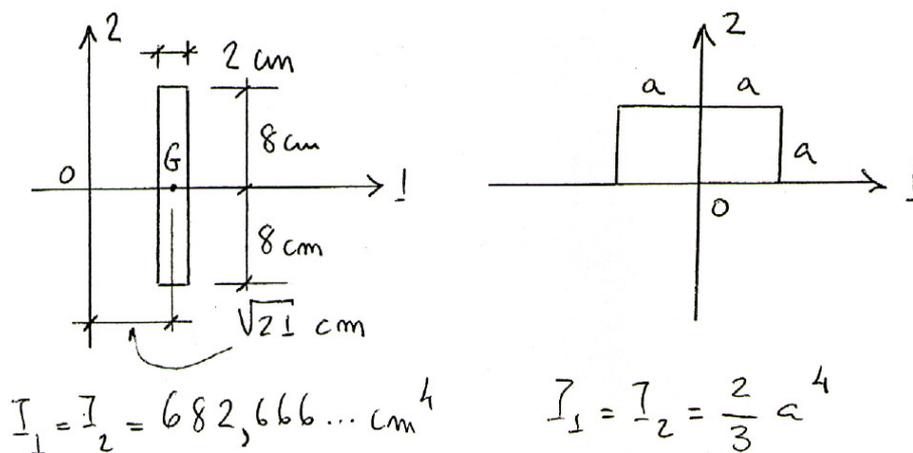


Figura 2 - 4

4ª) Um eixo de simetria é sempre eixo central principal de inércia, pois em relação a ele e a outro qualquer, perpendicular a ele, tem-se (figura 2-5):

$$I_{\alpha\beta} = \int_A \alpha\beta \, dA = 0$$

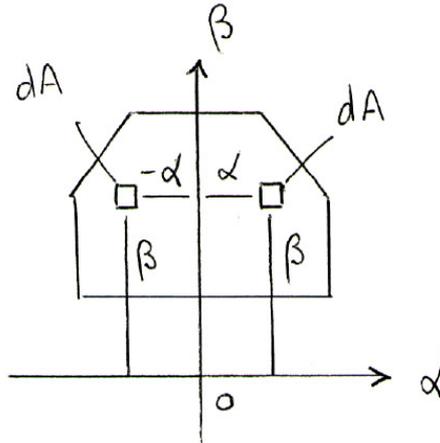


Figura 2 – 5

- 5ª) Se uma figura tem, em relação a um ponto O, *dois pares diferentes* de eixos principais, então qualquer eixo que passe por O é eixo principal. Por exemplo, no caso do retângulo ($a \times 2a$) da figura 2-4, os eixos O1 e O2 são eixos principais, mas eixos inclinados a 45° , em relação aos primeiros, também são eixos principais, porque em relação a eles o momento centrífugo é nulo.

Para demonstrar esta propriedade, considerem-se os eixos principais como de referência:

$$\begin{cases} I_u = \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2} \cos 2\theta \\ I_{uv} = \frac{I_1 - I_2}{2} \sin 2\theta \end{cases}$$

O momento centrífugo vale zero para $\theta = 0$ (com $I_u = I_1$) ou para $\theta = \frac{\pi}{2}$ (com $I_u = I_2$).

Se o momento centrífugo for nulo para outros valores de θ , é porque $I_1 = I_2$, e neste caso, como vimos, qualquer eixo que passe por O é principal de inércia.

- 6ª) Se uma figura plana tem 3 ou mais eixos de simetria, então todos os eixos que passam por G são centrais principais de inércia. Esta propriedade é um caso particular da anterior, quando o ponto O coincide com o centróide G.

Exemplos: triângulo equilátero, quadrado, hexágono regular, círculo, etc..

7) Exemplos de aplicação da teoria

- 1º) Achar os momentos de inércia I_y e I_z para o retângulo da figura 2-6.

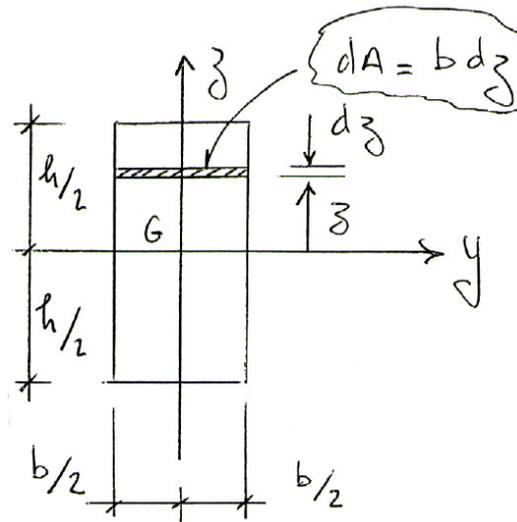


Figura 2 - 6

$$I_y = \int_A z^2 dA = 2 \int_0^{h/2} z^2 (b dz) = 2 \frac{b}{3} z^3 \Big|_0^{h/2} = 2 \frac{b}{3} \left[\frac{h^3}{8} - 0 \right] = \frac{bh^3}{12}$$

Analogamente: $I_z = \frac{hb^3}{12}$

Como os dois eixos são de simetria (bastava que um deles fosse), então eles são também os eixos centrais principais de inércia. Supondo que $h > b$ temos:

$$\boxed{I_1 = \frac{bh^3}{12}} \quad \text{e} \quad \boxed{I_2 = \frac{hb^3}{12}}$$

Observe-se que a fórmula $I_y = \frac{bh^3}{12}$ também vale para o paralelogramo da figura 2-7. Mas, neste caso, a fórmula $I_z = \frac{hb^3}{12}$ não vale (por quê?)

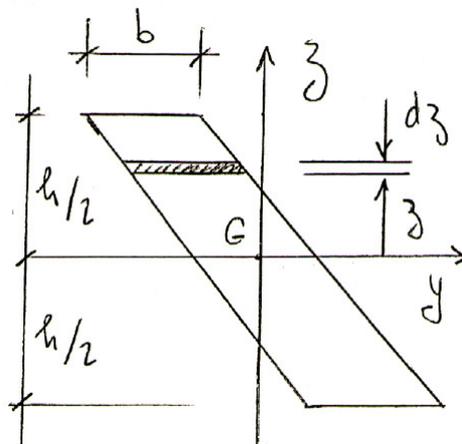


Figura 2 - 7

Observação: Para o caso de um eixo que contém a base do retângulo, o estudante deve verificar que $I = \frac{b h^3}{3}$ (basta usar o teorema de Steiner).

2º) Achar o momento de inércia I_y para o triângulo isósceles da figura 2-8.

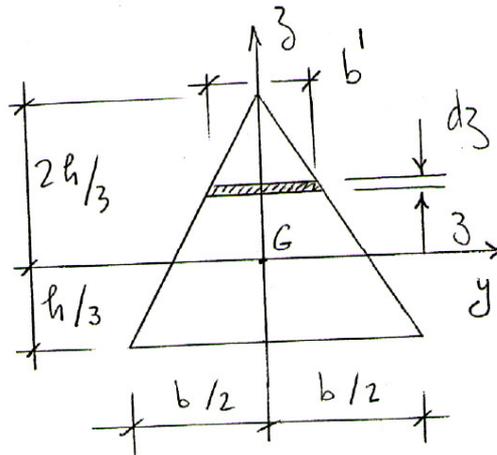


Figura 2 - 8

O elemento de área é dado por: $dA = b' dz = \frac{b}{h} \left(\frac{2h}{3} - z \right) dz$

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{-h/3}^{2h/3} z^2 (b' dz) = \frac{bh^3}{36}$$

Como o eixo z é de simetria, o momento de inércia I_y calculado é um dos momentos centrais principais. Note-se, entretanto, que a fórmula deduzida não vale para o cálculo do outro momento principal, como no retângulo. Ou seja:

$$I_z \neq \frac{hb^3}{36} \quad (\text{Por quê? Como exercício, achar a expressão correta de } I_z)$$

Observe-se também que a fórmula deduzida $(I_y = bh^3/36)$ continuará válida, mesmo que o triângulo não fosse isósceles (figura 2-9). Mas, neste caso, os eixos y e z já não seriam eixos centrais principais de inércia, porque o eixo z já não é de simetria.

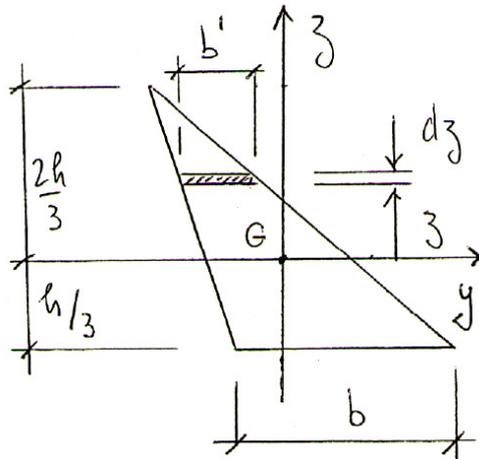


Figura 2 – 9

Observação: para o caso de um eixo que contém a base do triângulo (escaleno), o estudante deve verificar, usando o teorema de Steiner, que $I = \frac{bh^3}{12}$

3º) Achar I_y para o círculo da figura 2-10, de raio R e diâmetro D

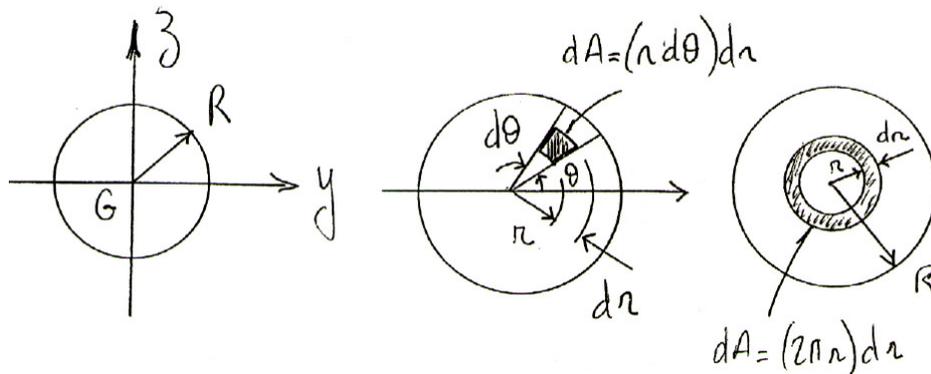


Figura 2 – 10

Usando coordenadas polares, calculamos inicialmente o momento polar I_G :

$$I_G = \int_A r^2 dA = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr = \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} d\theta \Rightarrow \boxed{I_G = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}}$$

Como $I_y + I_z = I_G$ e $I_y = I_z$, temos, finalmente:

$$\boxed{I_y = I_z = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}}$$

Observação: Neste exemplo, a integração seria mais simples se escolhêssemos outro elemento de área, em forma de anel:

$$I_G = \int_A r^2 dA = \int_0^R r^2 (2\pi r) dr = \frac{\pi R^4}{2}$$

4º) Coroa de círculo de diâmetro maior D e menor d \Rightarrow

$$I_y = I_z = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$$

5º) Para o triângulo retângulo da figura 2-11, achar o momento centrífugo I_{yz} :

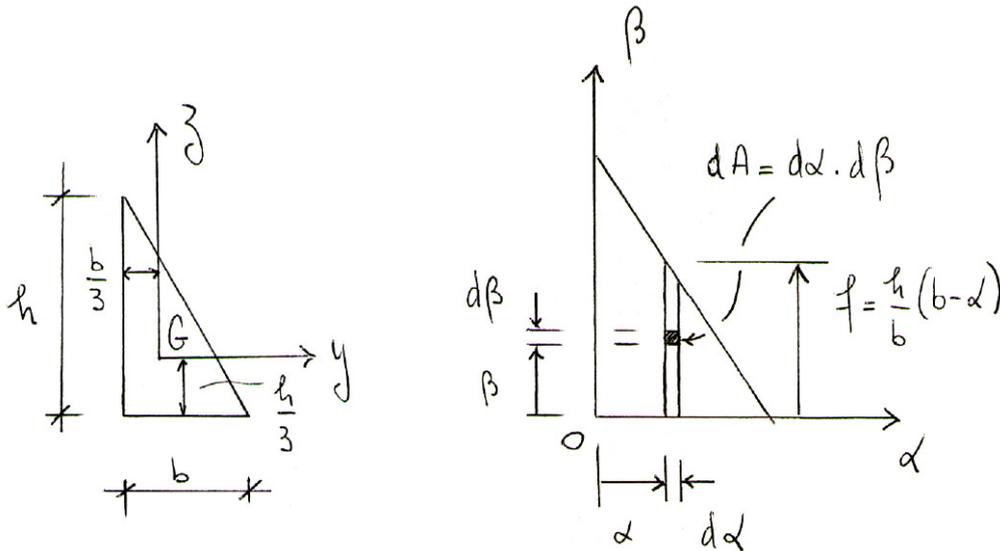


Figura 2 - 11

Convém inicialmente calcular $I_{\alpha\beta}$:

$$I_{\alpha\beta} = \int_A \alpha\beta dA = \int_0^b \alpha \int_0^f \beta d\beta d\alpha = \int_0^b \alpha \left(\frac{\beta^2}{2} \right) \Big|_0^f d\alpha = \frac{h^2}{2b^2} \int_0^b \alpha (b - \alpha)^2 d\alpha = \frac{h^2}{2b^2} \left(\frac{b^4}{12} \right)$$

$$\Rightarrow I_{\alpha\beta} = \frac{b^2 h^2}{24}$$

Em seguida aplica-se o Teorema de Steiner:

$$I_{\alpha\beta} = I_{yz} + A \alpha_G \beta_G \quad \Rightarrow \quad I_{yz} = \frac{b^2 h^2}{24} - \frac{bh}{2} \left(\frac{b}{3} \right) \left(\frac{h}{3} \right) \quad \Rightarrow \quad I_{yz} = - \frac{b^2 h^2}{72}$$

O fato de o momento centrífugo ser negativo significa que a maior parte da figura está situada nos quadrantes pares.

Observe-se que, trocando o sentido de um dos eixos (y ou z), o momento centrífugo muda de sinal. Trocando de sentido os dois eixos, o momento centrífugo não se altera. Esta propriedade é geral.

6º) Seções delgadas (seções de parede fina)

Quando a seção é delgada, costuma-se simplificar o cálculo do momento de inércia. Seja, por exemplo, achar o momento de inércia em relação ao eixo central principal horizontal da seção da figura 2-12. Note-se que a altura é dada em relação aos eixos das mesas, e que a espessura é bem menor do que as outras dimensões, para caracterizar a parede fina.

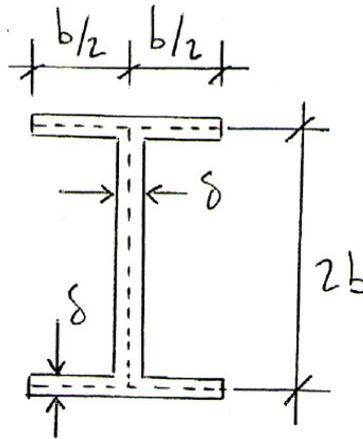


Figura 2 – 12

Cálculo exato:
$$I = 2 \left[\frac{b\delta^3}{12} + (b\delta)(b)^2 \right] + \frac{\delta(2b - \delta)^3}{12}$$

(a primeira parcela se refere às mesas e a segunda diz respeito à alma).

Simplificações:
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{b\delta^3}{12} \cong 0 \\ \frac{\delta(2b)^3}{12} \text{ em vez de } \frac{\delta(2b - \delta)^3}{12} \end{array} \right.$$

Exemplo numérico: $b = 12 \text{ cm}$ e $\delta = 1 \text{ cm}$

Valor exato: $I = 4.472 \text{ cm}^4$

Valor aproximado: $I \cong 4.608 \text{ cm}^4$

$\hat{\text{Erro}} = \left(\frac{4.608 - 4.472}{4.472} \right) 100 = 3\%$ (o erro cometido tem um valor admissível)

8) Determinação dos eixos e momentos centrais principais de inércia

Nas aplicações em Resistência dos Materiais é fundamental achar, para uma figura plana que representa a seção transversal de uma barra fletida, o centróide e os eixos centrais principais de inércia, bem como os respectivos momentos centrais principais de inércia.

Apresentaremos dois exemplos. No primeiro exemplo a figura tem um eixo de simetria, e no segundo não há nenhum eixo de simetria, é o caso mais geral possível.

Primeiro exemplo: (figura 2-13)

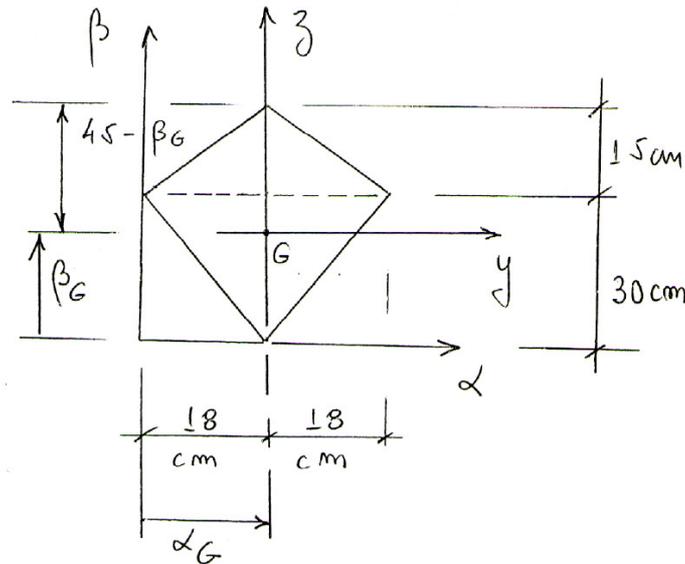


Figura 2 – 13

Centróide:

Adota-se um sistema auxiliar de referência (α, β) para o cálculo da posição do centróide. A figura dada é dividida em dois triângulos, um superior e outro inferior, ambos com a mesma base, igual a 36 cm.

$$\alpha_G = 18 \text{ cm} \quad (\text{por simetria})$$

$$\beta_G = \frac{Q_\alpha}{A} = \frac{(270)35 + (540)20}{270 + 540} = 25 \text{ cm}$$

Momentos de inércia

$$I_y = \frac{36(15)^3}{36} + 270(10)^2 + \frac{36(30)^3}{36} + 540(-5)^2 = 70.875 \text{ cm}^4$$

Para o cálculo de I_z , a subdivisão adotada não serve (por quê?). Adotaremos dois triângulos, separados entre si pelo eixo de simetria Gz , obtendo:

$$I_z = 2 \left[\frac{45(18)^3}{36} + 405(6)^2 \right] = 43.740 \text{ cm}^4$$

Segundo exemplo: (figura 2-14)

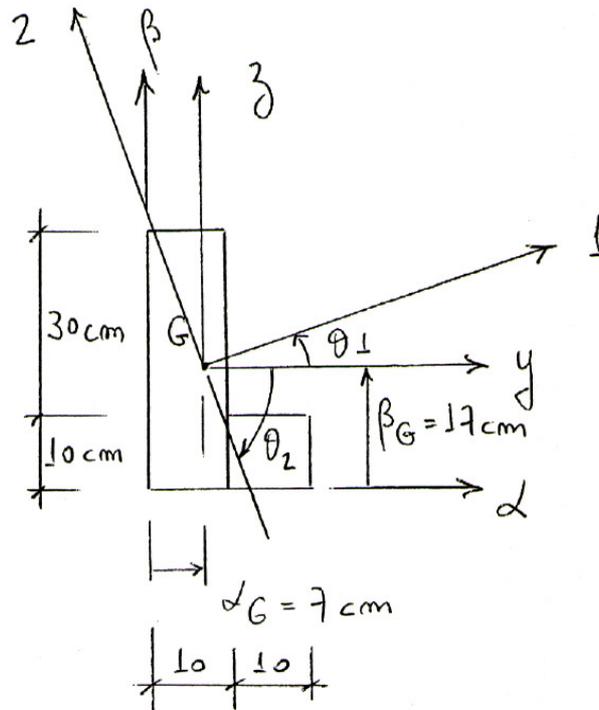


Figura 2 – 14

Centróide:

Adota-se um sistema auxiliar de referência (α , β) para o cálculo da posição do centróide. A origem desse sistema deve ser escolhida de modo a ser conveniente para o cálculo. A figura dada é dividida em duas figuras mais simples.

$$\alpha_G = \frac{Q_\beta}{A} = \frac{(400)5 + (100)15}{400 + 100} = 7 \text{ cm}$$

$$\beta_G = \frac{Q_\alpha}{A} = \frac{(400)20 + (100)5}{400 + 100} = 17 \text{ cm}$$

Determinação das grandezas auxiliares I_y , I_z e I_{yz}

Adota-se um conveniente sistema de referência central (y , z). Este sistema é central, mas não é o principal, pois $I_{yz} \neq 0$, como veremos abaixo:

$$I_y = \frac{10(40)^3}{12} + 400(3)^2 + \frac{10(10)^3}{12} + 100(-12)^2 = 72.167 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \frac{40(10)^3}{12} + 400(-2)^2 + \frac{10(10)^3}{12} + 100(8)^2 = 12.167 \text{ cm}^4$$

$$I_{yz} = 400(-2)(3) + 100(8)(-12) = -12.000 \text{ cm}^4$$

Determinação dos momentos centrais principais de inércia

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 = 74.478 \text{ cm}^4 \\ I_2 = 9.856 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

(note-se que: $I_2 < I_z < I_y < I_1$)

Determinação dos eixos centrais principais de inércia

$$\text{tg}\theta_1 = \frac{I_y - I_1}{I_{yz}} = 0,1926 \Rightarrow \theta_1 = 10,90^\circ$$

$$\text{tg}\theta_2 = \frac{I_y - I_2}{I_{yz}} = -5,1926 \Rightarrow \theta_2 = -79,10^\circ$$

(note-se que os eixos centrais principais são perpendiculares entre si)

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESCOLA POLITÉCNICA

Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica

**CURSO BÁSICO DE
RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS**

FASCÍCULO Nº 3

Torção uniforme

H. Britto

2.010

TORÇÃO UNIFORME

1) Introdução

Dizemos que uma barra está sujeita a *torção uniforme* quando três requisitos são, simultaneamente, respeitados:

- a) a barra é homogênea e prismática (seção transversal constante)
- b) o momento de torção é constante ao longo da barra
- c) não há impedimento algum ao *empenamento* (“warping”) da seção transversal

Quando um ou mais desses requisitos não são satisfeitos, a torção se diz *não-uniforme*.

Em geral, na torção uniforme, a seção transversal da barra *empena*, isto é, ela deixa de ser plana, com exceção da seção circular (maciça ou vazada). Na torção uniforme o empenamento é supostamente livre para ocorrer, e todas as seções transversais da barra empenam igualmente.

O empenamento não pode ser impedido, sob pena de a torção se tornar não-uniforme (por exemplo, um engastamento pode impedir o empenamento, forçando a seção a se manter plana).

Há 150 anos *Saint-Venant* mostrou, usando os resultados da Teoria da Elasticidade, que, na torção uniforme, todos os pontos da barra estão no estado de *cisalhamento simples* (v. fascículo 9 – *estado duplo de tensão*)

A Resistência dos Materiais, que é uma teoria simplificada oriunda da Teoria da Elasticidade, consegue, dentro das suas limitações, resolver apenas os casos de eixos de seção circular maciça, eixos de seção circular vazada e tubos fechados.

2) Seção circular ou em coroa de círculo. Estudo das tensões

Seja a seção circular vazada da figura 3-1, sujeita a um momento de torção T . A hipótese básica que se faz (a ser confirmada no estudo das deformações) é a de que a tensão tangencial que aparece num ponto qualquer da seção transversal, causada pelo momento de torção, é perpendicular ao raio vetor que define a posição do ponto. A tensão é também proporcional à distância r que separa o ponto considerado do centróide da seção:

$$\tau = k r \quad (1)$$

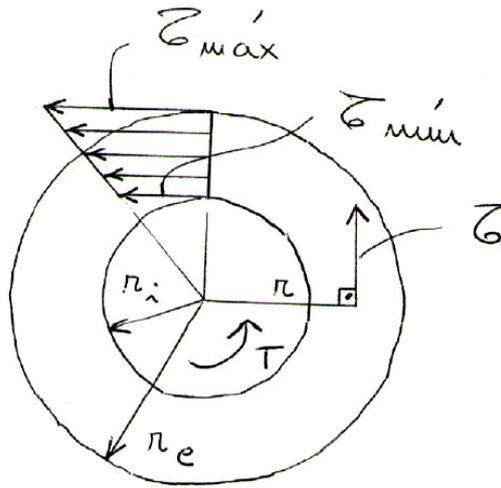


Figura 3 - 1

Para achar a constante de proporcionalidade k , basta impor a equivalência estática entre as tensões tangenciais e o momento de torção. A resultante das tensões vale zero, por simetria. Quanto ao momento em relação ao centróide, podemos escrever:

$$T = \int_A r(\tau dA) = k \int_A r^2 dA$$

A integral que comparece na expressão acima, como foi visto no fascículo 2 (figuras planas), é o *momento polar de inércia* (I_G) da figura em relação ao centróide G . No estudo da torção essa integral será chamada de *momento de inércia à torção*, e simbolizada por I_t :

$$I_t = \int_A r^2 dA = \frac{\pi}{2}(r_e^4 - r_i^4) \quad (2)$$

O resultado acima foi apresentado no fascículo 2 (figuras planas). Continuando:

$$T = \int_A r(\tau dA) = k \int_A r^2 dA = k I_t \quad \Rightarrow \quad k = \frac{T}{I_t}$$

$$\Rightarrow \quad \tau = \frac{T}{I_t} r \quad (3)$$

O interesse maior, naturalmente, é pela tensão máxima, que ocorre no contorno externo da seção:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{I_t} r_e = \frac{T}{W_t} \quad \text{com} \quad W_t = \frac{I_t}{r_e} = \frac{\pi}{2} \left(r_e^3 - \frac{r_i^4}{r_e} \right) \quad (4)$$

A grandeza W_t é o *módulo de resistência à torção* da seção, e é medida, no S.I., em m^3 . O módulo de resistência é uma grandeza puramente geométrica, isto é, ele não depende do material do eixo e nem do momento de torção.

Observações:

1) A expressão:
$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{W_t} \quad (5)$$

é universal, ou seja, se aplica a seções de qualquer geometria, bastando, em cada caso, fornecer o W_t correspondente. Para a seção circular vazada o módulo de resistência é dado pela (4).

2) Para introduzir a segurança, em se tratando de cisalhamento simples, basta impor que:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{W_t} \leq \bar{\tau} = \frac{\tau_e}{s} \quad (6)$$

sendo $\bar{\tau}$ a tensão admissível ao cisalhamento do material do eixo, τ_e a tensão de escoamento (supondo tratar-se de material dúctil) e s o coeficiente de segurança ($s > 1$).

Assim, fixado o material, o momento máximo de torção a que a seção pode resistir é *proporcional* ao módulo de resistência, o que justifica o nome dado à grandeza W_t

3) A tensão máxima é *tangente* ao contorno. Este fato não é uma coincidência, vai sempre acontecer em qualquer seção transversal. Está ligado a uma condição de contorno, aquela que diz que as faces laterais da barra estão descarregadas. Se não há cargas externas atuando nas faces laterais, a componente da tensão, na seção transversal, normal ao contorno, vale zero. Isto será esclarecido mais tarde, ao se estudar o estado duplo de tensão, no fascículo 9.

4) Se a seção vazada tiver pequena espessura (tubo circular), a fórmula se simplifica. Seja R o raio médio e δ a espessura ($\delta \ll R$). Podemos supor que a tensão é constante ao longo da espessura, o que nos leva, impondo o equilíbrio, ao seguinte resultado (confirmar):

$$W_t = \frac{T}{\tau} = \frac{(A \tau) R}{\tau} = \frac{[(2\pi R \delta)\tau] R}{\tau} \quad \Rightarrow \quad W_t = 2\pi R^2 \delta = 2 \bar{A} \delta$$

sendo $\bar{A} = \pi R^2$ a área delimitada pela linha média da parede. A fórmula acima vale, na verdade, para qualquer tubo fechado, e será deduzida mais adiante para o caso geral (Bredt).

Também vale aproximadamente, para o tubo circular de parede fina, a seguinte fórmula:

$$I_t = A R^2 = (2\pi R \delta) R^2 = 2\pi R^3 \delta \quad \Rightarrow \quad W_t = 2\pi R^2 \delta = \frac{I_t}{R}$$

Caso particular: seção circular maciça

Na figura 3-2 se apresenta uma seção circular cheia, ou maciça, de raios $r_e = R$ e $r_i = 0$. As expressões (3) e (6) permanecem válidas:

$$\tau = \frac{T}{I_t} r$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{W_t} \leq \bar{\tau} = \frac{\tau_e}{s}$$

sendo que agora temos:

$$I_t = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \quad (7)$$

$$W_t = \frac{I_t}{R} = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16} \quad (8)$$

sendo d o diâmetro ($d = 2R$). Note-se que a tensão mínima vale zero neste caso.

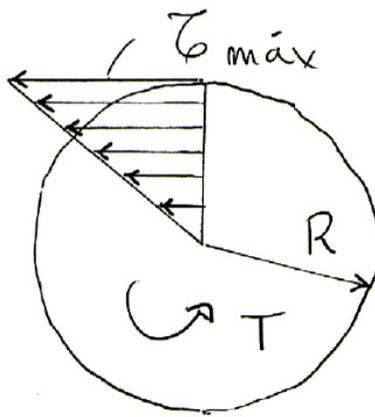


Figura 3 – 2

3) Seção circular ou em coroa de círculo. Estudo das deformações

As seções transversais, no caso de seções circulares ou em coroa de círculo, mantêm sua forma plana primitiva, isto é, não empenam. Mas deslocam-se angularmente, uma em relação à outra (Prof. Victor S. Lima).

Seja, na figura 3-3, um elemento de barra, de comprimento dx

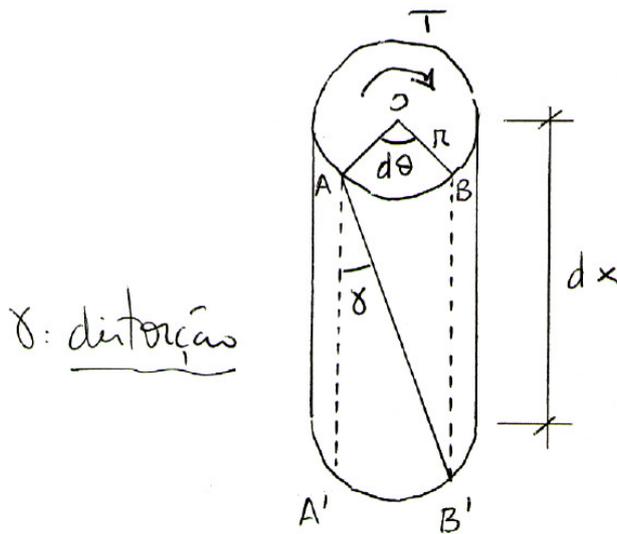


Figura 3 - 3

$$AB = r d\theta = A'B' = \gamma dx \quad \Rightarrow \quad d\theta = \frac{\gamma}{r} dx$$

Mas: $\theta' = \frac{d\theta}{dx} = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\gamma}{r} = \text{const.}}$

O que confirma a hipótese, feita no estudo das tensões, da proporcionalidade entre a tensão τ (que por sua vez é proporcional a γ), e a distancia r .

Pela *Lei de Hooke*: $\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{T}{G I_t} r \quad \Rightarrow \quad d\theta = \frac{T}{G I_t} dx$

Integrando, para uma barra de comprimento L :

$$\theta = \int d\theta = \frac{T}{G I_t} \int_0^L dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = \frac{TL}{G I_t}} \quad (9)$$

A fórmula (9) também é universal, assim como a (5).

O parâmetro G é o *módulo de elasticidade transversal* do material do eixo. Vale a seguinte fórmula, como foi visto no fascículo 1:

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}} \quad (10)$$

sendo E o módulo de elasticidade longitudinal e ν o coeficiente de Poisson.

4) Outras formas de seção

Para outras formas de seção valem as expressões (5) e (9):

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{W_t} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{TL}{GI_t}$$

e a Teoria da Elasticidade fornece as expressões para o módulo de resistência W_t e o momento de inércia à torção I_t . (convém lembrar que o momento de inércia à torção só coincide com o momento polar no caso das seções circulares vazada ou maciça).

Como a tensão tangencial deve ser tangente ao contorno, nos vértices da seção (pontos angulosos, ou com “bico”) a tensão é nula, e numa região próxima a esses pontos a tensão tem valor reduzido.

Módulos de resistência

De acordo com a figura 3-4, são válidos os seguintes resultados (sem demonstração):

1) Quadrado de lado a: $W_t = 0,208 a^3$ (11)

(a tensão máxima ocorre no ponto médio do lado)

2) Triângulo equilátero de lado a: $W_t = 0,05 a^3$ (12)

(a tensão máxima também ocorre no ponto médio do lado)

3) Retângulo de lados a e δ : $W_t = \left(\frac{1+0,435n}{1+1,3n} \right) \frac{a \delta^2}{3}$ (13)

sendo $n = \frac{\delta}{a} < 1$ (a tensão máxima ocorre no meio do LADO MAIOR)

(o quadrado é um caso particular, com $n = 1$)

4) Retângulo alongado $W_t = \frac{a \delta^2}{3}$ (14)

Este caso, importante na prática, é um caso limite do anterior (válido quando $n \cong 0$). Aqui a distribuição das tensões fica praticamente linear ao longo da espessura. Além disso, a tensão, ao longo do contorno do lado maior, fica praticamente constante e igual à tensão máxima.

5) Retângulo alongado ligeiramente curvo

O resultado do item anterior vale também se o retângulo alongado for ligeiramente curvo, desde que o raio de curvatura seja bem maior do que a espessura (fig. 3-4)

6) Hexágono regular

$$W_t = 0,188 d^3$$

(15)

(onde d é o diâmetro do círculo inscrito. A tensão máxima ocorre no ponto médio do lado)

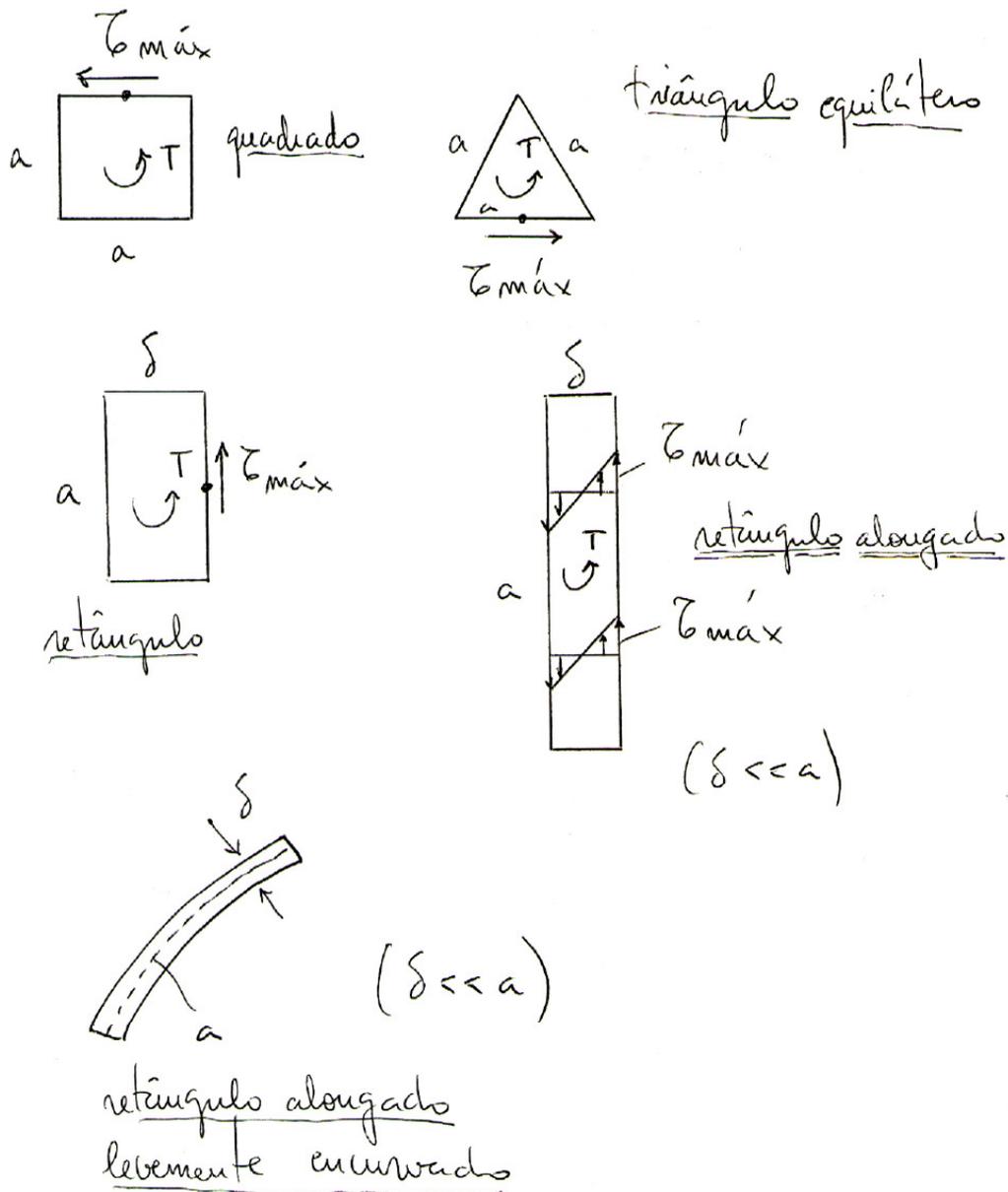


Figura 3 - 4

Momentos de inércia à torção

No que se segue, A é a área da seção e d o diâmetro do círculo inscrito.

1) Quadrado $I_t = 0,1406 A d^2$ (16)

2) Triângulo equilátero $I_t = 0,15 A d^2$ (17)

3) Elipse (de eixos b e h) $I_t = \frac{\pi}{16} \left(\frac{b^3 h^3}{b^2 + h^2} \right)$ (18)

4) Hexágono regular $I_t = 0,115 d^4$ (19)

5) Retângulo alongado $I_t = \frac{a \delta^3}{3}$ (20)

(a é o comprimento e δ é a espessura. Vale tanto para elementos retos quanto para elementos curvos de pequena curvatura, de raio bem maior que a espessura)

5) Exemplos de aplicação

1º exemplo – Prof. Diogo) Na figura 3-5 se representa uma barra prismática AB sujeita a um momento de torção constante (supõe-se que o engastamento não impede o empenamento). Definir a seção transversal nos seguintes casos:

- seção circular maciça de raio R
- quadrado de lado a
- triângulo equilátero de lado a
- seção circular vazada de raios R (externo) e 0,8 R (interno)

É dada a tensão admissível ao cisalhamento do material ($\bar{\tau}$)

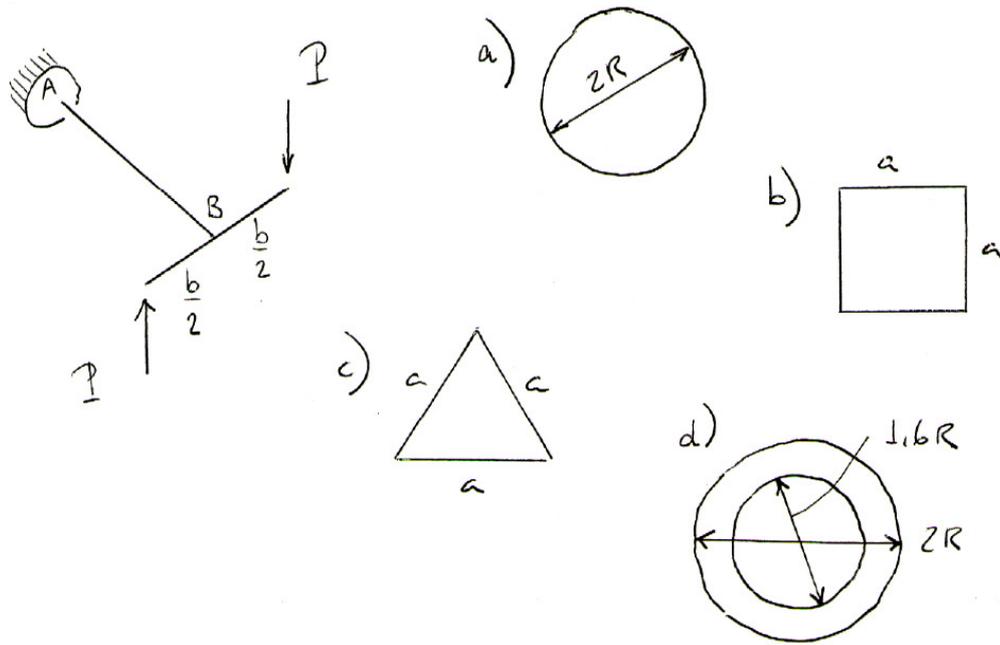


Figura 3 - 5

Resolução:

O momento de torção vale: $T = P b$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{W_t} \leq \bar{\tau} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_t \geq \frac{T}{\bar{\tau}}}$$

$$a) \quad W_t = \frac{\pi R^3}{2} \geq \frac{Pb}{\bar{\tau}} \quad \Rightarrow \quad R \geq 0,83 \sqrt[3]{\frac{Pb}{\bar{\tau}}}$$

$$b) \quad W_t = 0,208 a^3 \geq \frac{Pb}{\bar{\tau}} \quad \Rightarrow \quad a \geq 1,69 \sqrt[3]{\frac{Pb}{\bar{\tau}}}$$

$$c) \quad W_t = 0,05 a^3 \geq \frac{Pb}{\bar{\tau}} \quad \Rightarrow \quad a \geq 2,71 \sqrt[3]{\frac{Pb}{\bar{\tau}}}$$

$$d) \quad I_t = \frac{\pi}{2} [R^4 - (0,8R)^4] = 0,2952 \pi R^4 \quad e \quad W_t = \frac{I_t}{R}$$

$$W_t = 0,2952 \pi R^3 \geq \frac{Pb}{\bar{\tau}} \quad \Rightarrow \quad R \geq 1,02544 \sqrt[3]{\frac{Pb}{\bar{\tau}}}$$

Pergunta-se: qual das seções é a mais econômica? Resposta: é a que tem a menor área:

$$a) \quad A = \pi R^2 \quad \Rightarrow \quad A = 2,16 \sqrt[3]{\left(\frac{Pb}{\bar{\tau}}\right)^2}$$

$$b) \quad A = a^2 \quad \Rightarrow \quad A = 2,86 \sqrt[3]{\left(\frac{Pb}{\bar{\tau}}\right)^2}$$

$$c) \quad A = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad A = 3,18 \sqrt[3]{\left(\frac{Pb}{\bar{\tau}}\right)^2}$$

$$d) \quad A = 0,36\pi R^2 \quad \Rightarrow \quad A = 1,19 \sqrt[3]{\left(\frac{Pb}{\bar{\tau}}\right)^2}$$

Portanto, a seção mais econômica é a circular vazada, seguida pela circular maciça. Na prática a maioria dos eixos que transmitem potencia é de seção circular maciça, que, apesar de gastar mais material do que a vazada, é de construção mais barata.

2º exemplo) Para o sistema da figura 3-6, achar os diâmetros d_1 , d_2 e a rotação θ_C .

São dados, para o material do eixo: $\bar{\tau} = 800 \text{ kgf/cm}^2$ e $G = 10^6 \text{ kgf/cm}^2$.

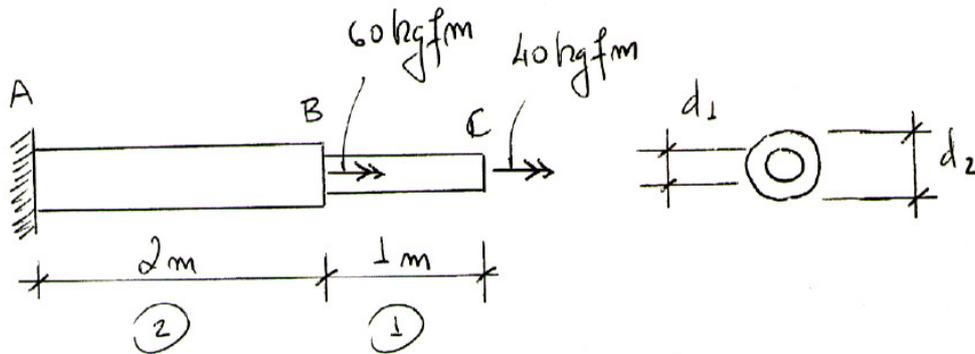


Figura 3 - 6

Resolução:

Momentos de torção nos dois trechos: $T_1 = 4.000 \text{ kgfcm}$ e $T_2 = 10.000 \text{ kgfcm}$

$$(W_t)_1 = \frac{\pi d_1^3}{16} = \frac{T_1}{\bar{\tau}} \quad \Rightarrow \quad d_1 = 2,95 \text{ cm}$$

$$(W_t)_2 = \frac{\pi d_2^3}{16} = \frac{T_2}{\bar{\tau}} \quad \Rightarrow \quad d_2 = 4,00 \text{ cm}$$

$$\theta_C = \theta_1 + \theta_2 = \frac{T_1 L_1}{G(I_t)_1} + \frac{T_2 L_2}{G(I_t)_2} = \frac{4.000(100)}{10^6 \frac{\pi}{32} (2,95)^4} + \frac{10.000(200)}{10^6 \frac{\pi}{32} (4,00)^4} = 0,1334 \text{ rad}$$

3º exemplo) Para o sistema da figura 3-7, achar o valor do diâmetro d ($T = 200 \text{ kgf m}$). São dados, para o material do eixo: $\bar{\tau} = 800 \text{ kgf/cm}^2$ e $G = 10^6 \text{ kgf/cm}^2$. Impõe-se, ainda, que $\theta_C \leq \bar{\theta}$, sendo $\bar{\theta}$ um valor limite dado por $\bar{\theta} = 0,025 \text{ rad}$

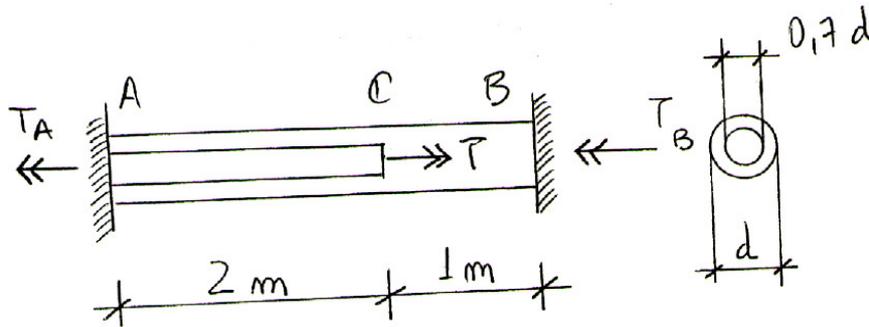


Figura 3 - 7

Resolução:

Com relação às características geométricas das seções A e B:

$$(I_t)_B = \frac{\pi d^4}{32} = 0,098175 d^4$$

$$(I_t)_A = \frac{\pi}{32} [d^4 - (0,7d)^4] = 0,074603 d^4$$

$$(W_t)_B = \frac{(I_t)_B}{d/2} = 0,19635 d^3$$

$$(W_t)_A = \frac{(I_t)_A}{d/2} = 0,14921 d^3$$

Em primeiro lugar é preciso achar as reações de apoio T_A e T_B . O equilíbrio diz que:

$$\boxed{T_A + T_B = T = 20.000} \quad \text{a)}$$

Como esta é a única equação de equilíbrio, e há 2 incógnitas, o problema é hiperestático.

A outra equação disponível é a equação de compatibilidade:

$$\theta_C = \frac{T_A (200)}{10^6 (0,074603) d^4} = \frac{T_B (100)}{10^6 (0,098175) d^4}$$

$$\boxed{T_B = 2,6319 T_A}$$

b)

Resolvendo o sistema a) e b), chega-se a:

$$\begin{cases} T_A = 5.500 \text{ kgf cm} \\ T_B = 14.500 \text{ kgf cm} \end{cases}$$

Resolvido o sistema hiperestático, o próximo passo é o *dimensionamento*, com a introdução da segurança ao colapso, e a verificação da deformabilidade.

Com relação à *segurança*:

$$\tau_A = \frac{T_A}{(W_t)_A} = \frac{5.500}{0,14921 d^3} \leq 800 \quad \Rightarrow \quad d \geq 3,585 \text{ cm}$$

$$\tau_B = \frac{T_B}{(W_t)_B} = \frac{14.500}{0,19635 d^3} \leq 800 \quad \Rightarrow \quad d \geq 4,520 \text{ cm}$$

Com relação à *deformabilidade*:

$$\theta_C = \frac{5.500 (200)}{10^6 (0,074603) d^4} \leq 0,025 \quad \Rightarrow \quad \boxed{d \geq 4,930 \text{ cm}} \quad (\text{resposta})$$

4º exemplo) Um eixo circular vazado transmite, conforme a figura 3-8, uma potência de 250 H.P. a uma velocidade angular de 800 r.p.m. Determinar o diâmetro externo desse eixo ($d = ?$), sabendo que a rotação relativa entre as suas extremidades não pode ultrapassar o valor de 0,015 rad. São dados, para o material do eixo: $\bar{\tau} = 750 \text{ kgf/cm}^2$ e $G = 10^6 \text{ kgf/cm}^2$.

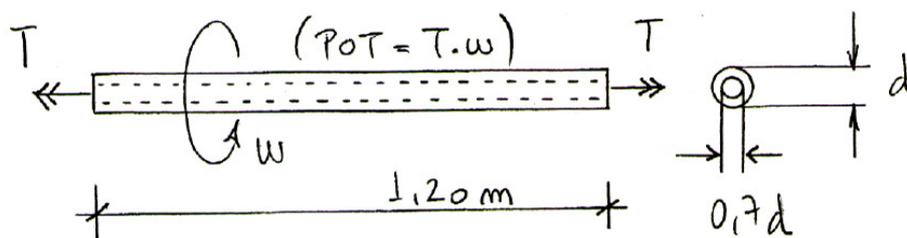


Figura 3 – 8

Resolução:

Sabemos que:

$$\boxed{\text{Potencia} = T \omega}$$

(21)

Sendo T o momento de torção (torque) atuante no eixo e ω a velocidade angular. No sistema MK*S (técnico) a potencia é dada em kgfm / s, o torque em kgfm e a velocidade angular em radianos / s. Sabemos que:

$$1 \text{ H.P.} = 75 \text{ kgfm/s} \quad \text{e} \quad 1 \text{ r.p.m.} = \left(\frac{2\pi}{60}\right) \text{ rad/s}$$

Portanto, de (21) vem, já considerando a conversão de unidades:

$$250(75) = T \left[\frac{800(2\pi)}{60} \right] \quad \Rightarrow \quad T = 223,81 \text{ kgf m}$$

$$I_t = \frac{\pi}{32} [d^4 - (0,7d)^4] = 0,074603 d^4$$

$$W_t = \frac{I_t}{d/2} = \frac{2 I_t}{d} = 0,149206 d^3$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{W_t} = \frac{223,81(100)}{0,149206 d^3} = 750 \quad \Rightarrow \quad d = 5,85 \text{ cm}$$

Agora, verificando a condição de deformabilidade:

$$\theta = \frac{TL}{GI_t} = \frac{223,81(100)120}{(10)^6 0,074603 d^4} = 0,015 \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = 7,00 \text{ cm}} \quad (\text{resposta})$$

6) Seções delgadas abertas

Seja uma barra de comprimento L , com a seção delgada aberta da figura 3-9, sujeita a um momento de torção T , como indicado. Supõe-se que a espessura dos diversos elementos seja pequena em relação às dimensões da seção, o que caracteriza as seções de parede fina.

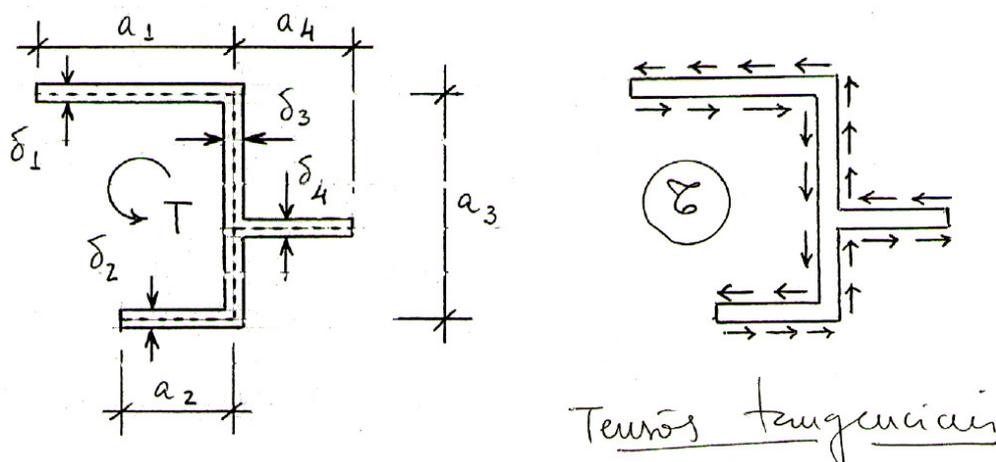


Figura 3 - 9

Dois elementos genéricos i e j têm as seguintes rotações:

$$\theta_i = \frac{T_i L}{G(I_t)_i} \quad \text{e} \quad \theta_j = \frac{T_j L}{G(I_t)_j}$$

Da condição da seção ser indeformável no seu próprio plano, vem:

$$\theta_i = \theta_j \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{T_i}{(I_t)_i} = \frac{T_j}{(I_t)_j}} \quad (22)$$

Assim, cada elemento i suporta uma fração T_i do momento total T que é proporcional ao seu momento de inércia à torção $(I_t)_i$. Da condição de todos os elementos terem o mesmo giro, obtém-se, usando uma conhecida propriedade das frações:

$$\theta_i = \frac{T_i L}{G(I_t)_i} = \frac{T_1 L + T_2 L + \dots}{G(I_t)_1 + G(I_t)_2 + \dots} = \theta = \frac{T L}{G I_t}$$

Donde se conclui, considerando (20), que o momento de inércia da seção vale:

$$I_t = \sum (I_t)_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_t = \sum \frac{a_i \delta_i^3}{3}} \quad (23)$$

Da relação (22), e considerando (23), vem:

$$\frac{T_i}{(I_t)_i} = \frac{T_j}{(I_t)_j} = \dots = \frac{\sum T_k}{\sum (I_t)_k} = \frac{T}{I_t} \quad (24)$$

Lembrando das fórmulas (14) e (20), temos, para o elemento de ordem i (figura 3-10):

$$(\tau_{\text{máx}})_i = \frac{T_i}{(W_t)_i} = \frac{T_i}{\frac{a_i \delta_i^2}{3}} = \frac{T_i}{(I_t)_i} \delta_i$$

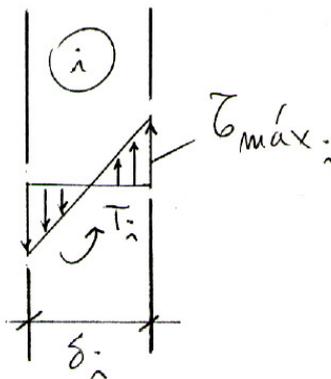


Figura 3 – 10

ou ainda, em virtude de (24):

$$\boxed{(\tau_{\text{máx}})_i = \frac{T}{I_t} \delta_i} \quad (25)$$

Portanto, $\tau_{\text{máx}}$ vai ocorrer no elemento que for o mais espesso:

$$\boxed{\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{W_t} = \frac{T}{I_t} \delta_{\text{máx}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_t = \frac{I_t}{\delta_{\text{máx}}}} \quad (26)$$

Caso particular importante

Quando a espessura δ for igual para todos os elementos, as fórmulas (23) e (26) se simplificam, passando a ser, respectivamente (C é o comprimento total da linha média: $C = \sum a_i$):

$$\boxed{I_t = \frac{C \delta^3}{3}} \quad (27)$$

$$\boxed{W_t = \frac{C \delta^2}{3} = \frac{I_t}{\delta}} \quad (28)$$

7) Seções delgadas fechadas unicelulares – Fórmulas de Bredt

Na figura 3-11 se representa um tubo prismático de uma célula com parede fina e espessura que pode ser variável ao longo da linha média da seção. De uma fatia desse tubo, de comprimento dx , corta-se um elemento através de dois planos paralelos ao eixo do tubo e perpendiculares à linha média, como mostra a figura 3-11.

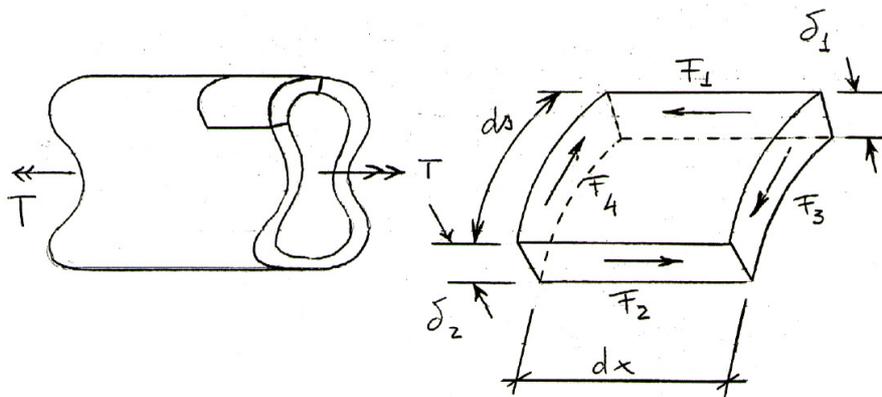


Figura 3 – 11

A hipótese básica é a de que a tensão tangencial na seção, devida ao momento de torção, é *tangente* à linha média (sendo portanto tangente ao contorno) e *constante* ao longo da espessura, mas podendo variar continuamente ao longo da linha média.

O elemento de barra deve estar em equilíbrio sob a ação das forças F_1 , F_2 , F_3 e F_4 (que são as resultantes das tensões):

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 = F_2$$

$$\text{Mas } \begin{cases} F_1 = \tau_1 (\delta_1 dx) \\ F_2 = \tau_2 (\delta_2 dx) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \tau_1 \delta_1 = \tau_2 \delta_2$$

A distância ds entre os cortes é arbitrária. Logo:

$$\boxed{q = \tau \delta = \text{constante}}$$

Ou seja, o *fluxo de cisalhamento* (q) é constante ao longo da linha média. Impondo a equivalência estática entre o momento de torção e o fluxo (figura 3-12):

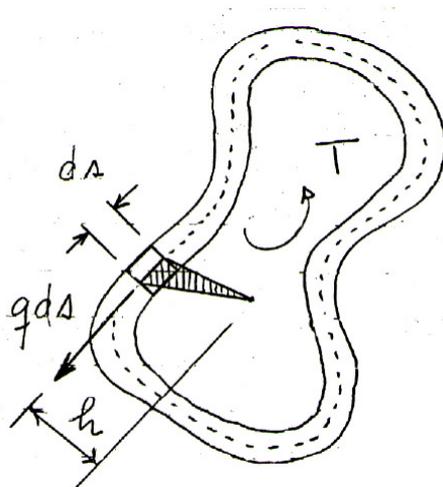


Figura 3 – 12

$$T = \oint h (q ds) = q \oint h ds$$

sendo s a abscissa ao longo da linha média. Mas $(h ds)$ é o dobro da área do triângulo elementar em hachurado na figura 3-12. Portanto:

$$\boxed{T = q(2\bar{A})} \quad (\text{primeira fórmula de Bredt}) \quad (29)$$

onde \bar{A} é a área da figura delimitada pela linha média da seção. Assim:

$$\boxed{q = \frac{T}{2A}} \quad \text{e} \quad \boxed{\tau = \frac{q}{\delta} = \frac{T}{2A\delta}} \quad (30)$$

A tensão máxima ocorrerá no ponto em que a espessura for mínima:

$$\boxed{\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{W_t} = \frac{T}{2\bar{A}\delta_{\text{mín}}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_t = 2\bar{A}\delta_{\text{mín}}} \quad (31)$$

sendo W_t , como sempre, o módulo de resistência à torção. Para achar o momento de inércia à torção (I_t), vamos escrever a expressão da energia de deformação armazenada numa fatia do eixo, de comprimento dx :

$$\frac{1}{2}(T d\theta) = dU = \frac{1}{2} \oint (q ds)(\gamma dx) = \frac{1}{2} \oint (\tau \delta ds)(\gamma dx)$$

A expressão acima afirma que o trabalho externo (realizado pelo momento de torção) não se perde, ficando armazenado no interior da fatia sob a forma de energia de deformação, energia esta que pode também ser escrita em função da força interna elementar ($q ds$) e do deslocamento correspondente (γdx), conforme a figura 3-13.

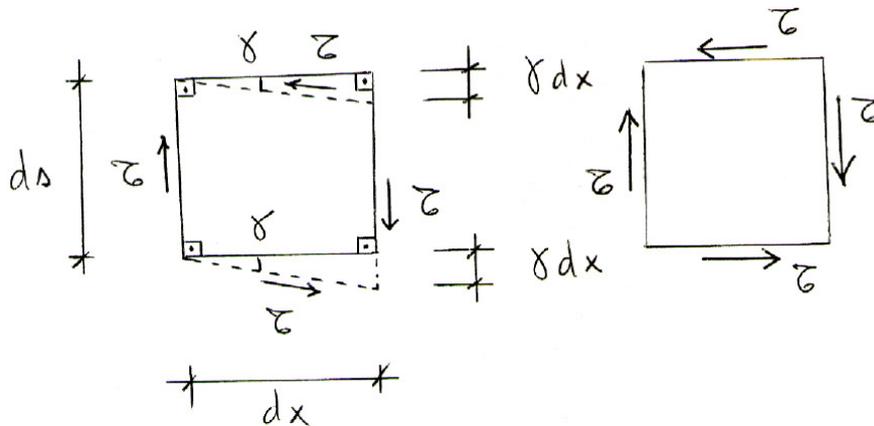


Figura 3 – 13

Mas, pela Lei de Hooke, $\gamma = \left(\frac{\tau}{G}\right)$. Logo:

$$T \frac{d\theta}{dx} = \oint \frac{\tau^2}{G} \delta ds$$

Considerando (30):

$$\tau = \frac{T}{2A\delta} \quad \Rightarrow \quad \tau^2 = \frac{T^2}{4A^2\delta^2}$$

Finalmente:

$$T \frac{d\theta}{dx} = \oint \frac{T^2}{4G \bar{A}^2 \delta} ds = \frac{T^2}{4G \bar{A}^2} \oint \frac{ds}{\delta}$$

$$\theta' = \frac{d\theta}{dx} = \frac{T}{G} \left(\frac{1}{4 \bar{A}^2} \right) \oint \frac{ds}{\delta} = \frac{T}{GI_t}$$

$$\boxed{I_t = \frac{(2\bar{A})^2}{\oint \frac{ds}{\delta}}} \quad (\text{segunda fórmula de Bredt}) \quad (32)$$

Caso particular importante

Quando a espessura for constante ao longo da linha média da seção, as fórmulas (31) e (32) se simplificam, passando a ser escritas como (C é o comprimento da linha média):

$$\boxed{W_t = 2 \bar{A} \delta} \quad (33)$$

$$\boxed{I_t = \frac{(2\bar{A})^2 \delta}{C}} \quad (34)$$

Exemplos de ilustração da teoria

a) Para um tubo circular (figura 3-14), calcular o módulo de resistência e o momento de inércia à torção pela teoria exata e pelas fórmulas de Bredt. São dados: $r_e = 10\text{cm}$, $r_i = 9\text{cm}$. A espessura vale, portanto, $\delta = 1\text{cm}$, e o raio médio $R = 9,5\text{cm}$.

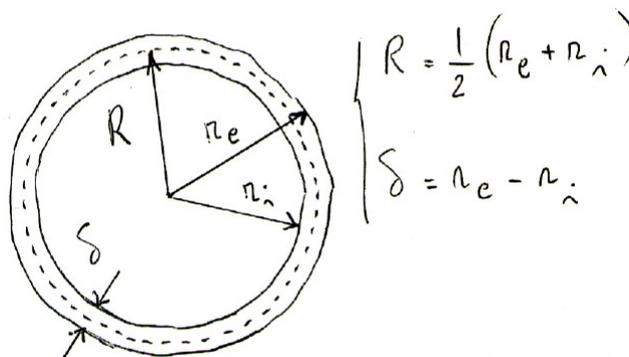


Figura 3 – 14

Resolução:

Valores exatos:

$$I_t = \int_A r^2 dA = \frac{\pi}{2} (r_e^4 - r_i^4) = 5.402 \text{ cm}^4$$

$$W_t = \frac{I_t}{r_e} = 540,2 \text{ cm}^3$$

Valores aproximados (Bredt):

$$I_t = 4 (\bar{A})^2 \frac{\delta}{C} = 4 (\pi R^2)^2 \frac{\delta}{2\pi R} = 2\pi R^3 \delta = 5.387 \text{ cm}^4 \quad (\text{erro} = -0,3\%)$$

$$W_t = 2\bar{A} \delta = 2\pi R^2 \delta = \frac{I_t}{R} = 567,1 \text{ cm}^3 \quad (\text{erro} = +5,0\%)$$

- b) Na figura 3-15 se representam duas seções quadradas de parede fina, uma fechada (# 1) e a outra aberta (# 2). Comparar as seções entre si, no que diz respeito à resistência e à deformabilidade. É dada a relação: $a = 20 \delta$

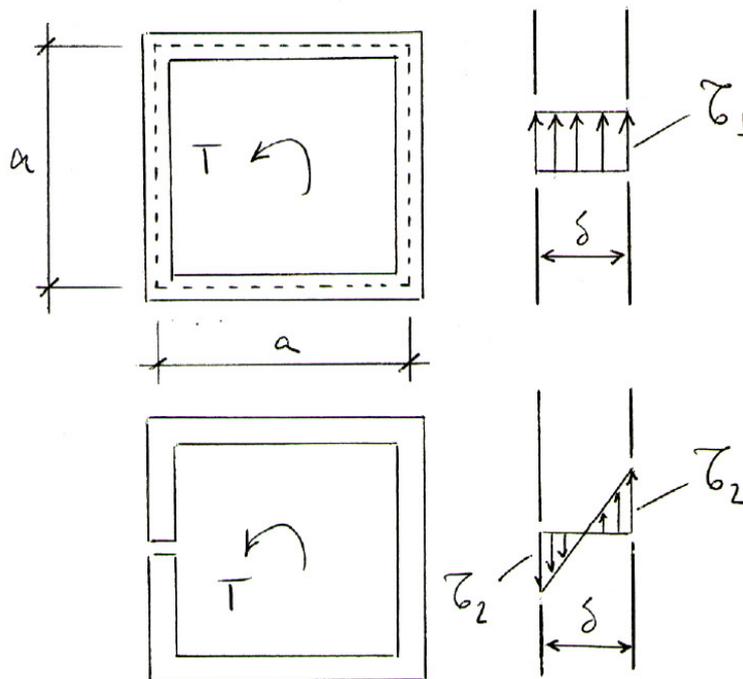


Figura 3 – 15

Resolução:

Comparação das resistências

$$\tau_1 = \frac{T}{2A\delta} = \frac{T}{2a^2\delta}$$

$$\tau_2 = \frac{T}{I_t} \delta = \frac{T}{(4a)\delta^3} \delta = \frac{3}{4} \frac{T}{a\delta^2}$$

$$\Rightarrow \tau_2 = \frac{3}{2} \left(\frac{a}{\delta} \right) \tau_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_2 = 30 \tau_1}$$

A perda de resistência do perfil aberto se explica por ser o braço de alavanca muito maior no perfil fechado.

Comparação das rigidezes

$$\theta_1 = \frac{TL}{G(I_t)_1} = \frac{TL}{G(2a^2)^2} \left(\frac{4a}{\delta} \right) = \frac{TL}{G(a^3\delta)}$$

$$\theta_2 = \frac{TL}{G(I_t)_2} = \frac{TL}{G(4a)\delta^3} (3) = \frac{3}{4} \frac{TL}{G(a\delta^3)}$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \frac{3}{4} \left(\frac{a}{\delta} \right)^2 \theta_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_2 = 300 \theta_1}$$

A perda de rigidez no perfil aberto se explica porque há um deslizamento longitudinal ao longo da ranhura (figura 3-16).

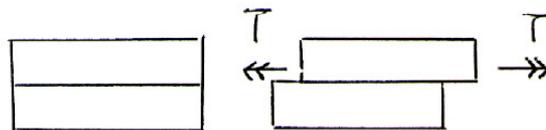


Figura 3 – 16

Observação final

Para uma seção fechada unicelular existe uma fórmula alternativa para o cálculo da rotação θ , que vale a pena apresentar. Tal expressão é muito útil na determinação da posição do centro de cisalhamento de uma seção fechada, assunto que foge ao escopo destas notas de aula.

Sejam as duas fórmulas de Bredt:

$$\boxed{q = \frac{T}{2\bar{A}}} \quad \boxed{I_t = \frac{(2\bar{A})^2}{\oint \frac{ds}{\delta}}}$$

Podemos escrever:

$$I_t = \frac{(2\bar{A})^2}{\oint \frac{ds}{\delta}} = \frac{q(2\bar{A})^2}{q \oint \frac{ds}{\delta}} = \frac{T(2\bar{A})}{\oint \frac{q}{\delta} ds}$$

Mas:

$$\theta = \frac{TL}{GI_t} = \frac{TL}{G} \frac{\oint \frac{q}{\delta} ds}{T(2\bar{A})}$$

Finalmente:

$$\boxed{\theta = \frac{L}{2G\bar{A}} \oint \frac{q}{\delta} ds} \quad (35)$$

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESCOLA POLITÉCNICA

Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica

**CURSO BÁSICO DE
RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS**

FASCÍCULO Nº 4

Flexão reta

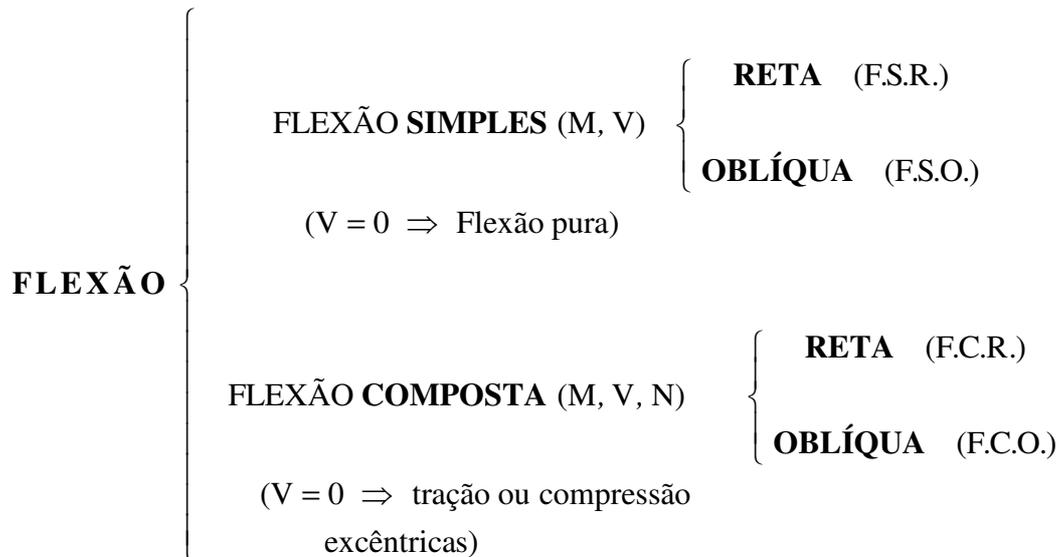
H. Britto

2.010

FLEXÃO RETA

1) Quadro geral da flexão

Uma barra está sujeita a flexão quando há momento fletor atuante. Um panorama geral do problema da flexão é dado no quadro abaixo:



Neste fascículo vamos estudar, numa primeira etapa, a **flexão simples reta** (F.S.R.), tendo como caso particular, quando $V = 0$, a flexão pura. Em seguida acrescentaremos a força normal, abordando a **flexão composta reta** (F.C.R.), a qual, por sua vez, apresenta como caso particular, quando $V = 0$, a tração ou compressão excêntricas.

No próximo fascículo estudaremos a flexão oblíqua. Alguns livros chamam a flexão reta de flexão normal e a flexão oblíqua de flexão desviada.

Na parte final há um anexo que consiste numa introdução ao estudo das vigas compostas, ou seja, vigas constituídas de dois ou mais materiais.

Parte I – Flexão simples reta

2) Flexão Pura

Na flexão pura o único esforço solicitante que atua na seção transversal é o momento fletor. De acordo com a hipótese de Navier, as seções transversais, que são planas e perpendiculares ao eixo antes da deformação, continuam, após a deformação, planas e perpendiculares ao eixo encurvado, conforme a figura 4-1.

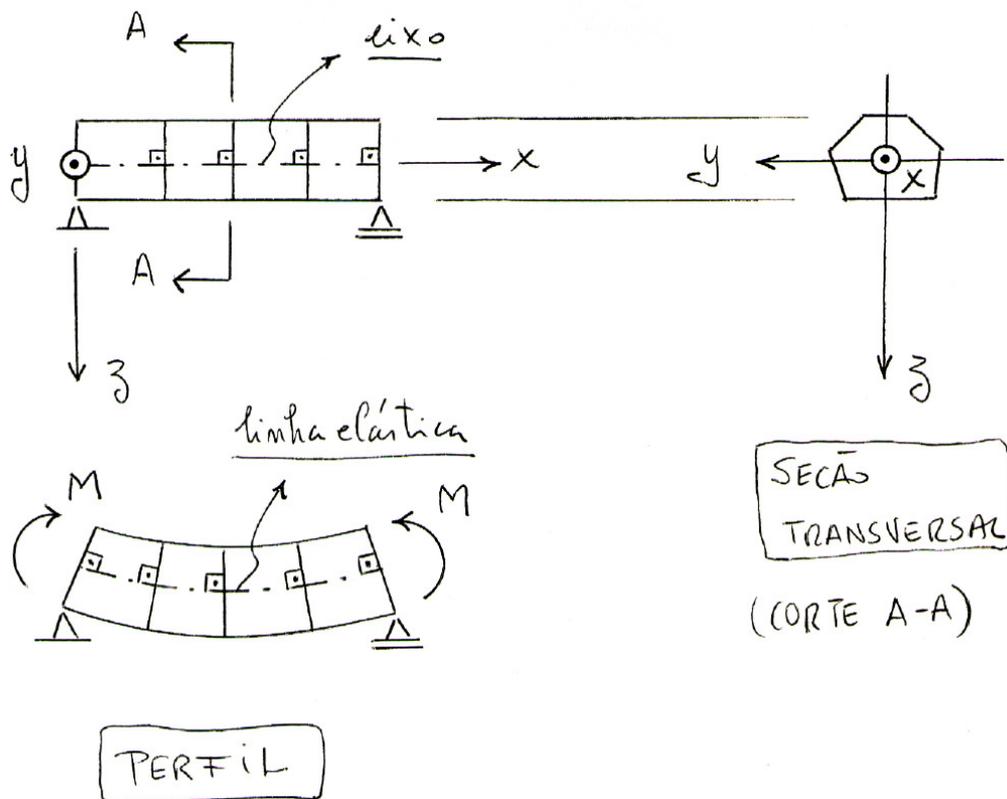


Figura 4 - 1

O eixo da viga (eixo x) se encurva, assumindo a forma de um arco de círculo, mas mantém o comprimento inalterado, ou seja, ele não se deforma. O eixo da viga pertence à *fibra neutra*, que é a fibra para a qual $z = 0$ (entende-se por fibra todos os pontos da viga que têm a mesma ordenada z). Na fibra neutra, portanto, a tensão normal é nula.

As fibras situadas abaixo do eixo ($z > 0$) se alongam e aquelas acima do eixo ($z < 0$) encurtam. A fibra mais tracionada é a de baixo e a mais comprimida a de cima. *Despreza-se neste estudo a deformação da seção transversal no seu próprio plano, ou seja, supõe-se nulo o coeficiente de Poisson do material ($\nu = 0$).*

A hipótese de seção plana significa que as deformações longitudinais ϵ das diversas fibras variam linearmente ao longo da altura, valendo zero no eixo, de acordo com a figura 4-2 (que representa a vista lateral de um elemento da viga, antes e após a deformação):

$$\varepsilon = \kappa z$$

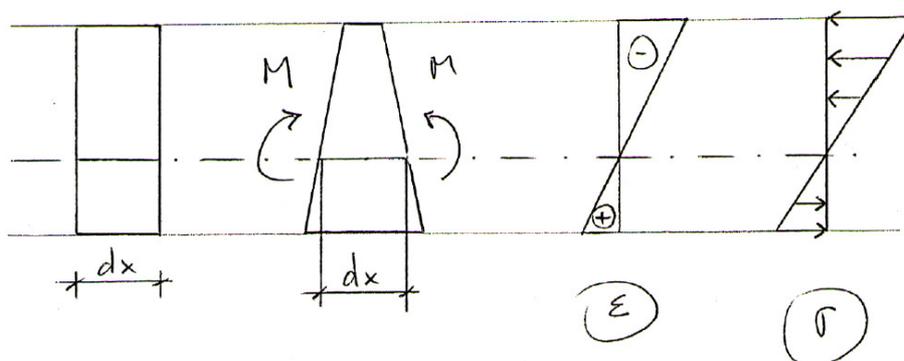


Figura 4 – 2

A expressão $\varepsilon = \kappa z$ é conhecida como *equação de compatibilidade*. No fascículo 7, quando estudarmos a linha elástica, veremos que o parâmetro κ representa a *curvatura* da viga (linha elástica é a curva em que se transforma o eixo da viga, após a deformação).

A flexão é **reta** quando a intersecção do plano de ação do momento fletor (que é o plano onde a viga se deforma, ou seja, é o plano $x-z$) e o plano da seção transversal coincide com um dos eixos centrais principais da seção, e **oblíqua** em caso contrário. Como o vetor momento é sempre perpendicular ao respectivo plano de ação, resulta que, na flexão reta, o vetor momento é *paralelo* a um dos eixos centrais principais da seção transversal.

Combinando a hipótese de Navier com a lei de Hooke, resulta que as tensões normais variam linearmente ao longo da altura (figura 4-2), valendo zero na *fibra neutra*, o que se conhece como hipótese de Bernoulli. A tensão normal na seção é dada pela *fórmula fundamental* da Resistência dos Materiais:

$$\sigma = \frac{M}{I} z$$

sendo $I = I_y$ o momento de inércia da seção em relação ao eixo horizontal Gy (a flexão se dá *ao redor* do eixo Gy).

demonstração:

De acordo com a figura 4-3, o eixo Gz é de simetria, e, portanto, central principal. Ele representa o traço do plano de ação do momento no plano da seção transversal.

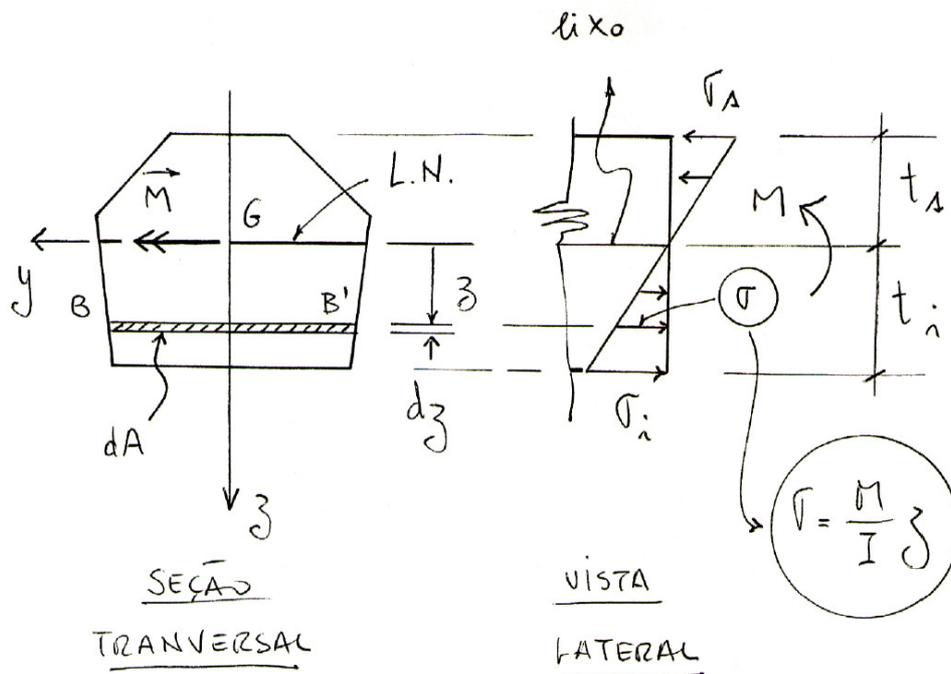


Figura 4 – 3

A hipótese de que $\sigma = \text{cte.}$ na fibra BB' é básica: a tensão normal não varia com a abscissa y . Esta hipótese, sem a qual não existiria a Resistência dos Materiais, foi amplamente confirmada em ensaios de laboratório e em simulações numéricas.

Chamam-se de t_s e t_i as distâncias (positivas) das fibras mais afastadas (superior e inferior) da *linha neutra* (LN), que é a linha horizontal que contém o centróide. As tensões normais extremas são chamadas de σ_s (na fibra superior, máxima compressão) e σ_i (na fibra inferior, máxima tração). No sistema de referência adotado, o eixo Gx é o eixo da viga, não indicado na figura (é perpendicular ao papel e está saindo da figura).

O momento fletor M é *estaticamente equivalente* às tensões normais σ . Ele não existe, fisicamente falando. O que existe, na realidade, são as tensões σ , e o material resiste (ou não) a essas tensões. *O momento fletor é um ente fictício, intermediário entre os esforços externos e as tensões, concebido para facilitar o dimensionamento* (Prof. Décio de Zagottis).

Para demonstrar a fórmula fundamental, inicialmente introduz-se a equação de compatibilidade ($\epsilon = \kappa z$) na Lei de Hooke:

$$\sigma = E \epsilon \quad \Rightarrow \quad \sigma = E \kappa z$$

A seguir introduzimos a equivalência estática. Em primeiro lugar, fazendo igual a zero a resultante das tensões, podemos confirmar que o eixo y passa pelo centróide:

$$\int_A \sigma dA = N = 0 \quad \Rightarrow \quad E \kappa \int_A z dA = E \kappa Q_y = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_y = 0$$

E agora, igualando o momento fletor ao momento gerado pelas tensões, obtém-se a curvatura:

$$\int_A z(\sigma dA) = M \quad \Rightarrow \quad E \kappa \int_A z^2 dA = E I \kappa = M \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{M}{EI}$$

E assim, finalmente:

$$\sigma = E \kappa z \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{M}{I} z \quad \text{c.q.d.}$$

3) Módulos de resistência

Na linha neutra (LN), como foi visto, a tensão vale zero:

$$\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = 0} \quad (\text{equação da linha neutra})$$

Sejam $\bar{\sigma}_T$ e $\bar{\sigma}_C$ as tensões normais admissíveis à tração e à compressão, respectivamente (consideradas positivas). Nos problemas de dimensionamento, a *introdução da segurança* leva às seguintes condições (figura 4-3):

$$\sigma_i = \frac{M}{I} t_i = \frac{M}{W_i} \leq \bar{\sigma}_T \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_i \geq \frac{M}{\bar{\sigma}_T}}$$

$$\sigma_s = \frac{M}{I} (-t_s) = -\frac{M}{W_s} \geq -\bar{\sigma}_C \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_s \geq \frac{M}{\bar{\sigma}_C}}$$

Nos problemas de verificação deve-se comprovar que:

$$\boxed{\frac{M}{W_i} \leq \bar{\sigma}_T}$$

$$\boxed{\frac{M}{W_s} \leq \bar{\sigma}_C}$$

Nas expressões acima, as grandezas

$$\boxed{W_i = \frac{I}{t_i}}$$

e

$$\boxed{W_s = \frac{I}{t_s}}$$

são conhecidas como *módulos de resistência à flexão* da seção transversal. Os módulos de resistência dependem apenas da geometria, e são medidos em m^3 (no S.I.).

Os módulos de resistência têm um significado físico bastante claro. Fixada uma tensão admissível, ou seja, fixado o material da viga, o momento máximo a que a seção pode resistir,

com segurança, é proporcional ao módulo de resistência correspondente, justificando assim a denominação.

Observação:

Seções mais eficientes e econômicas (mais resistentes com a mesma área) têm maior W , ou seja, maior quantidade de material afastado da linha neutra, pois o momento de inércia I aumenta mais rápido do que a distância t ($W = I/t$). A figura 4-4 mostra duas seções de mesma área ($A = a^2$).

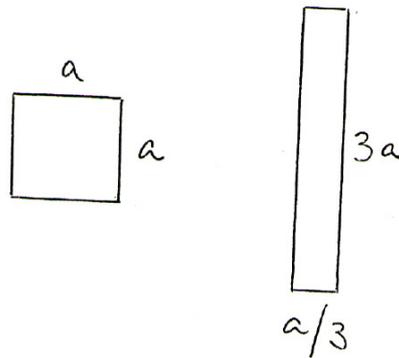


Figura 4 - 4

A seção retangular tem um módulo de resistência igual ao triplo da seção quadrada:

Seção quadrada:
$$I = \frac{a^4}{12} \Rightarrow W = \frac{2I}{a} = \frac{a^3}{6}$$

Seção retangular:
$$I = \frac{1}{12} \left(\frac{a}{3}\right) (3a)^3 = \frac{3a^4}{4} \Rightarrow W = \frac{2I}{3a} = \frac{a^3}{2}$$

Pela mesma razão, quando a flexão pode ocorrer em qualquer direção (postes, estacas, etc..), seções vazadas são mais resistentes que as cheias de mesma área. Na figura 4-5 as duas seções têm a mesma área ($A = \pi R^2$), mas o módulo de resistência da seção vazada é maior que o da seção cheia:

Maciça:
$$I = \frac{\pi R^4}{4} \Rightarrow W = \frac{I}{R} = \frac{\pi R^3}{4}$$

Vazada:
$$I = \frac{\pi}{4} \left[\left(\frac{5R}{3}\right)^4 - \left(\frac{4R}{3}\right)^4 \right] = \frac{\pi}{4} \left(\frac{41}{9}\right) R^4 \Rightarrow W = I \left(\frac{3}{5R}\right) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{41}{15}\right) R^3$$

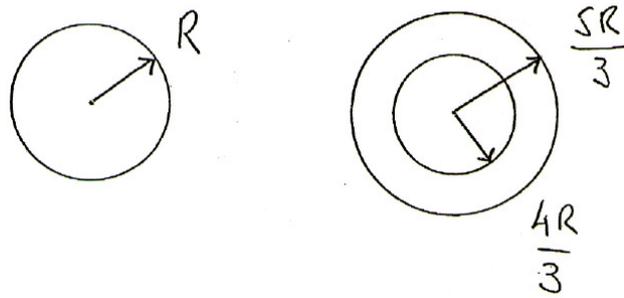


Figura 4 - 5

4) Caso geral de seção transversal

Na dedução que se fez da fórmula fundamental, supôs-se que o eixo vertical era de simetria. Quando não há nenhum eixo de simetria na seção (figura 4-6), é preciso que não apareça o momento *parasita* M_p (Prof. Victor de Souza Lima):

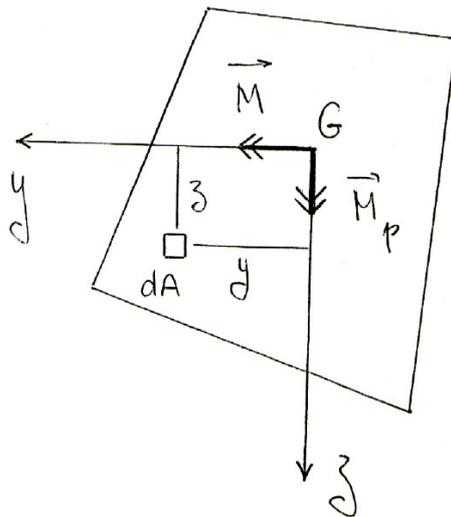


Figura 4 - 6

$$M_p = \int_A y(\sigma dA) = 0$$

Mantendo as hipóteses anteriores, vem:

$$M_p = \int_A y \left(\frac{M}{I} z \right) dA = \frac{M}{I} \int_A y z dA = 0 = \frac{M}{I} I_{yz} = 0$$

condição que só prevalece quando o momento centrífugo I_{yz} for igual a zero, ou seja, quando o sistema de referencia for aquele formado pelos eixos centrais principais de inércia. Portanto, a fórmula fundamental só vale neste sistema especial de eixos.

5) Flexão Simples Reta

Quando há uma força cortante V na seção, além do momento fletor M , a hipótese de Navier não vale mais, isto é, as seções *empenam*, deixando de ser planas. As deformações, no entanto, continuam sendo lineares, como mostra a figura 4-7. Assim, as considerações feitas até aqui, relativas às tensões normais no caso da flexão pura, não se alteram na flexão simples. Em outras palavras: a presença da força cortante não altera a distribuição das tensões normais causadas pelo momento fletor. Mas a recíproca não vale: a existência de um momento fletor faz com que a distribuição das tensões de cisalhamento na seção, devidas à força cortante, seja variável, isto é, $\tau \neq (V/A)$, como será visto no fascículo 6.

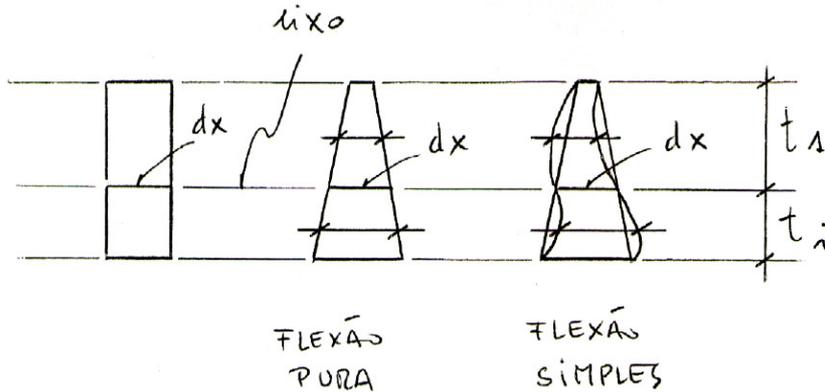


Figura 4 - 7

6) Exemplos de aplicação

1º exemplo) Definir a seção transversal da viga da figura 4-8 para as formas de seção mostradas. Comparar o consumo de material nos diversos casos. (são dadas as tensões admissíveis: $\bar{\sigma}_T = \bar{\sigma}_C = \bar{\sigma} = 80 \text{ kgf/cm}^2$)

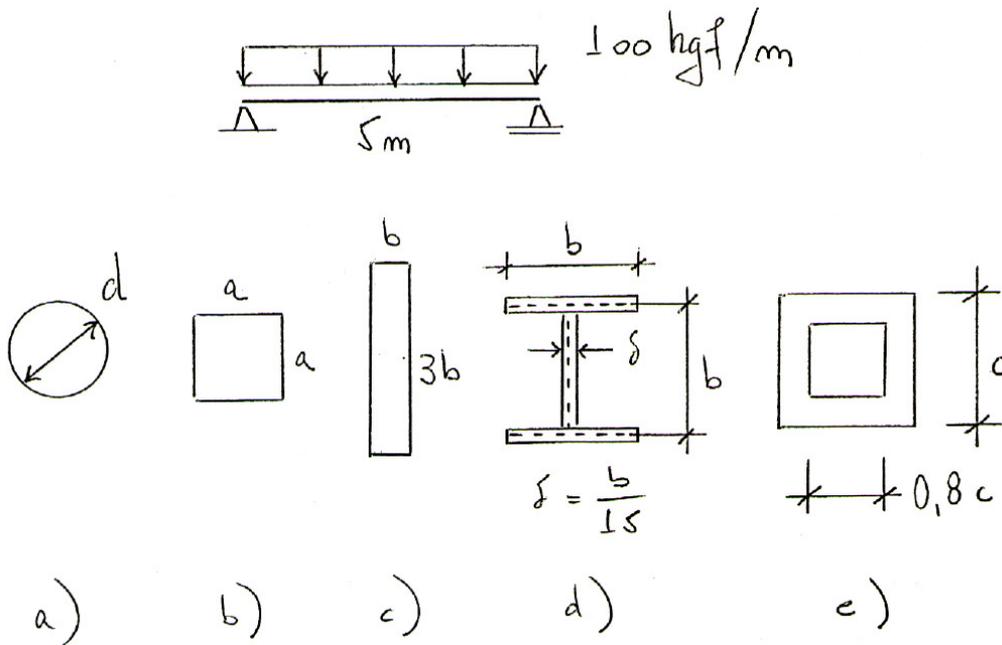


Figura 4 - 8

Resolução: $M_{\text{máx}} = \frac{p L^2}{8} = \frac{1 (500)^2}{8} = 31.250 \text{ kgf cm}$

O módulo de resistência necessário vale: $W = \frac{M}{\bar{\sigma}} = \frac{31.250}{80} = 390,625 \text{ cm}^3$

a) $W = \frac{\pi d^4}{64} \left(\frac{2}{d} \right) = \frac{\pi d^3}{32} = 390,625 \Rightarrow d = 15,85 \text{ cm}$

b) $W = \frac{a^4}{12} \left(\frac{2}{a} \right) = \frac{a^3}{6} = 390,625 \Rightarrow a = 13,28 \text{ cm}$

c) $W = \frac{b(3b)^3}{12} \left(\frac{2}{3b} \right) = \frac{3b^3}{2} = 390,625 \Rightarrow b = 6,386 \text{ cm}$

d) $I = \frac{\delta b^3}{12} + 2(b\delta) \left(\frac{b}{2} \right)^2 = \frac{7}{12} \delta b^3 = \frac{7}{180} b^4$

$$W = \frac{7b^4}{180} \left(\frac{2}{b} \right) = \frac{7b^3}{90} = 390,625 \Rightarrow b = 17,12 \text{ cm}$$

e) $I = \frac{c^4}{12} - \frac{(0,8c)^4}{12} = 0,0492c^4$

$$W = 0,0492c^4 \left(\frac{2}{c} \right) = 0,0984c^3 = 390,625 \Rightarrow c = 15,83 \text{ cm}$$

Comparação do consumo (por meio das áreas):

a) $A = \frac{\pi d^2}{4} = 197,21 \text{ cm}^2$

b) $A = a^2 = 176,44 \text{ cm}^2$

c) $A = 3b^2 = 122,34 \text{ cm}^2$

d) $A = 3b\delta = \frac{b^2}{5} = 58,65 \text{ cm}^2$

e) $A = c^2 - (0,8c)^2 = 0,36c^2 = 90,21 \text{ cm}^2$

Portanto, a seção mais econômica é a seção **I**, do item d), enquanto que a mais dispendiosa é a seção circular maciça, resultados já esperados.

2º exemplo) Para a tora de madeira da figura 4-9, de diâmetro D, quais os valores de B e H que resultam na viga mais resistente?

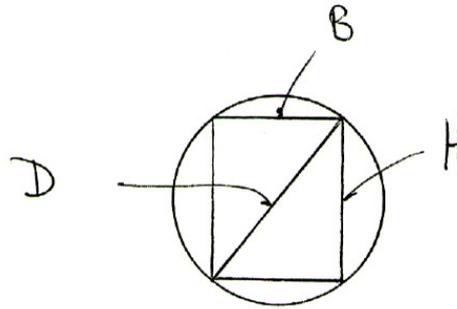


Figura 4 - 9

Resolução:
$$W = \frac{BH^3}{12} \left(\frac{2}{H} \right) = \frac{BH^2}{6} = \frac{B}{6} (D^2 - B^2) = \frac{BD^2 - B^3}{6}$$

$$\frac{dW}{dB} = 0 \Rightarrow D^2 - 3B^2 = 0 \Rightarrow B = \frac{D\sqrt{3}}{3}$$

$$H = \sqrt{D^2 - B^2} \Rightarrow H = \frac{D\sqrt{6}}{3}$$

Observação: é possível também resolver este problema usando multiplicadores de Lagrange (problemas de extremos condicionados).

3º exemplo) Achar a altura racional h da seção da figura 4-10, para a relação: $\frac{\bar{\sigma}_T}{\bar{\sigma}_c} = \frac{1}{3}$

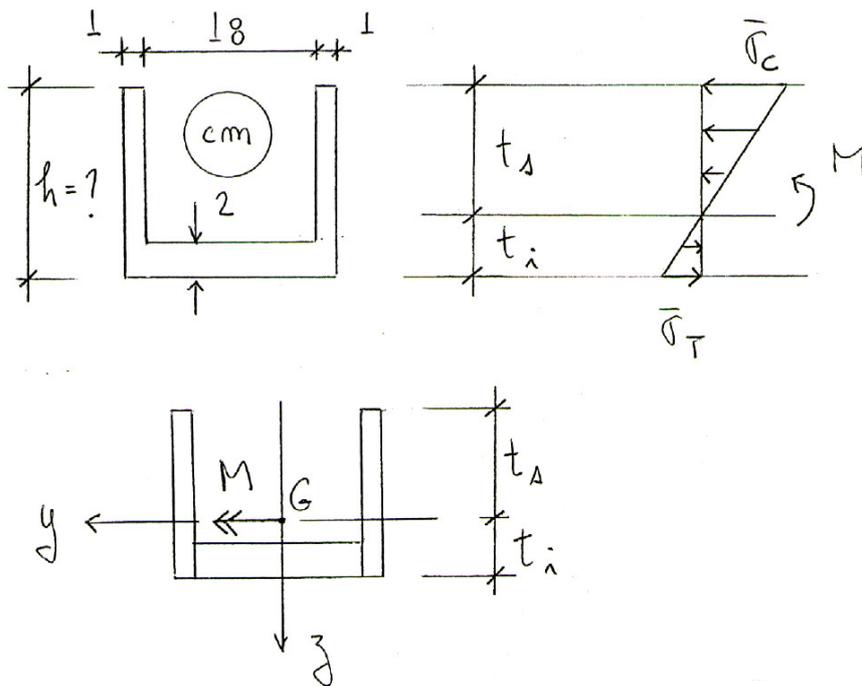


Figura 4 - 10

Resolução: Altura racional de uma seção, para um dado material, é aquela altura para a qual as tensões extremas coincidem com as tensões admissíveis do material.

Da condição da altura ser a racional resulta que: $\frac{t_i}{t_s} = \frac{1}{3}$.

A outra condição a ser imposta é que o momento estático da figura seja nulo em relação ao eixo horizontal y:

$$Q_y = -2(1)(t_s)\frac{t_s}{2} + 2(1)(t_i)\frac{t_i}{2} + 18(2)(t_i - 1) = 0$$

Introduzindo $t_s = 3t_i$ na expressão acima, obtém-se duas soluções possíveis:

$$2t_i^2 - 9t_i + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t_i = 3 \Rightarrow t_s = 9 \Rightarrow h = 12 \text{ cm} \\ t_i = 1,5 \Rightarrow t_s = 4,5 \Rightarrow h = 6 \text{ cm} \end{cases}$$

4º exemplo) Achar a resultante F^* das tensões de tração na região hachurada A^* da seção da figura 4-11.

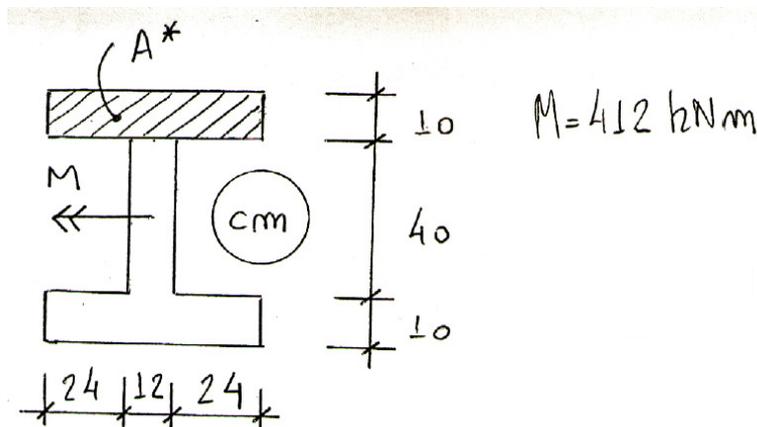


Figura 4 – 11

Resolução:
$$I = \frac{60^4}{12} - 2 \left[\frac{24(40)^3}{12} \right] = 824.000 \text{ cm}^4$$

$$F^* = \int_{A^*} \sigma dA = \frac{M}{I} \int_{A^*} z dA = \frac{M}{I} Q_y^* = \frac{41.200}{824.000} (600)25 = 750 \text{ kN}$$

5º exemplo) Para a viga da figura 4-12, achar o valor mínimo necessário para a dimensão a .

São dadas as tensões admissíveis do material que compõe a viga:

$\bar{\sigma}_T = 25 \text{ kgf/cm}^2$ e $\bar{\sigma}_C = 75 \text{ kgf/cm}^2$. Desprezar o peso próprio da viga.

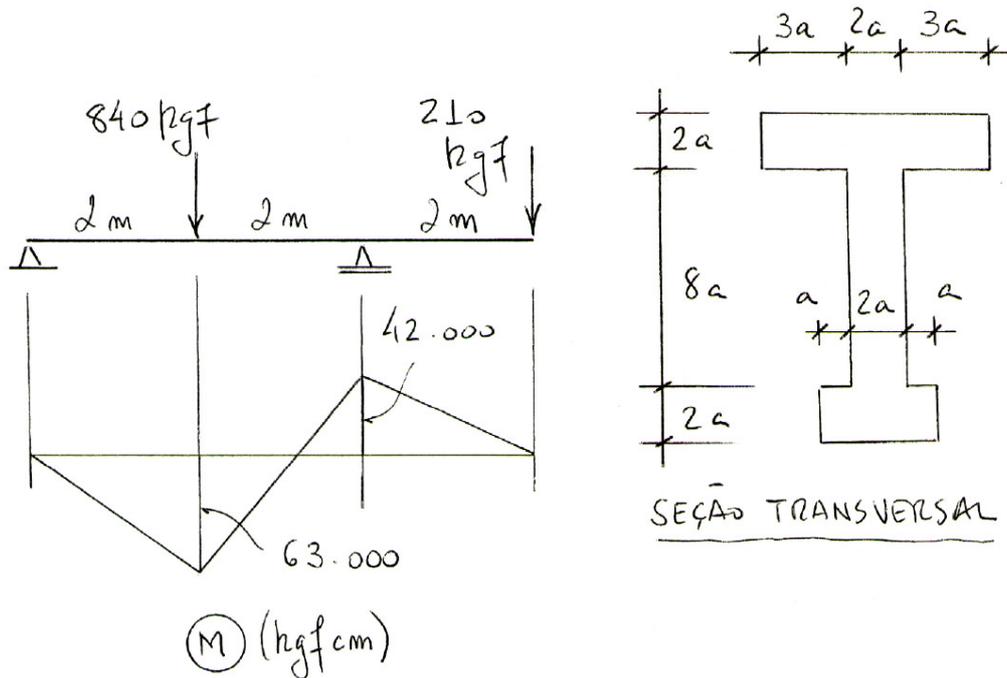


Figura 4 – 12

Resolução: As características geométricas da seção transversal são as seguintes, em função da incógnita **a** (verificar os cálculos):

$$t_s = 5a \quad , \quad t_i = 7a \quad , \quad I = \frac{1.960}{3}a^4 \quad , \quad W_s = \frac{392}{3}a^3 \quad \text{e} \quad W_i = \frac{280}{3}a^3$$

O diagrama de momentos fletores pode ser traçado, e o resultado se encontra na figura 4-12. As seções transversais candidatas à seção crítica são a seção do apoio da direita e a seção a meio vão. Vamos verificar o que acontece nas fibras superior e inferior dessas duas seções.

Seção do apoio da direita ($M = 42.000 \text{ kgf cm}$, tração em cima):

$$\sigma_s = \frac{M}{W_s} = \frac{42.000 (3)}{392 a^3} \leq 25 \quad \Rightarrow \quad a \geq 2,35 \text{ cm}$$

$$\sigma_i = \frac{M}{W_i} = \frac{42.000 (3)}{280 a^3} \leq 75 \quad \Rightarrow \quad a \geq 1,82 \text{ cm}$$

Seção do meio vão ($M = 63.000 \text{ kgf cm}$, tração em baixo):

$$\sigma_s = \frac{M}{W_s} = \frac{63.000 (3)}{392 a^3} \leq 75 \quad \Rightarrow \quad a \geq 1,86 \text{ cm}$$

$$\sigma_i = \frac{M}{W_i} = \frac{63.000 (3)}{280 a^3} \leq 25 \quad \Rightarrow \quad a \geq 3 \text{ cm}$$

Observando os quatro resultados acima, vemos que a resposta do problema é $a = 3 \text{ cm}$, porque este é o menor valor que satisfaz simultaneamente às quatro condições. Assim, o ponto crítico da viga situa-se na fibra inferior da seção do meio vão.

6º exemplo) Dispõem-se de 3 barras prismáticas de madeira, de seção retangular ($8 \times 24 \text{ cm}^2$), e comprimento igual a 4 metros. Com elas podem ser montadas pelo menos 4 vigas diferentes, cujas seções transversais estão mostradas na figura 4-13. Pede-se o valor máximo admissível para a carga P , em cada caso. É dada a tensão normal admissível da madeira: $\bar{\sigma} = 60 \text{ kgf/cm}^2$ (tração ou compressão). Desprezar o peso próprio da viga.

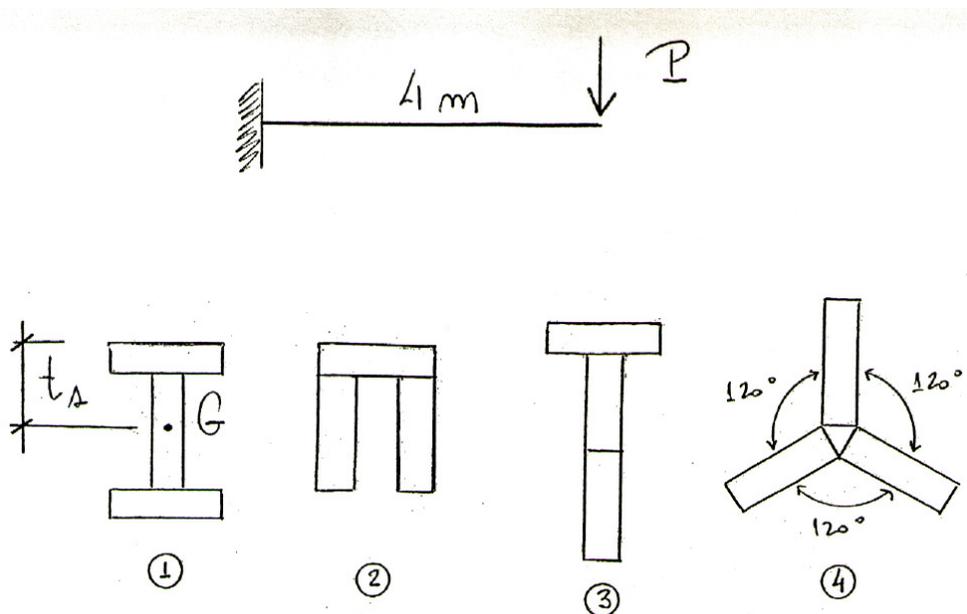


Figura 4 – 13

Resolução: $W \geq \frac{M}{\bar{\sigma}} = \frac{400 P}{60} \Rightarrow P \leq 0,15 W$

CASO	t_s (cm)	I (cm^4)	W (cm^3)	$P_{\text{máx}}$ (kgf)
1	20	109.568	5.478	822
2	14,666...	52.224	3.013	452
3	22,666...	175.104	5.253	788
4	26,3094	74.331	2.825	424

Comentário sobre o caso 4

Como há 3 eixos de simetria, qualquer eixo central é principal de inércia. O centróide da seção coincide com o centróide do triângulo equilátero situado no núcleo da figura.

Calcula-se o momento polar de cada peça (o qual é a soma dos momentos de inércia), e translada-se para o centróide geral, usando o teorema de Steiner. Multiplica-se o resultado por 3 e tem-se o momento polar da seção composta.

Divide-se o momento polar da seção por 2 e tem-se o momento de inércia. Para achar o módulo de resistência, lembrar que a fibra superior é a mais solicitada ($W_s < W_i$, já que $t_s > t_i$).

7) Braço de alavanca das tensões (este item é opcional numa primeira leitura)

Seja, na figura 4-14, uma seção sujeita a um momento fletor M.

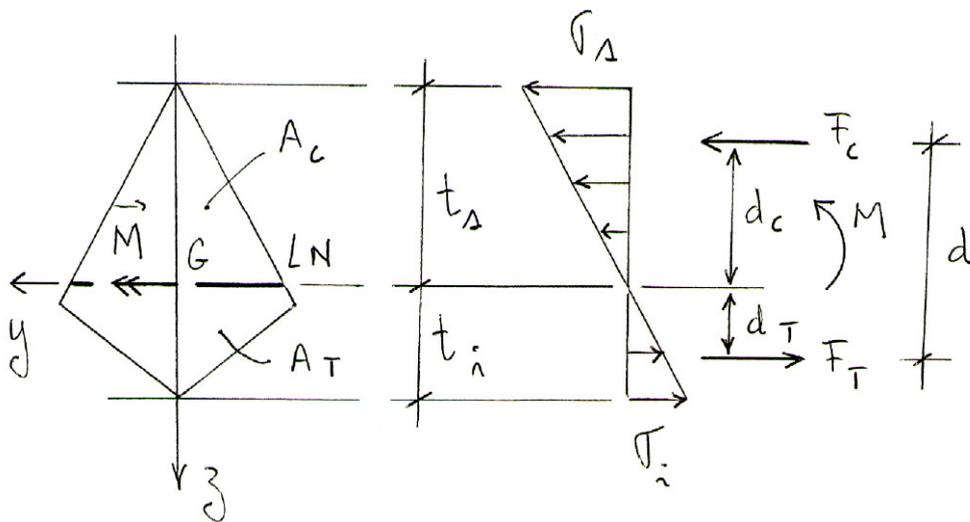


Figura 4 – 14

As resultantes das tensões de tração e compressão são dadas por:

$$F_T = \int_{A_T} \sigma dA = \frac{M}{I} \int_{A_T} z dA = \frac{M}{I} Q_T$$

$$F_C = - \int_{A_C} \sigma dA = - \frac{M}{I} \int_{A_C} z dA = - \frac{M}{I} Q_C$$

sendo A_T a área tracionada da seção (abaixo da LN) e A_C a área comprimida (acima da LN). Como a relação entre os respectivos momentos estáticos é:

$$Q_T = -Q_C = Q \quad , \quad \text{segue-se que:} \quad F_T = F_C = F = \frac{M}{I} Q$$

Por outro lado, igualando os momentos, obtêm-se:

$$F_T d_T = F d_T = \int_{A_T} z(\sigma dA) = \frac{M}{I} \int_{A_T} z^2 dA = \frac{M}{I} I_T$$

$$F_C d_C = F d_C = \int_{A_C} z(\sigma dA) = \frac{M}{I} \int_{A_C} z^2 dA = \frac{M}{I} I_C$$

Somando as duas expressões acima, membro a membro, obtêm-se:

$$F(d_T + d_C) = \frac{M}{I}(I_T + I_C) \quad \text{ou} \quad F d = M$$

Também se pode escrever, considerando que $F I = M Q$:

$$d_T = \frac{M}{F I} I_T \quad \Rightarrow \quad d_T = \frac{I_T}{Q}$$

$$d_C = \frac{M}{F I} I_C \quad \Rightarrow \quad d_C = \frac{I_C}{Q}$$

$$\Rightarrow \quad d_T + d_C = \frac{I_T + I_C}{Q} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{I}{Q}}$$

O braço de alavanca \mathbf{d} é uma grandeza que depende apenas da geometria da seção transversal. É desejável que a seção tenha o maior braço de alavanca possível, pois isso se traduz em eficiência no combate a momentos fletores.

Exemplo de ilustração:

Considerando-se um triângulo isósceles de base $b = 36$ cm e altura $h = 48$ cm, pode-se escrever:

$$I = \frac{36(48)^3}{36} = 110.592 \text{ cm}^4, \quad Q = \frac{1}{2}(24)(32)\frac{32}{3} = 4.096 \text{ cm}^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{I}{Q} = 27 \text{ cm}}$$

Os cálculos também levam a (verificar): $d_C = \frac{I_C}{Q} = 16$ cm e $d_T = \frac{I_T}{Q} = 11$ cm

Parte II – Flexão composta reta

8) Flexão Composta Reta

Quando há, além do momento fletor, uma força normal (de tração ou compressão), podemos escrever, pelo Princípio da Superposição dos Efeitos:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} z$$

A presença da força normal faz com que a linha neutra (LN) sofra uma translação para cima ou para baixo, conforme a natureza da força normal. A equação da linha neutra deixa de ser $z = 0$ e passa a ser escrita como ($\sigma = 0$):

$$z = -\left(\frac{N}{A}\right)\left(\frac{I}{M}\right)$$

A introdução da segurança se faz pelas expressões:

$$\sigma_i = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} t_i = \frac{N}{A} + \frac{M}{W_i} \leq \bar{\sigma}_T$$

$$\sigma_s = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} (-t_s) = \frac{N}{A} - \frac{M}{W_s} \geq -\bar{\sigma}_C$$

Caso particular

Quando o momento fletor é constante ao longo da barra, a força cortante vale zero. Neste caso, a flexão composta reta passa a se chamar *tração ou compressão excêntricas*, conforme o sinal da força normal (figura 4-15). A distância do ponto de aplicação da força normal até o centróide se chama *excentricidade* (e). Como a flexão é reta (e não oblíqua), a excentricidade é paralela a um dos eixos centrais principais de inércia.

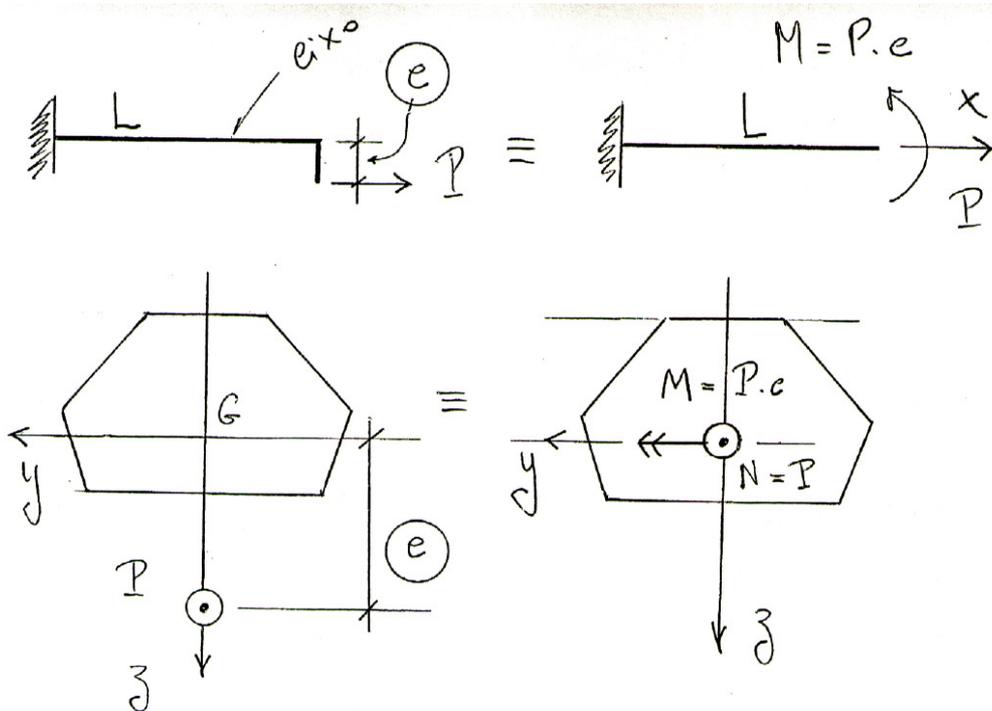


Figura 4 - 15

1º exemplo) O material da viga da figura 4-16 tem as seguintes tensões normais admissíveis: $\bar{\sigma}_T = 0$ e $\bar{\sigma}_C = 300 \text{ kgf/cm}^2$. A força **P** está aplicada sobre o eixo de simetria da seção, abaixo do centróide. Pedem-se:

- valor máximo possível da excentricidade **e**
- valor da força **P** (para **e** calculado no item anterior) que permite aplicar a maior carga **q**. Qual é este maior valor de **q**?

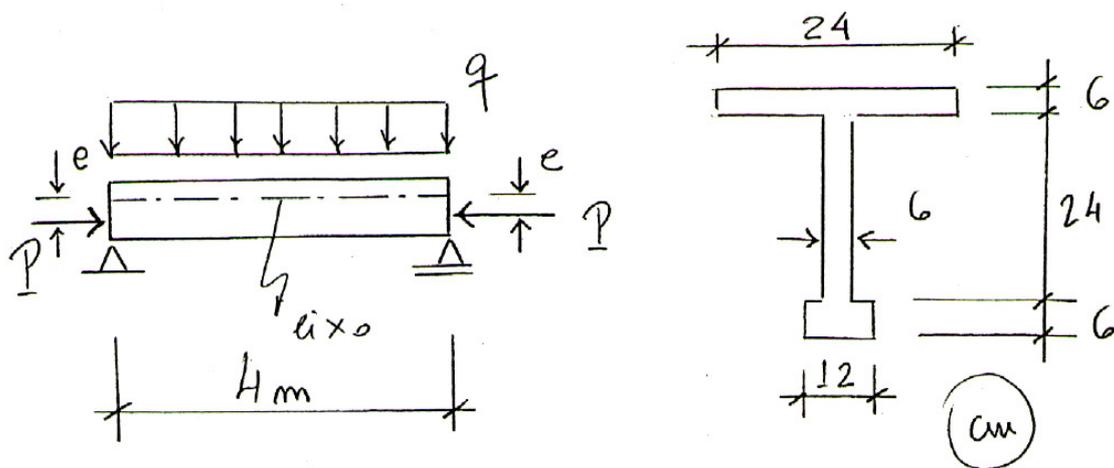


Figura 4 - 16

Resolução:

Com a notação da figura 4-3, temos, após alguns cálculos (o estudante deve verificar a exatidão destes resultados):

$$t_i = 21 \text{ cm} \quad , \quad t_s = 15 \text{ cm} \quad , \quad A = 360 \text{ cm}^2 \quad , \quad I = 52.920 \text{ cm}^4$$

Seção do apoio:

$$\sigma_s = \frac{-P}{360} + \frac{-P(e)}{52.920} (-15) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = 9,8 \text{ cm}}$$

$$\sigma_i = \frac{-P}{360} + \frac{-P(9,8)}{52.920} (21) = -300 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = 45.000 \text{ kgf}}$$

Seção a meio vão:

$$\sigma_s = 0 + \frac{20.000 q}{52.920} (-15) = -300 \quad \Rightarrow \quad q = 52,92 \text{ kgf / cm}$$

$$\sigma_i = -300 + \frac{20.000 q}{52.920} (21) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = 37,8 \text{ kgf / cm}} \quad (\text{resposta})$$

2º exemplo) A seção da figura 4-17 está sujeita a uma tração excêntrica. Achar o valor da distância x para que a linha neutra (LN) fique na posição indicada.

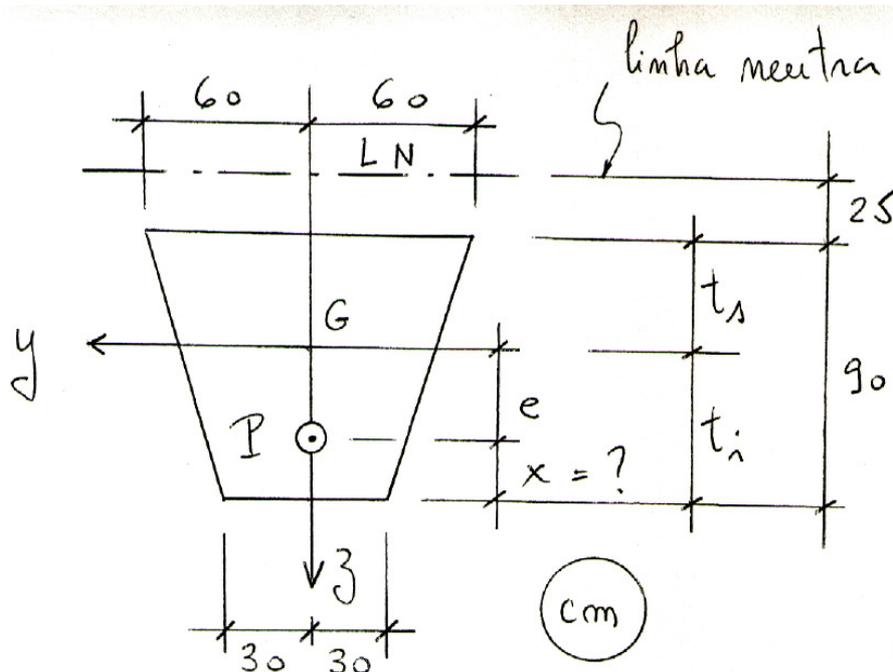


Figura 4 - 17

Resolução: com a notação da figura 4-3, temos, após fazer alguns cálculos:

$$t_i = 50 \text{ cm} \quad , \quad t_s = 40 \text{ cm} \quad , \quad A = 8.100 \text{ cm}^2 \quad , \quad I = 5.265.000 \text{ cm}^4$$

Para a linha neutra podemos escrever:

$$\sigma = \frac{P}{8.100} + \frac{P e}{5.265.000} (-65) = 0 \quad \Rightarrow \quad e = 10 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 40 \text{ cm}}$$

Observe-se que o resultado não depende do valor da carga P.

ANEXO

Vigas compostas

Vigas compostas são vigas constituídas por dois ou mais materiais. Este anexo consiste numa introdução ao estudo das vigas compostas sujeitas à flexão simples reta.

Como exemplo de aplicação na engenharia aeronáutica, temos as chamadas *vigas-sanduiche*, que são formadas por duas placas metálicas atuando como mesas de tração e compressão, separadas entre si por um material leve de enchimento. São elementos estruturais de boa resistência e rigidez, e de baixíssimo peso, como convém na aviação. Na engenharia civil temos as chamadas vigas *mistas* de concreto e aço, usadas na construção de pontes.

Na figura 4-18 apresentamos, como exemplo numérico, a seção de uma viga composta por dois materiais (1) e (2), e sujeita a um momento fletor $M = 4.527.360 \text{ kgf cm}$. Os módulos de elasticidade valem: $E_1 = 700.000 \text{ kgf/cm}^2$ e $E_2 = 3.500.000 \text{ kgf/cm}^2$.

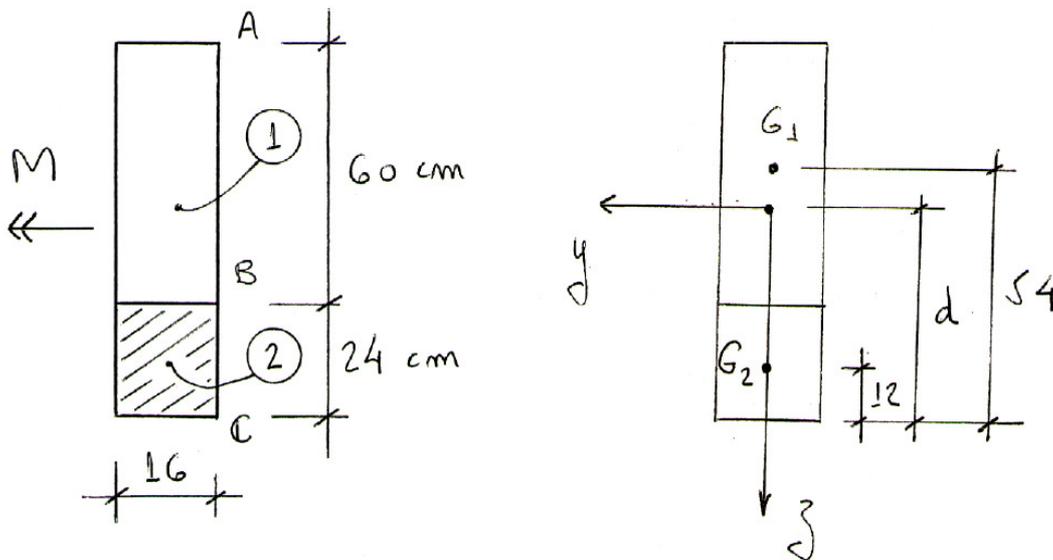


Figura 4 – 18

Nas vigas compostas veremos que o eixo horizontal y , que define a *linha neutra* ($\sigma = 0$), já não passa mais pelo centróide da seção. Entretanto, a hipótese de Navier continua valendo, isto é: as seções se mantêm planas, e as deformações são dadas pela equação de compatibilidade:

$$\boxed{\varepsilon = \kappa z}$$

onde κ é a curvatura da viga. Introduzindo a compatibilidade na Lei de Hooke, para ambos os materiais, obtemos:

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = E_1 \kappa z$$

$$\sigma_2 = E_2 \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \sigma_2 = E_2 \kappa z$$

Como não há força normal, a resultante das tensões deve ser nula:

$$\int_{A_1} \sigma_1 dA + \int_{A_2} \sigma_2 dA = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{E_1 \int_{A_1} z dA + E_2 \int_{A_2} z dA = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{E_1 (Q_y)_1 + E_2 (Q_y)_2 = 0}$$

A equação acima nos permite achar a posição do eixo horizontal y . Ela quer dizer que a soma dos momentos estáticos das diversas regiões, ponderados pelos correspondentes módulos de elasticidade, vale zero.

Tendo a posição do eixo horizontal, podemos igualar os momentos em relação a ele, obtendo a curvatura da viga na seção em estudo:

$$\int_{A_1} z(\sigma_1 dA) + \int_{A_2} z(\sigma_2 dA) = M \quad \Rightarrow \quad E_1 \kappa \int_{A_1} z^2 dA + E_2 \kappa \int_{A_2} z^2 dA = M$$

$$\Rightarrow \boxed{\kappa = \frac{M}{E_1 I_1 + E_2 I_2}}$$

A curvatura κ governa as deformações da viga. Ela é, como veremos, fundamental na determinação da equação da linha elástica (fascículo 7).

Finalmente, as tensões ficam:

$$\sigma_1 = E_1 \kappa z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_1 = E_1 \left(\frac{M}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \right) z}$$

$$\sigma_2 = E_2 \kappa z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_2 = E_2 \left(\frac{M}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \right) z}$$

O processo de cálculo se estende naturalmente quando há 3 ou mais materiais. Quando a viga é constituída por apenas um material, as expressões acima simplificam-se e se transformam naquelas já conhecidas ($E_1 = E_2 = E$):

$$\int_A z dA = 0 \quad , \quad \kappa = \frac{M}{EI} \quad , \quad \sigma = \frac{M}{I} z$$

Exemplo de aplicação

Voltando à seção da figura 4-18, devemos, em primeiro lugar, achar a posição do eixo horizontal y , por meio da seguinte condição:

$$E_1 (Q_y)_1 + E_2 (Q_y)_2 = 0$$

As áreas são $A_1 = 16 (60) = 960 \text{ cm}^2$ e $A_2 = 16 (24) = 384 \text{ cm}^2$. Portanto, de acordo com a figura 4-18, a distância d é calculada como:

$$700.000 (960) (d - 54) + 3.500.000 (384) (d - 12) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = 26 \text{ cm}}$$

O assim chamado *produto de rigidez equivalente* fica:

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 = 700.000 \left[\frac{16(60)^3}{12} + 960 (28)^2 \right] + 3.500.000 \left[\frac{16(24)^3}{12} + 384 (14)^2 \right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_1 I_1 + E_2 I_2 = 1,056384 (10)^{12} \text{ kgf cm}^2}$$

As tensões são dadas, em função da ordenada z , por:

$$\sigma_1 = E_1 \left(\frac{M}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \right) z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_1 = 3 z} \quad (\text{material 1})$$

$$\sigma_2 = E_2 \left(\frac{M}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \right) z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_2 = 15 z} \quad (\text{material 2})$$

No ponto A: $\sigma_1 = 3(-58) = -174 \text{ kgf / cm}^2$

No ponto B: $\sigma_1 = 3(2) = 6 \text{ kgf / cm}^2$

$$\sigma_2 = 15(2) = 30 \text{ kgf / cm}^2$$

No ponto C: $\sigma_2 = 15(26) = 390 \text{ kgf / cm}^2$

No ponto B, interface de separação entre os dois materiais, há uma descontinuidade no diagrama de tensões, apesar das deformações serem contínuas.

Observação: Existe um processo de cálculo alternativo, o qual pode ser deduzido das expressões acima, que utiliza a chamada *seção homogeneizada*, isto é, a seção modificada constituída de apenas um material, que pode ser, no caso do exemplo, o material (1) ou o material (2). A seguir faremos uma rápida exposição desse método.

Método da seção homogeneizada

Na seção da figura 4-18, escolhe-se qualquer um dos dois materiais para homogeneizar a seção. Vamos eleger, por exemplo, o material (1). Calcula-se então o seguinte coeficiente:

$$n = \frac{E_2}{E_1}$$

A condição usada para determinar o eixo horizontal fica:

$$E_1 (Q_y)_1 + E_2 (Q_y)_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (Q_y)_1 + n (Q_y)_2 = 0 \quad (a)$$

e as tensões passam a ser dadas por:

$$\sigma_1 = E_1 \left(\frac{M}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \right) z \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = \left(\frac{M}{I_1 + n I_2} \right) z \quad (b)$$

$$\sigma_2 = E_2 \left(\frac{M}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \right) z \quad \Rightarrow \quad \sigma_2 = n \left(\frac{M}{I_1 + n I_2} \right) z \quad (c)$$

O exame das expressões (a), (b) e (c) sugere que a seção homogeneizada seja formada pela região constituída pelo material (1) acrescentada à região formada pelo material (2), tendo esta última multiplicadas as suas dimensões horizontais pelo fator n .

Determinam-se as características geométricas da seção homogeneizada, bem como as tensões, como se faria normalmente no caso de um material único.

Finalmente, as tensões na seção real serão, na região (1), as mesmas da seção homogeneizada, e, na região (2), as da seção homogeneizada multiplicadas pelo fator n .

Na figura 4-19 mostra-se a seção homogeneizada com base no material (1).

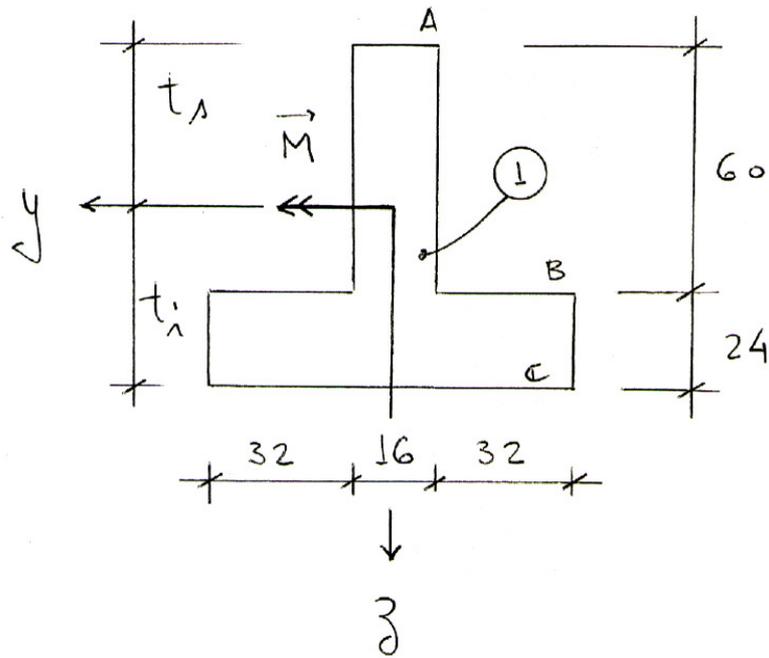


Figura 4 – 19

O fator **n** vale:

$$n = \frac{E_2}{E_1} = \frac{3.500.000}{700.000} = 5$$

e as características geométricas da seção homogeneizada são :

$$t_i = 26 \text{ cm} \quad , \quad t_s = 58 \text{ cm} \quad , \quad I = 1.509.120 \text{ cm}^4$$

$$\left(\text{notemos que } I = I_1 + n I_2 = \frac{E_1 I_1 + E_2 I_2}{E_1} \right)$$

Tensões na seção homogênea:

No ponto A: $\sigma = \frac{4.527.360}{1.509.120} (-58) = 3 (-58) = -174 \text{ kgf / cm}^2$

No ponto B: $\sigma = \frac{4.527.360}{1.509.120} (2) = 3 (2) = 6 \text{ kgf / cm}^2$

No ponto C: $\sigma = \frac{4.527.360}{1.509.120} (26) = 3 (26) = 78 \text{ kgf / cm}^2$

Tensões na seção real:

No ponto A: $\sigma_1 = -174 \text{ kgf / cm}^2$

No ponto B: $\sigma_1 = 6 \text{ kgf / cm}^2$

$$\sigma_2 = 30 \text{ kgf / cm}^2$$

No ponto C: $\sigma_2 = 390 \text{ kgf / cm}^2$

Método da seção homogeneizada – Generalização

Quando há vários materiais diferentes, podemos generalizar o método da seção homogeneizada. Primeiro escolhe-se um qualquer dos materiais para compor a seção homogeneizada (o material escolhido é chamado de *material base*). A seção homogeneizada é então obtida da seção original multiplicando-se, para cada material (*i*), as dimensões horizontais pelo índice:

$$n_i = \frac{E_i}{E_{\text{base}}}$$

Em seguida determinam-se as características geométricas da seção homogeneizada (posição do centróide e momento de inércia). A posição do centróide será sempre a mesma, independentemente do material escolhido como base. O momento de inércia da seção homogeneizada será chamado de *momento de inércia equivalente* (I_{eq}), e é igual ao produto de rigidez equivalente dividido pelo módulo de elasticidade do material base:

$$I_{\text{eq}} = \frac{(EI)_{\text{eq}}}{E_{\text{base}}} = \frac{E_1 I_1 + E_2 I_2 + \dots + E_i I_i + \dots}{E_{\text{base}}}$$

Finalmente, as tensões na seção original serão dadas, para o material (*i*), na fibra de ordenada *z*, pela expressão:

$$\sigma_i = \frac{M}{I_{\text{eq}}} \left(\frac{E_i}{E_{\text{base}}} \right) z$$

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESCOLA POLITÉCNICA

Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica

**CURSO BÁSICO DE
RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS**

FASCÍCULO Nº 5

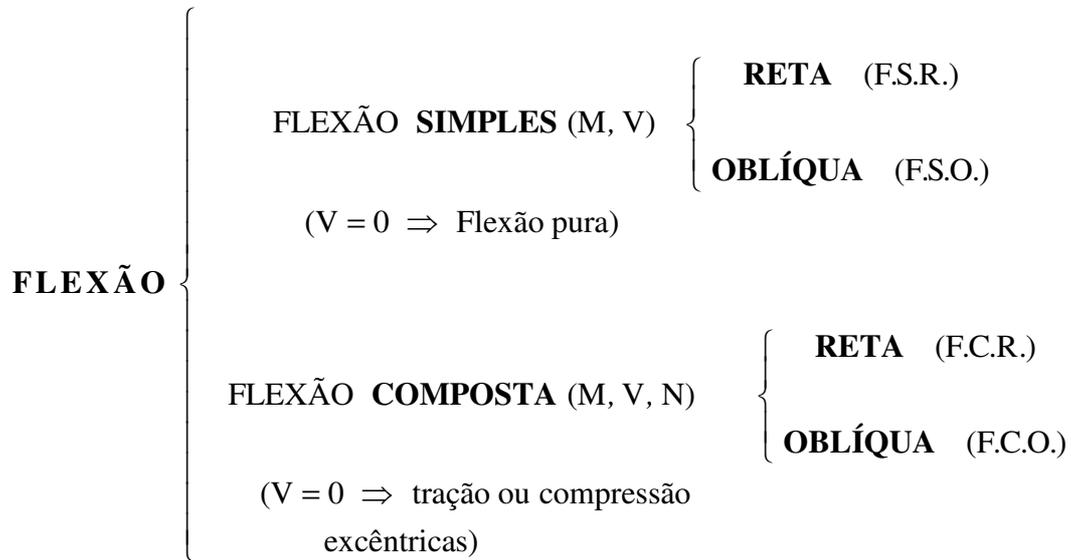
Flexão oblíqua

H. Britto

2.010

FLEXÃO OBLÍQUA

1) Quadro geral da flexão



2) Flexão Simples Oblíqua

A flexão é dita oblíqua quando há momento fletor atuando nos dois planos principais da viga. De acordo com a figura 5-1, e pelo Princípio da Superposição dos Efeitos, tem-se:

$$\sigma = \left(\frac{M_y}{I_y} \right) z - \left(\frac{M_z}{I_z} \right) y$$

onde o sinal (-) é um sinal corretivo, para levar em conta o fato de que, para um momento $M_z > 0$, haverá tração nos pontos de abscissa negativa ($y < 0$).

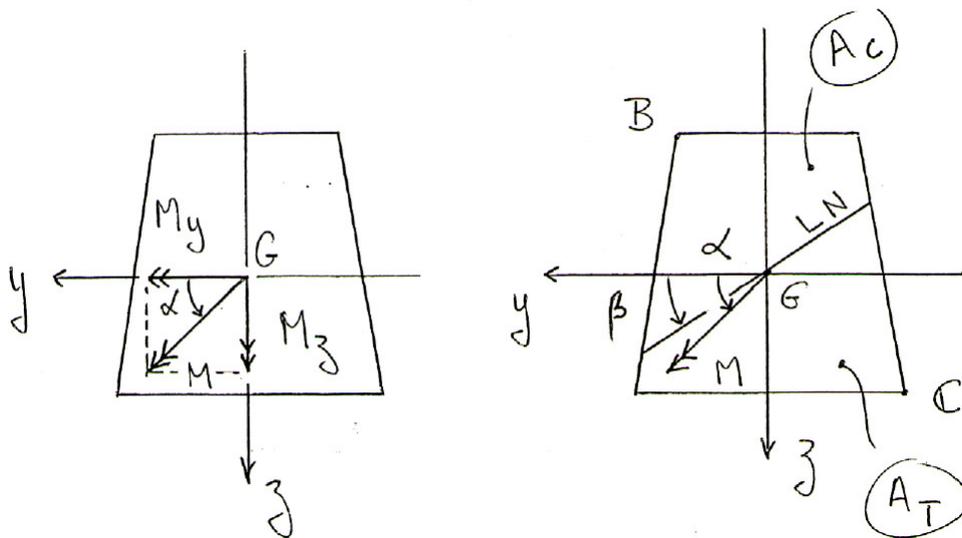


Figura 5 - 1

Para achar a equação da linha neutra (LN) basta fazer $\sigma = 0$, obtendo:

$$z = \left(\frac{M_z I_y}{M_y I_z} \right) y = (\text{tg } \beta) y$$

Ou seja, a linha neutra é uma reta que passa pelo centróide da seção e tem inclinação dada pelo ângulo β , cuja tangente trigonométrica vale (figura 5-1):

$$\text{tg } \beta = \frac{M_z I_y}{M_y I_z} = (\text{tg } \alpha) \frac{I_y}{I_z}$$

Verifica-se que $\alpha \neq \beta$, isto é, o vetor momento resultante M não é paralelo à linha neutra, como na flexão reta. Entretanto, quando $I_y = I_z$, tem-se $\alpha = \beta$, o que significa que a flexão é reta, e não oblíqua (pois neste caso qualquer eixo central é principal de inércia).

Observação: demonstra-se que numa mesma fibra, paralela à linha neutra, a tensão σ é constante e dada por (figura 5-2):

$$\sigma = \left(\frac{M_{LN}}{I_{LN}} \right) t$$

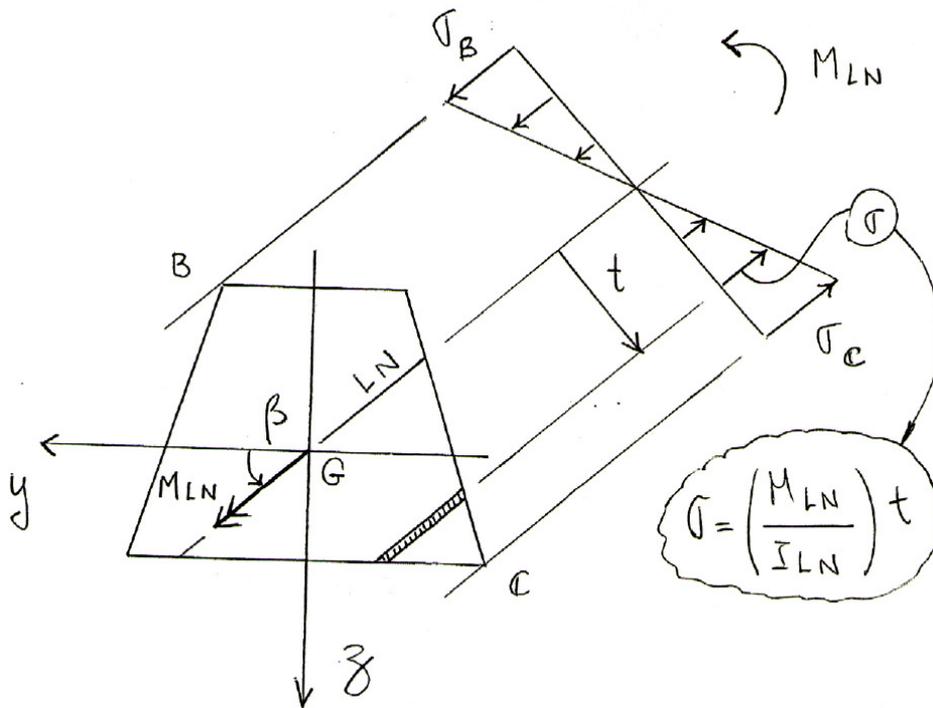


Figura 5 - 2

A expressão acima é uma generalização da que lhe corresponde na flexão reta. Nela (figura 5-1):

$$M_{LN} = M \cos(\alpha - \beta)$$

é a projeção do momento resultante na direção da linha neutra, e I_{LN} o momento de inércia da seção transversal em relação à linha neutra:

$$I_{LN} = I_y \cos^2 \beta + I_z \sin^2 \beta$$

e
$$t = z \cos \beta - y \sin \beta$$

é a distância da fibra até a linha neutra, conforme a figura 5-2 (a distância t pode ser calculada por meio das ordenadas y e z de um ponto qualquer da fibra). Assim, os pontos mais solicitados da seção são aqueles mais afastados da linha neutra, ou seja, o ponto C (máxima tração) e o ponto B (máxima compressão).

A demonstração da fórmula em questão se encontra no Anexo A.

Exemplos de aplicação

1º exemplo) Para a viga da figura 5-3, achar o valor da dimensão **a**. A tensão admissível do material vale: $\bar{\sigma}_T = \bar{\sigma}_C = \bar{\sigma} = 125 \text{ kgf/cm}^2$. Desprezar o peso da viga (*Prof. Diogo*)

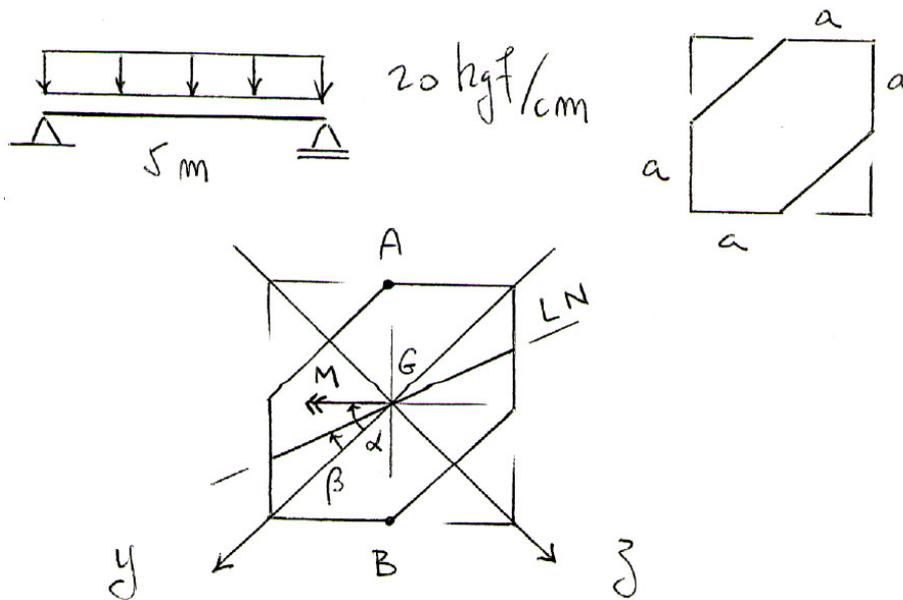


Figura 5 - 3

Resolução:
$$M = \frac{qL^2}{8} = \frac{20(500)^2}{8} = 625.000 \text{ kgf cm}$$

$$\alpha = -45^\circ \begin{cases} M_y = M \cos \alpha = M(\sqrt{2}/2) = 312.500\sqrt{2} \\ M_z = M \sin \alpha = M(-\sqrt{2}/2) = -312.500\sqrt{2} \end{cases}$$

$$I_y = \frac{(a\sqrt{2})^4}{12} + \frac{a^4}{12} = \frac{5a^4}{12}$$

$$I_z = \frac{(2a)^4}{12} - \frac{a^4}{12} = \frac{15a^4}{12} = \frac{5a^4}{4}$$

$$\sigma = \left(\frac{M_y}{I_y} \right) z - \left(\frac{M_z}{I_z} \right) y = \frac{312.500\sqrt{2}(12)}{5a^4} z - \frac{-312.500\sqrt{2}(4)}{5a^4} y$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{750.000\sqrt{2}}{a^4} z + \frac{250.000\sqrt{2}}{a^4} y$$

Equação da LN ($\sigma = 0$): $z = -\frac{1}{3}y \Rightarrow \text{tg} \beta = -0,333... \Rightarrow \beta = -18,435^\circ$

Pela posição da linha neutra, os pontos mais solicitados são o ponto A (máxima compressão) e o ponto B (máxima tração). Para o ponto B podemos escrever:

$$125 = \frac{750.000\sqrt{2}}{a^4} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{250.000\sqrt{2}}{a^4} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow \boxed{a = 20 \text{ cm}}$$

Observação: Um cálculo alternativo pode ser feito, como vimos, com o uso da fórmula

$$\sigma = \left(\frac{M_{LN}}{I_{LN}} \right) t$$

na qual: $M_{LN} = M \cos(\alpha - \beta) = 559.017 \text{ kgf cm}$

$$I_{LN} = I_y \cos^2\beta + I_z \sin^2\beta = a^4/2$$

$$t = z \cos\beta - y \sin\beta = 0,8944276 a \quad (\text{pt. B})$$

Logo: $\sigma_B = \left(\frac{M_{LN}}{I_{LN}} \right) t_B = 125 \Rightarrow \frac{1.000.000}{a^3} = 125 \Rightarrow a = 20 \text{ cm}$

2º exemplo) Para a viga da figura 5-4, achar o valor da dimensão **a**. A tensão admissível do material vale: $\bar{\sigma}_T = \bar{\sigma}_C = \bar{\sigma} = 900 \text{ kgf/cm}^2$. Desprezar o peso da viga.

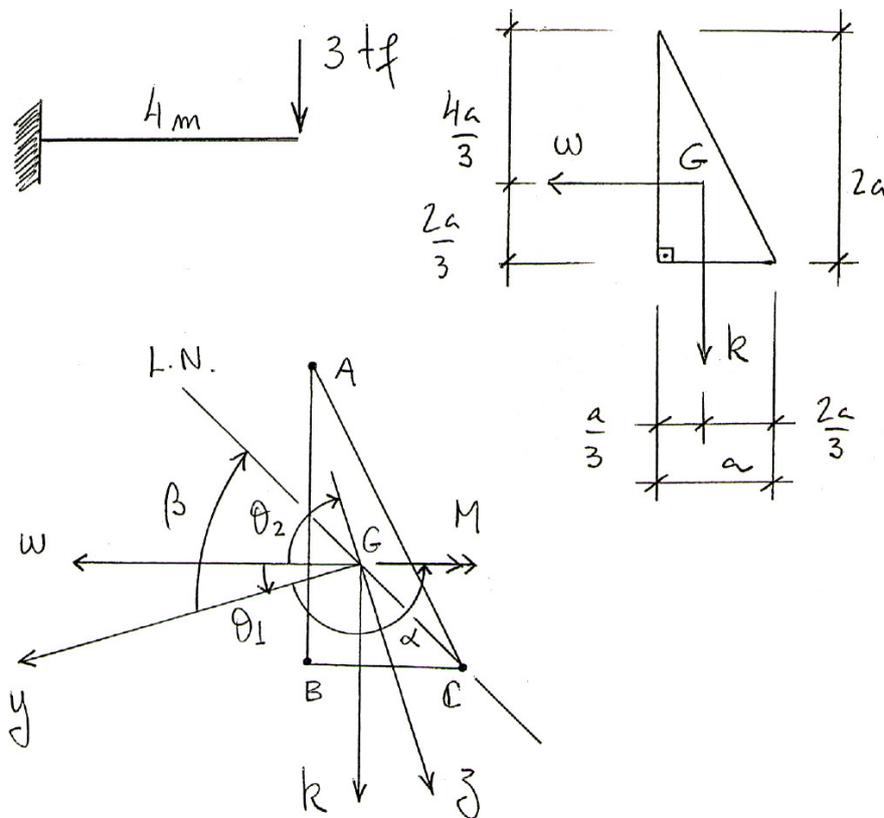


Figura 5 - 4

Resolução: A seção em questão não tem nenhum eixo de simetria. Portanto, o primeiro passo é achar os eixos centrais principais de inércia. Com relação ao sistema auxiliar de eixos (ω, k) , temos:

$$I_{\omega} = \frac{a(2a)^3}{36} = \frac{4}{18}a^4 = 0,222... a^4$$

$$I_k = \frac{2a(a)^3}{36} = \frac{1}{18}a^4 = 0,0555... a^4$$

$$I_{\omega k} = \frac{-a^2(2a)^2}{72} = -\frac{1}{18}a^4 = -0,0555... a^4$$

Com base nessas grandezas auxiliares, os momentos centrais principais são:

$$I_1 = \left(\frac{5 + \sqrt{13}}{36} \right) a^4 = 0,2390431 a^4 \quad (= I_y)$$

$$I_2 = \left(\frac{5 - \sqrt{13}}{36} \right) a^4 = 0,03873469 a^4 \quad (= I_z)$$

Os eixos centrais principais de inércia são dados por:

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{I_{\omega} - I_1}{I_{\omega k}} = 0,302776 \Rightarrow \theta_1 = 16,8450^\circ$$

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{I_{\omega} - I_2}{I_{\omega k}} = -3,302776 \Rightarrow \theta_2 = -73,1550^\circ$$

Na figura 5-4 estão indicados os eixos centrais principais. O momento fletor máximo vale:

$$M = 3.000(400) = 1.200.000 \text{ kgf cm}$$

O ângulo que define a direção do vetor momento, em relação ao sistema principal, é:

$$\alpha = 180 - \theta_1 = 163,155^\circ$$

As componentes do vetor momento, no sistema principal, são:

$$M_y = M \cos \alpha = -1.148.510 \text{ kgfcm}$$

$$M_z = M \operatorname{sen} \alpha = 347.740 \text{ kgfcm}$$

Com os elementos já obtidos, temos a tensão normal na seção:

$$\sigma = \left(\frac{M_y}{I_y} \right) z - \left(\frac{M_z}{I_z} \right) y \Rightarrow \boxed{\sigma \cong - \left(\frac{4.804.615}{a^4} \right) z - \left(\frac{8.977.482}{a^4} \right) y}$$

A inclinação da linha neutra, em relação ao sistema principal, é dada por (figura 5-4):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{M_z I_y}{M_y I_z} = (\operatorname{tg} \alpha) \frac{I_y}{I_z} = -1,8685125 \Rightarrow \beta = -61,8450^\circ$$

Pela inclinação da L.N. vemos que os pontos mais solicitados são o ponto A (máxima tração) e o ponto B (máxima compressão). É fácil verificar, também, que o ponto C pertence à linha neutra. Lembrando que:

$$\begin{cases} y = \omega \cos \theta_1 + k \operatorname{sen} \theta_1 = 0,957092 \omega + 0,289783 k \\ z = k \cos \theta_1 - \omega \operatorname{sen} \theta_1 = 0,957092 k - 0,289783 \omega \end{cases}$$

Vêm:

$$\begin{cases} \omega_A = a/3 \\ k_A = -(4a/3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_A = -0,0673466 a \\ z_A = -1,372717 a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_B = a/3 \\ k_B = 2a/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_B = 0,512219 a \\ z_B = 0,541467 a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_C = -(2a/3) \\ k_C = 2a/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_C = -0,444872 a \\ z_C = 0,83125 a \end{cases}$$

donde se obtêm as tensões nos vértices da seção:

$$\sigma_C = 0, \quad \sigma_A = \frac{7.200.000}{a^3} \quad \text{e} \quad \sigma_B = - \frac{7.200.000}{a^3}$$

Igualando a tensão em A à tensão admissível, vem, finalmente:

$$\frac{7.200.000}{a^3} = 900 \Rightarrow \boxed{a = 20 \text{ cm}}$$

Observação:

É surpreendente que, no sistema auxiliar (ω, k) , a expressão da tensão fique bem mais simples neste caso. O sistema (ω, k) é um sistema central, embora não seja o principal. Então, de acordo com o Anexo B, considerando o primeiro nível de simplificação, e após algumas passagens algébricas, chegamos à fórmula:

$$\sigma = - \left(\frac{7.200.000}{a^4} \right) (\omega + k)$$

com a qual fica bem mais fácil achar a linha neutra e as tensões nos vértices A, B e C.

3) Flexão composta oblíqua

Acrescentando a força normal ao estudo anterior, tem-se a flexão composta oblíqua. Pelo Princípio da Superposição dos Efeitos, podemos escrever:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \left(\frac{M_y}{I_y} \right) z - \left(\frac{M_z}{I_z} \right) y$$

Observação: A expressão que fornece a tensão normal é muito simples, quando se usa o sistema central principal. Em geral, para um sistema de referência qualquer, a fórmula é bastante mais complicada (v. Anexo B).

Equação da linha neutra ($\sigma = 0$):

$$z = - \frac{N}{A} \frac{I_y}{M_y} + \left(\frac{M_z}{M_y} \frac{I_y}{I_z} \right) y \quad \Rightarrow \quad z = \eta + (\text{tg } \beta) y$$

sendo:

$$\eta = - \frac{N}{A} \frac{I_y}{M_y}$$

a ordenada do ponto em que a LN corta o eixo vertical Gz (note-se que a presença da força normal não altera a inclinação da linha neutra, só faz com que ela se desloque, paralelamente a si mesma).

Caso particular: Quando as forças cortantes valem zero, os momentos são constantes, e a flexão composta oblíqua recebe o nome de *tração ou compressão excêntrica oblíqua*. Há excentricidade nas duas direções principais.

Exemplo de tração excêntrica oblíqua

Para a seção transversal da figura 5-5, submetida a uma força de tração excêntrica, cujo valor é $P = 2.570.400 \text{ N}$, achar a linha neutra e as tensões normais extremas.

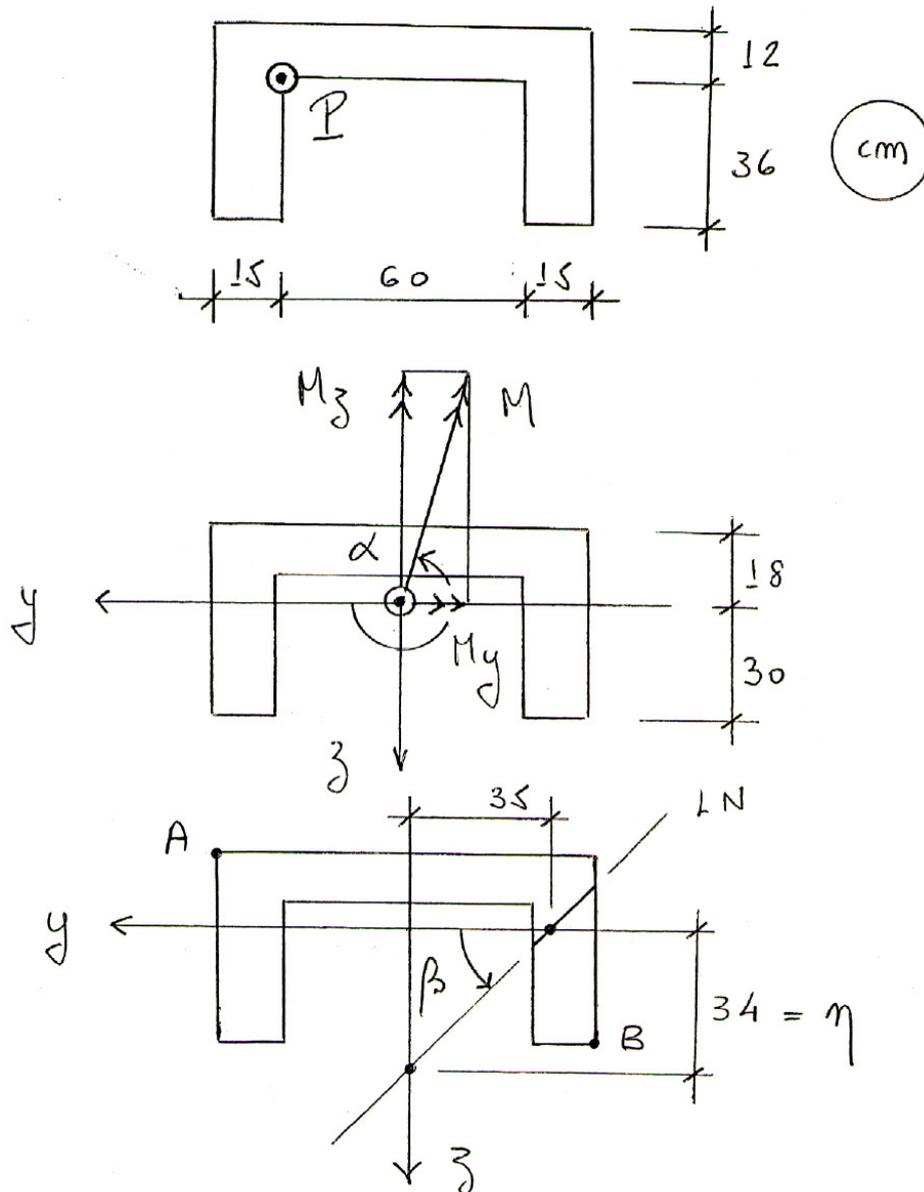


Figura 5 - 5

Resolução:

Cálculos preliminares indicam a posição do sistema central principal (y, z) na figura 5-5. As características geométricas da seção transversal são as seguintes:

$$A = 2.160 \text{ cm}^2, \quad I_y = 440.640 \text{ cm}^4, \quad I_z = 2.268.000 \text{ cm}^4$$

Os momentos fletores são:

$$M_y = -6P = -15.422.400 \text{ N cm}$$

$$M_z = -30P = -77.112.000 \text{ N cm}$$

A direção do momento resultante se calcula como:

$$\text{tg } \alpha = \frac{M_z}{M_y} = 5 \Rightarrow \alpha = 258,690^\circ \quad (\text{terceiro quadrante})$$

A tensão na seção é dada por:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \left(\frac{M_y}{I_y} \right) z - \left(\frac{M_z}{I_z} \right) y = 1.190 - 35z + 34y$$

Equação da linha neutra ($\sigma = 0$):

$$z = \eta + (\text{tg } \beta) y = 34 + \left(\frac{34}{35} \right) y \Rightarrow \beta = 44,170^\circ$$

Na figura 5-5 se mostra a linha neutra. Pela posição da L.N., os pontos mais solicitados são o ponto A (máxima tração) e o ponto B (máxima compressão). Essas tensões valem:

$$\sigma_A = 1.190 - 35(-18) + 34(45) = 3.350 \text{ N/cm}^2$$

$$\sigma_B = 1.190 - 35(30) + 34(-45) = -1.390 \text{ N/cm}^2$$

ANEXO A

Demonstração da fórmula $\sigma = \left(\frac{M_{LN}}{I_{LN}} \right) t$

Com base nas figuras 5-1 e 5-2, podemos escrever:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{M_z}{M_y} \frac{I_y}{I_z} = (\operatorname{tg}\alpha) \frac{I_y}{I_z}$$

$$I_z \operatorname{tg}\beta = I_y \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{I_y \cos\beta} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{I_z \operatorname{sen}\beta}$$

$$\frac{\cos\alpha}{I_y \cos\beta} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{I_z \operatorname{sen}\beta} = \frac{\cos\alpha \cos\beta}{I_y \cos^2\beta} = \frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{I_z \operatorname{sen}^2\beta}$$

$$\frac{\cos\alpha}{I_y \cos\beta} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{I_z \operatorname{sen}\beta} = \frac{\cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{I_y \cos^2\beta + I_z \operatorname{sen}^2\beta} = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{I_{LN}}$$

$$\frac{\cos\alpha}{I_y \cos\beta} = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{I_{LN}} \tag{i}$$

Por outro lado, como foi visto:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y = \frac{M_y}{I_y} \left(z - \frac{M_z}{I_z} \frac{I_y}{M_y} y \right) = \frac{M \cos\alpha}{I_y} (z - y \operatorname{tg}\beta)$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{M \cos\alpha}{I_y \cos\beta} (z \cos\beta - y \operatorname{sen}\beta) = \frac{M \cos\alpha}{I_y \cos\beta} (t) \tag{ii}$$

Introduzindo (i) em (ii) vem, finalmente:

$$\sigma = \frac{M \cos(\alpha - \beta)}{I_{LN}} (t) = \left(\frac{M_{LN}}{I_{LN}} \right) t \quad \text{c.q.d.}$$

ANEXO B

Estudo da flexão num referencial qualquer

Imaginemos um sistema de referência centrado num ponto O qualquer, com eixos y e z, não necessariamente eixos principais (o eixo y para a esquerda e o eixo z para baixo). Seja o campo de tensões dado pela função linear (combinação da hipótese de Navier com a lei de Hooke):

$$\sigma = B + Cz + Dy$$

onde as constantes B, C e D devem ser determinadas, por meio das condições de equivalência estática entre as tensões e os esforços solicitantes:

$$N = \int_A \sigma dA = B(A) + C(Q_y) + D(Q_z)$$

$$M_y = \int_A z(\sigma dA) = B(Q_y) + C(I_y) + D(I_{yz})$$

$$-M_z = \int_A y(\sigma dA) = B(Q_z) + C(I_{yz}) + D(I_z)$$

Nas expressões acima o elemento de área dA está situado no primeiro quadrante, conforme a figura 5-6.

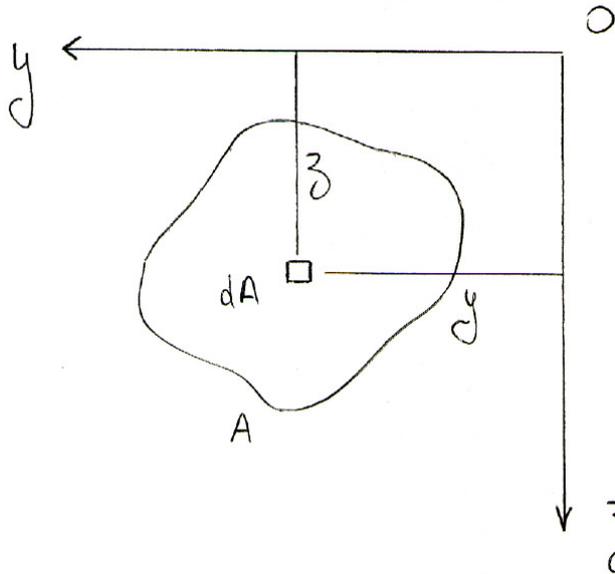


Figura 5 - 6

Colocando em forma de matrizes:

$$\begin{bmatrix} A & Q_y & Q_z \\ Q_y & I_y & I_{yz} \\ Q_z & I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N \\ M_y \\ -M_z \end{Bmatrix}$$

Resolvendo, vêm:

$$B = \frac{N(I_y I_z - I_{yz}^2) + M_y(Q_z I_{yz} - Q_y I_z) - M_z(Q_y I_{yz} - Q_z I_y)}{A I_y I_z + 2Q_y Q_z I_{yz} - I_y Q_z^2 - I_z Q_y^2 - A I_{yz}^2}$$

$$C = \frac{N(Q_z I_{yz} - Q_y I_z) + M_y(A I_z - Q_z^2) - M_z(Q_y Q_z - A I_{yz})}{A I_y I_z + 2Q_y Q_z I_{yz} - I_y Q_z^2 - I_z Q_y^2 - A I_{yz}^2}$$

$$D = \frac{N(Q_y I_{yz} - Q_z I_y) + M_y(Q_y Q_z - A I_{yz}) - M_z(A I_y - Q_y^2)}{A I_y I_z + 2Q_y Q_z I_{yz} - I_y Q_z^2 - I_z Q_y^2 - A I_{yz}^2}$$

Quando os eixos são centrais, os momentos estáticos se anulam, e os coeficientes ficam:

$$B = \frac{N(I_y I_z - I_{yz}^2)}{A I_y I_z - A I_{yz}^2}$$

$$C = \frac{M_y(A I_z) - M_z(-A I_{yz})}{A I_y I_z - A I_{yz}^2}$$

$$D = \frac{M_y(-A I_{yz}) - M_z(A I_y)}{A I_y I_z - A I_{yz}^2}$$

Finalmente, quando os eixos são os centrais principais, o momento centrífugo também se anula, além dos momentos estáticos, e os coeficientes assumem a forma mais simples possível:

$$B = \frac{N(I_y I_z)}{A I_y I_z} = \frac{N}{A}$$

$$C = \frac{M_y(A I_z)}{A I_y I_z} = \frac{M_y}{I_y}$$

$$D = \frac{-M_z(A I_y)}{A I_y I_z} = \frac{-M_z}{I_z}$$

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESCOLA POLITÉCNICA

Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica

**CURSO BÁSICO DE
RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS**

FASCÍCULO Nº 6

Cisalhamento na flexão

H. Britto

2.010

TENSÕES DE CISALHAMENTO NA FLEXÃO

1) Introdução

Uma viga sujeita a cargas transversais tem, como esforços solicitantes, além de força cortante, momento fletor variável ($V = dM/dx$). A presença da força cortante dá lugar, na seção transversal, ao aparecimento de tensões tangenciais τ (ou tensões de cisalhamento), cuja resultante deve ser igual à força cortante. O objetivo deste fascículo é o de achar a distribuição das tensões de cisalhamento na seção transversal, causadas pela força cortante. Como veremos, tal distribuição não é uniforme, ou seja, $\tau \neq V/A$.

O estudo será dividido em duas partes: a primeira tratará das *seções cheias* (ou seções maciças) e a segunda das *seções delgadas* (ou seções de parede fina).

Parte I – Seções maciças

2) Fluxo de cisalhamento

Considere-se, na figura 6-1, uma barra homogênea e prismática, sujeita a uma carga transversal $p = p(x)$. Pode haver uma força normal, desde que seja constante. Cortando uma fatia da viga, por meio de duas seções transversais muito próximas, na seção de abscissa x existem esforços solicitantes M e V , e na seção de abscissa $x + dx$ os esforços solicitantes serão $M + dM$ e $V + dV$. Na face da esquerda o momento M dá lugar a um campo de tensões normais σ , o qual, como já vimos, é linearmente variável com a ordenada z . Na face da direita o campo de tensões será $\sigma + d\sigma$, causado pelo momento $M + dM$.

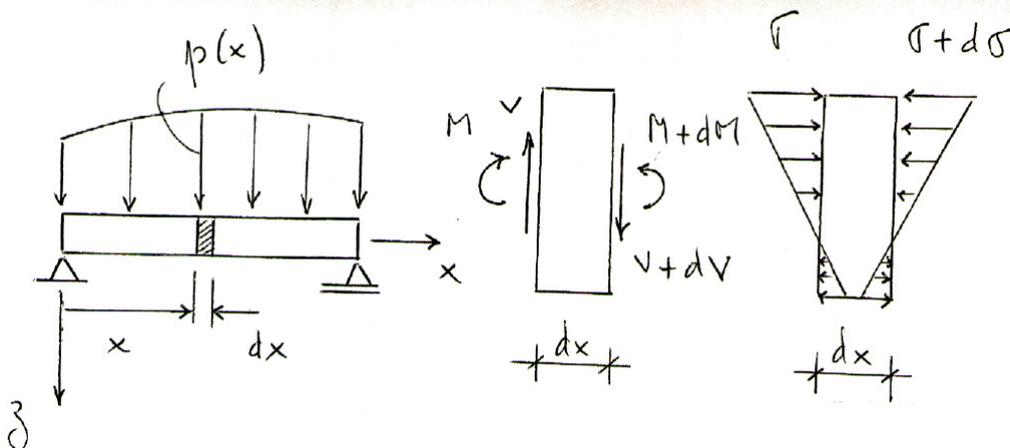


Figura 6 – 1

Na figura 6-2 dividimos a seção transversal da viga em duas partes, por meio de uma curva qualquer, chamada *curva diretriz*. Designemos uma dessas partes, por exemplo a de cima, por

A^* (em hachurado). Ainda na figura 6-2, olhando o elemento de viga de uma perspectiva, vamos dividi-lo em duas partes, por meio de uma superfície cilíndrica, cuja diretriz é a curva traçada na seção transversal, e cuja *geratriz* é uma reta que se desloca sobre a diretriz, mantendo-se paralela ao eixo da barra.

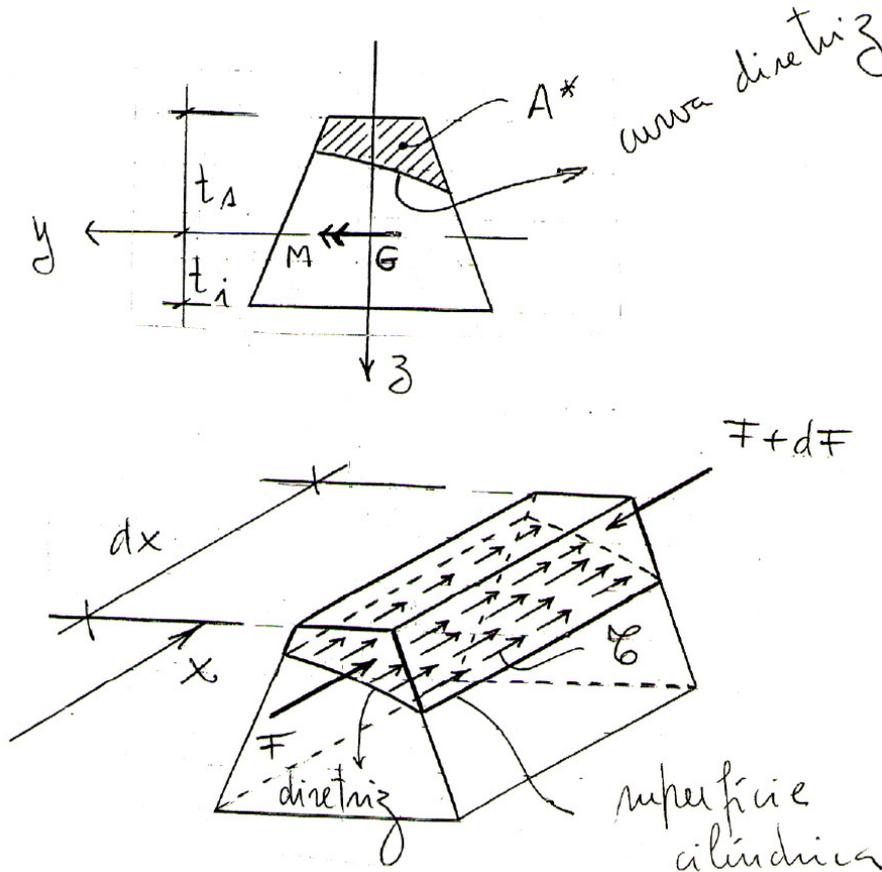


Figura 6 - 2

Na seção de abscissa x , a resultante das tensões σ , na área A^* , é uma força F , dada por:

$$F = \int_{A^*} \sigma dA = \int_{A^*} \frac{M}{I} z dA = \frac{M}{I} \int_{A^*} z dA = \frac{MQ^*}{I} \quad (1)$$

sendo Q^* o *momento estático* da área A^* em relação ao eixo horizontal Gy .

A mesma resultante, na seção de abscissa $x + dx$, será $F + dF$, de modo que, para haver o equilíbrio de forças da parte superior do elemento, na direção do eixo da viga, haverá a necessidade da parte inferior aplicar na parte superior, ao longo da superfície cilíndrica, um campo de tensões de cisalhamento τ , conforme a figura 6-2. Tal equilíbrio impõe que:

$$\boxed{dF = q dx} \quad (2)$$

sendo q a resultante das tensões tangenciais por unidade de comprimento da viga, na seção de abscissa x (*fluxo de cisalhamento* na superfície cilíndrica). Notar que, ao escrever a equação de

equilíbrio (2), admitimos que o fluxo q é constante ao longo de dx , o que é uma hipótese razoável, por ser a variação do fluxo, ao longo de dx , um infinitésimo de ordem superior. Sendo assim, de (2) e (1) vem:

$$q = \frac{dF}{dx} = \left(\frac{dM}{dx} \right) \frac{Q^*}{I} \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = \frac{VQ^*}{I}} \quad (3)$$

(importante fórmula, muito útil no cálculo de ligações, como veremos)

3) Tensão de cisalhamento

Quando a curva diretriz for uma linha reta, paralela ao eixo G_y , a superfície cilíndrica se transforma num plano horizontal, e, nessas condições, a tensão τ fica constante ao longo do comprimento b da fibra, como mostra a figura 6-3. Este fato consiste numa das hipóteses básicas da Resistência dos Materiais, e foi confirmado amplamente em ensaios de laboratório e também por meio de testes numéricos (com elementos finitos).

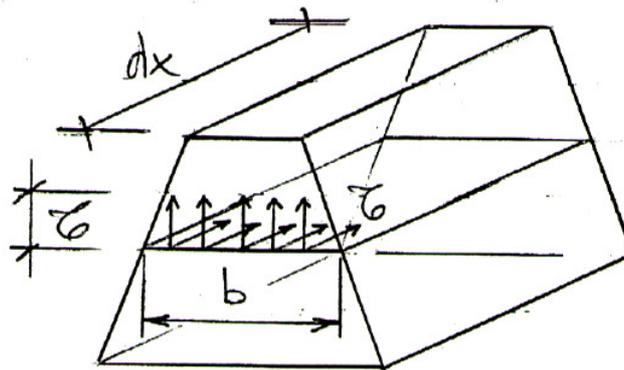


Figura 6 - 3

Supondo que a tensão é constante, também ao longo do comprimento dx , a tensão será constante no plano horizontal. Nessas condições, a condição de equilíbrio (2) fica:

$$dF = q dx = \tau(b dx) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{q}{b}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{VQ^*}{bI}} \quad (4)$$

Esta fórmula foi deduzida, pela primeira vez, por *Jouravsky*, por volta de 1.850.

O problema agora é: como passar do plano horizontal para o plano da seção transversal? A solução é simples. Como esses dois planos são perpendiculares entre si, a tensão no plano horizontal faz aparecer automaticamente, no plano da seção, uma tensão igual, conforme a figura 6-3.

Trata-se esta propriedade de uma questão de equilíbrio, e será estudada posteriormente num próximo fascículo (estado duplo de tensão). Duas situações podem ocorrer em geral, conforme

mostra a figura 6-4: ou as tensões estão convergindo para o vértice do ângulo reto, ou estão dele se afastando. Em qualquer caso, elas têm o mesmo valor numérico e sinais opostos, porque uma é positiva (sentido horário) e a outra é negativa (sentido anti-horário).

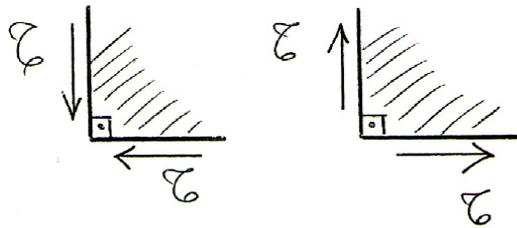


Figura 6 – 4

Chegamos, portanto, ao nosso objetivo inicial, que era o de achar a tensão de cisalhamento na seção transversal, causada pela força cortante.

Observações

- 1^a) Como se mostra na figura 6-3, a tensão tangencial, dada pela expressão (4), corresponde à *componente vertical* da tensão resultante. Há também uma componente horizontal, que se determina conforme a 3^a) observação.
- 2^a) a tensão de cisalhamento resultante deve ser tangente ao contorno, como se mostra na figura 6-5. Isto é consequência da propriedade, acima mencionada, dos planos perpendiculares entre si, e se trata, na realidade, de uma condição de contorno, que diz respeito ao fato de a face lateral da viga estar descarregada. Não havendo forças de atrito na superfície lateral, a componente da tensão resultante, na seção transversal, e *normal ao contorno*, vale zero. Sendo assim, a tensão resultante só pode ser tangente ao contorno.

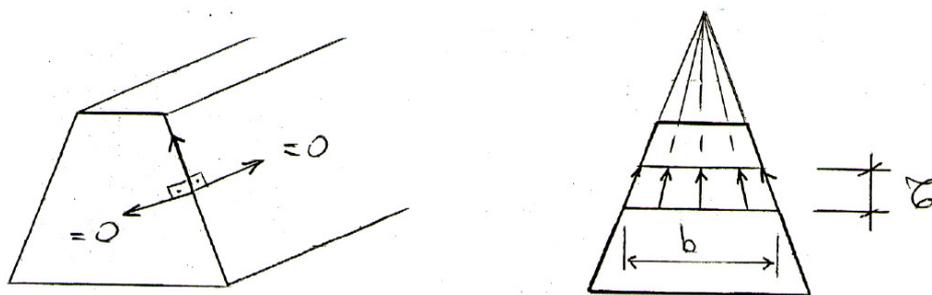


Figura 6 – 5

- 3^a) Para achar a direção da tensão resultante, nos outros pontos da fibra de comprimento b , prolongam-se as duas tangentes ao contorno até que elas se encontrem num certo ponto, que pertence ao eixo de simetria vertical. Esse ponto define, conforme a figura 6-5, a direção da tensão resultante em cada ponto da fibra, o que define também a componente horizontal. Trata-se, evidentemente, de um cálculo simplificado, mas o único que pode ser feito com as ferramentas da Resistência dos Materiais (a distribuição mais exata das tensões só pode ser

conseguida com a Teoria da Elasticidade, via elementos finitos).

- 4ª) Como a tensão resultante é tangente ao contorno, em pontos angulosos a tensão se anula, conforme a figura 6-6. Nesses pontos a direção da tangente fica indefinida, e, como se sabe, o vetor nulo é o único vetor tangente a qualquer direção. Na região próxima a um vértice, portanto, a tensão tem valores muito baixos.

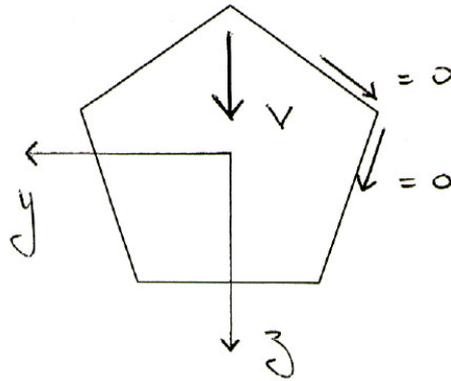


Figura 6 – 6

- 5ª) A tensão tangencial na seção foi obtida por meio do equilíbrio na direção do eixo da viga, ou seja, na direção perpendicular à direção da força cortante. Portanto, é necessário, para encerrar o assunto, demonstrar que a resultante das tensões τ , na seção transversal, dadas pela fórmula (4), reproduz a força cortante V . É óbvio que a resultante das componentes horizontais vale zero, por simetria. Com relação à resultante das componentes verticais, considerando a figura 6-7, podemos escrever:

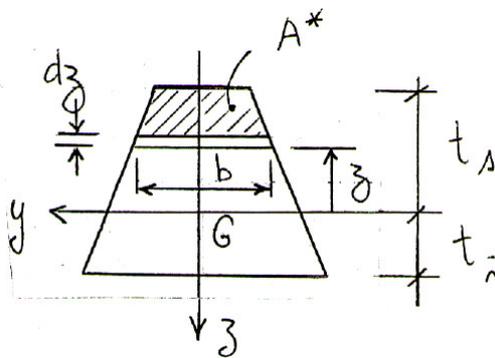


Figura 6 – 7

$$\int_A \tau dA = - \int_{-t_2}^{t_1} \frac{VQ^*}{bI} (b dz) = \frac{-V}{I} \int_{-t_2}^{t_1} Q^* dz$$

(o sinal negativo na expressão acima é necessário porque $Q^* < 0$ na figura 6-7)

Integrando por partes $\left(\int u dv = uv - \int v du \right)$:

$$\begin{cases} u = Q^* \\ dv = dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dQ^* = (bdz)z \\ v = z \end{cases}$$

(observemos que $dQ^* < 0$, pois $z < 0$)

$$\Rightarrow \int_{-t_s}^{t_i} Q^* dz = [Q^* z]_{-t_s}^{t_i} - \int_{-t_s}^{t_i} z(bdz)z$$

O termo de fronteira na expressão acima vale zero, pois $Q^* = 0$ nas fibras superior (porque $A^* = 0$) e inferior (porque $A^* = A$). Logo:

$$\int_{-t_s}^{t_i} Q^* dz = - \int_{-t_s}^{t_i} z^2 (bdz) = - \int_A z^2 dA = -I$$

$$\Rightarrow \int_A \tau dA = \frac{-V}{I} \int_{-t_s}^{t_i} Q^* dz = \frac{-V}{I} (-I) = V \quad (\text{c.q.d.})$$

4) Montagem de vigas. Cálculo de ligações

Consideremos, na figura 6-8, dois problemas semelhantes. O da esquerda, uma viga de seção retangular ($b \times 2h$), e o da direita, duas vigas colocadas uma sobre a outra, cada uma de seção ($b \times h$). Carregando essas estruturas, elas se deformam. No sistema duplo, cada viga, por serem as duas iguais entre si, vai suportar metade da carga, e, supondo que não há atrito entre elas, uma vai escorregar livremente sobre a outra. Isto porque a fibra inferior da viga de cima se alonga, e a fibra superior da viga de baixo encurta. A pergunta que se faz é: qual dos dois sistemas é o mais eficiente?

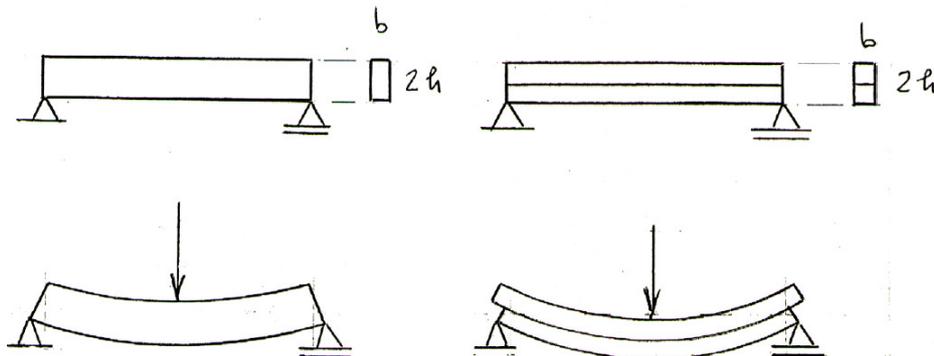


Figura 6 - 8

Para responder a essa pergunta, lembremos que, para uma seção retangular de base B e altura H , o módulo de resistência à flexão vale:

$$W = \frac{I}{\left(\frac{H}{2}\right)} = \frac{2}{H} \left(\frac{BH^3}{12} \right) = \frac{BH^2}{6}$$

Assim temos, para o sistema da esquerda:

$$W = \frac{b(2h)^2}{6} = \frac{2}{3}bh^2$$

e, para o sistema da direita:

$$W = 2 \left(\frac{bh^2}{6} \right) = \frac{1}{3}bh^2$$

Constatamos, portanto, que o sistema duplo, por não poder mobilizar as tensões tangenciais no plano horizontal que separa as duas vigas, tem a metade da resistência do sistema monolítico.

É desejável, portanto, unir as duas vigas de modo que elas funcionem como uma peça única, duplicando a capacidade de carga do conjunto. Isto pode ser feito usando cola ou cordões de solda (ligação contínua) ou por meio de conectores, que podem ser parafusos, pinos, rebites, pontos de solda, cavilhas, etc.. (ligação discreta). Seja qual for o tipo de ligação, os elementos que solidarizam uma peça na outra devem, naturalmente, ser dimensionados para resistir ao fluxo de cisalhamento entre elas.

5) Exemplos de aplicação

Primeiro exemplo) Determinar, para a seção retangular da figura 6-9, sujeita a uma força cortante V , a distribuição das tensões de cisalhamento na seção transversal. Verificar que a resultante dessas tensões é igual à força cortante.

Resolução: $\tau = \frac{VQ^*}{bI}$ com $I = \frac{BH^3}{12}$ e $b = B$

O momento estático é dado por:

$$Q^* = A^* z^* = B \left(\frac{H}{2} - z \right) \frac{1}{2} \left(\frac{H}{2} + z \right) = \frac{B}{2} \left(\frac{H^2}{4} - z^2 \right) = \frac{BH^2}{8} \left(1 - 4 \frac{z^2}{H^2} \right)$$

$$\tau = \tau(z) = \frac{3}{2} \frac{V}{BH} \left(1 - 4 \frac{z^2}{H^2} \right) \quad (\text{parábola do segundo grau})$$

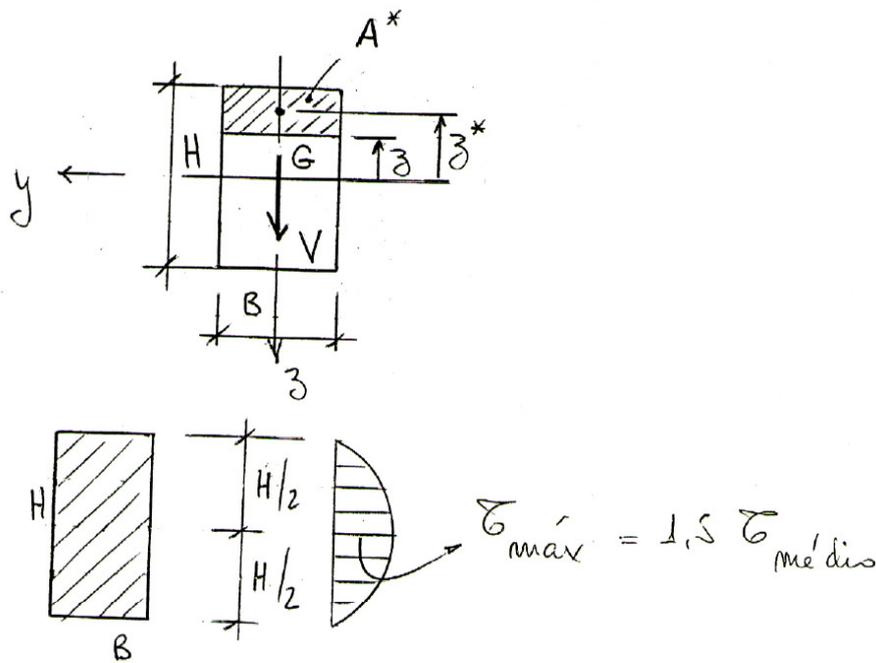


Figura 6 - 9

A tensão é máxima para $z = 0$:

$$\tau_{\text{máx}} = \tau(0) = 1,5 \left(\frac{V}{A} \right) = 1,5 \tau_{\text{médio}}$$

Logo, a tensão máxima é 50% maior do que a tensão média. Se tivéssemos calculado, de forma simplificada, que $\tau = \frac{V}{A}$, teríamos cometido um erro de 50% contra a segurança.

A tensão será nula na fibra superior, cuja ordenada é $z = -\frac{H}{2}$ (porque $A^* = 0$), e na fibra inferior, cuja ordenada é $z = \frac{H}{2}$ (porque $A^* = A$). Em ambos os casos o momento estático se anula: $Q^* = 0$.

Só falta demonstrar que a resultante das tensões é igual à força cortante:

$$\int_A \tau dA = 2 \int_0^{H/2} \tau(z)(Bdz) = (2) \frac{3}{2} \frac{V}{H} \int_0^{H/2} \left(1 - 4 \frac{z^2}{H^2} \right) dz = 3 \frac{V}{H} \left(\frac{H}{3} \right) = V \quad (\text{c.q.d.})$$

Segundo exemplo) Calcular a resistência ao cisalhamento necessária para a cola a ser usada na montagem da viga prismática da figura 6-10. Adotar $s = 2$ (coeficiente de segurança).

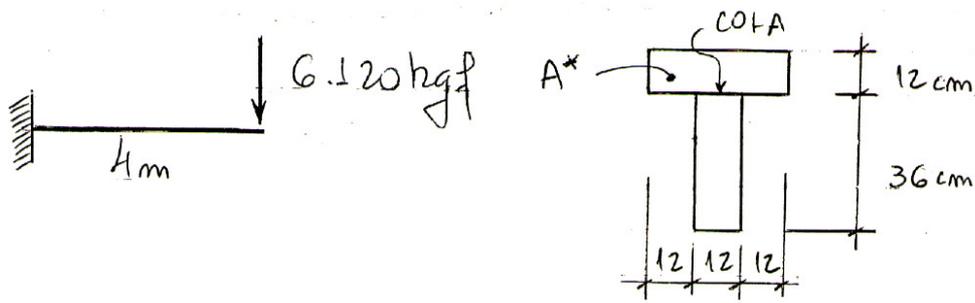


Figura 6 - 10

Resolução: Os cálculos mostram que (confirmar):

$$t_s = 18 \text{ cm} \quad t_i = 30 \text{ cm} \quad I = 176.256 \text{ cm}^4$$

Por outro lado: $Q^* = (36 \times 12)12 = 5.184 \text{ cm}^3$ e $b = 12 \text{ cm}$

Logo: $\tau = \frac{VQ^*}{bI} = \frac{6.120(5.184)}{12(176.256)} = 15 \text{ kgf / cm}^2$

A resistência da cola ao cisalhamento deve ser: $\tau_R = 2(15) = 30 \text{ kgf / cm}^2$

Terceiro exemplo) A viga de madeira da figura 6-11 é formada por 4 tábuas, unidas entre si por meio de pregos. Determinar o espaçamento necessário para os pregos. Sabe-se que cada prego pode transmitir, com segurança, uma força de 120 kgf.

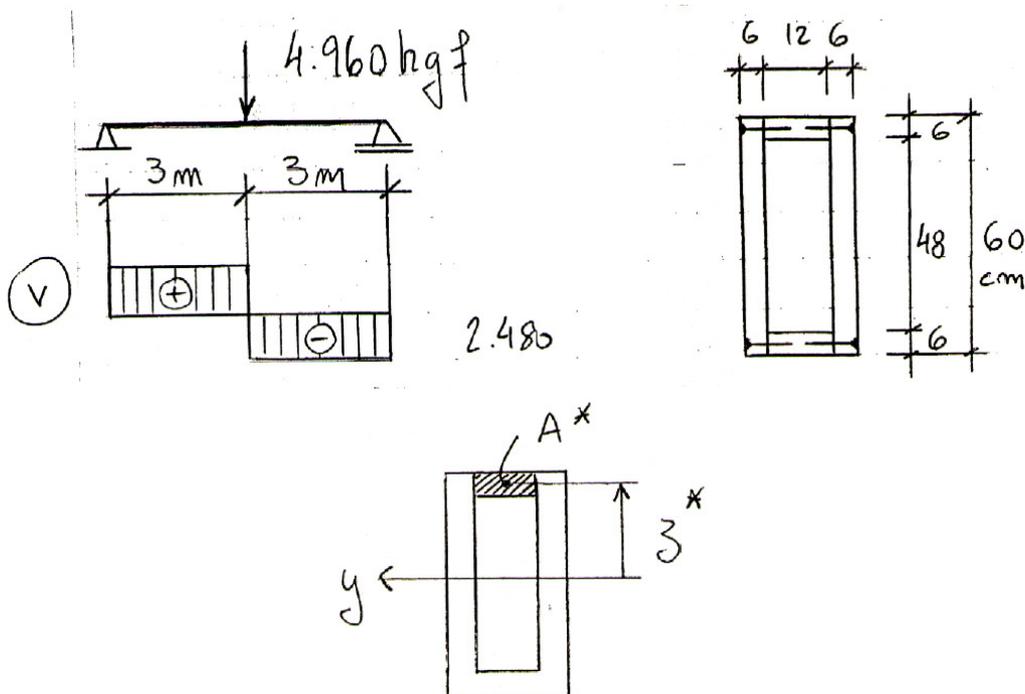


Figura 6 - 11

Resolução: $I = \frac{24(60)^3}{12} - \frac{12(48)^3}{12} = 321.408 \text{ cm}^3$ $Q^* = A^* z^* = (12)(6)27 = 1.944 \text{ cm}^3$

Fluxo a ser resistida pelos pregos: $q = \frac{VQ^*}{I} = \frac{2.480(1.944)}{321.408} = 15 \text{ kgf / cm}$

Número necessário de pregos: $n = \frac{600(15)}{120} = 75 \text{ pregos}$

Como há duas fileiras de pregos, o espaçamento necessário vale:

$e = 2 \left(\frac{600}{75} \right) = 16 \text{ cm}$ (a viga toda consumirá $2 \times 75 = 150$ pregos)

Quarto exemplo) Fabricação de viga de aço com cordões contínuos de solda a 45°

Achar a espessura **t** dos cordões contínuos de solda da viga da figura 6-12

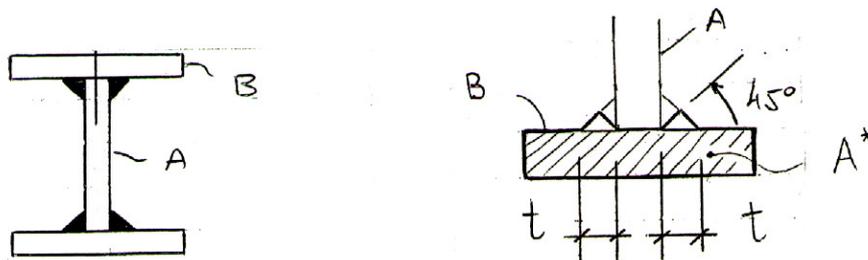


Figura 6 – 12

Resolução: $I = 2I_B + I_A$ (despreza-se a solda no cálculo de I)

No cálculo do momento estático também se despreza a contribuição da solda.

Supondo que a configuração de ruptura é aquela mostrada na figura, podemos escrever:

$\tau = \frac{VQ^*}{bI}$ sendo $b = 2 \left(\frac{t\sqrt{2}}{2} \right) = t\sqrt{2}$ \Rightarrow $t = \frac{\sqrt{2} VQ^*}{2 I \bar{\tau}}$

sendo $\bar{\tau}$ a tensão admissível ao cisalhamento do material da solda.

O plano de corte faz um ângulo de 45° com a horizontal porque, dentre todos os planos que passam pelo vértice do ângulo reto da solda, é o que tem a menor área, e no qual, portanto, a tensão será maior (cf. figura 6-12).

Observe-se que, em princípio, a tensão tangencial calculada não é rigorosamente constante no plano de corte da solda, porque o corte não é horizontal. Entretanto, como a dimensão **b** é

pequena, e, como também, o material da solda se plastifica um pouco antes de entrar em colapso (provocando uma uniformização das tensões), o cálculo é aceitável (mesmo porque não se conhece outro).

Parte II – Seções delgadas (seções de parede fina)

1) Introdução

Na primeira parte estudamos as seções cheias (ou seções maciças) sujeitas a uma força cortante vertical V . Vimos que, ao se fazer um corte horizontal de extensão b , paralelo ao eixo Gy , de modo a separar a seção em duas partes, a tensão tangencial ao longo desse corte, no plano horizontal e na seção transversal, era sensivelmente constante, e dada pela fórmula (4):

$$\tau = \frac{VQ^*}{bI}$$

Agora vamos estudar o comportamento das seções delgadas. Uma seção é dita *delgada* (ou de *parede fina*) quando a espessura dos seus diversos elementos é bem menor do que as outras dimensões da seção transversal (figura 6-13):

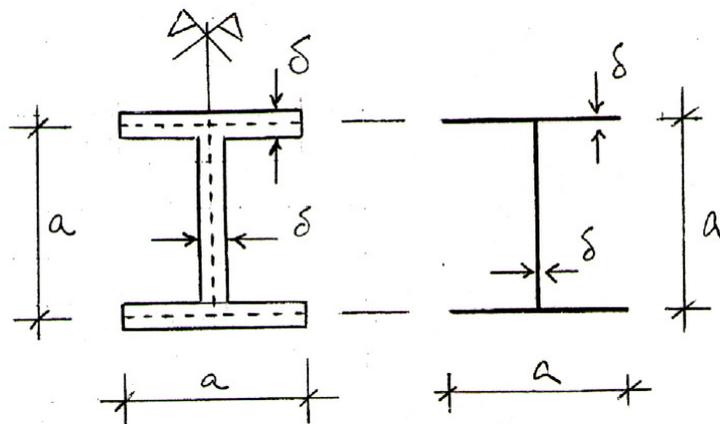


Figura 6 – 13

Em termos práticos, quando acontecer:

$$\frac{1}{20} \leq \frac{\delta}{a} \leq \frac{1}{10}$$

dizemos que a seção é delgada. Para valores fora desse intervalo, a seção será, ou de parede grossa, ou, no outro extremo, de parede muito fina, suscetível a problemas de instabilidade local do equilíbrio.

Numa seção delgada as dimensões são dadas em relação ao eixo das paredes, como mostra a figura 6-13. É costume indicar a seção transversal como num diagrama *unifilar*, desenhando

apenas o eixo (ou linha média) das paredes. Além disso, o cálculo das características geométricas (a posição do centróide, o momento de inércia I e o momento estático Q^*) é feito de forma simplificada, com base no diagrama unifilar, como veremos.

A principal característica das seções delgadas é a de que o corte a ser feito, de extensão igual a b , deve ser, não horizontal (como nas seções cheias), mas sim perpendicular à linha média da parede. Isto porque a tensão de cisalhamento é **paralela** à linha média da parede, além de ser **constante** ao longo da espessura δ . Este fato pode ser comprovado em ensaios de laboratório e por meio de testes numéricos (note-se que a tensão continua sendo tangente ao contorno). Portanto, nas paredes verticais o corte é horizontal, e nas paredes horizontais o corte é vertical (figura 6-14).

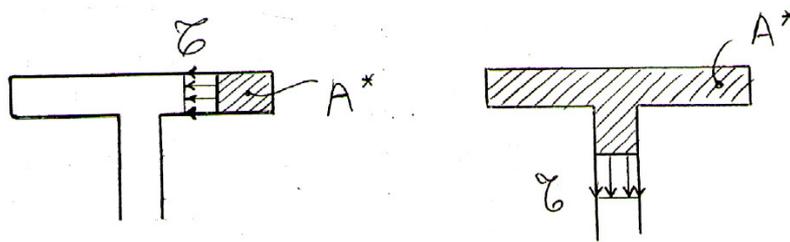


Figura 6 – 14

2) Seções abertas com dupla simetria

Seja a seção da figura 6-15, de espessura constante δ , sujeita a uma força cortante vertical V , dirigida de cima para baixo. Vamos determinar a distribuição da tensão de cisalhamento ao longo das paredes.

O momento de inércia vale (*cálculo simplificado*):

$$I = \frac{\delta(2a)^3}{12} + 2(a\delta)a^2 = \frac{8}{3}a^3\delta$$

sendo que a primeira parcela corresponde à alma e a segunda às mesas superior e inferior.

Tensão na mesa superior:

Considerando, na figura 6-15, a abscissa auxiliar “s”, pode-se escrever ($b = \delta$):

$$\tau = \frac{VQ^*}{bI} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{V(s\delta)a}{\delta I} = \frac{3}{8} \left(\frac{V}{a^2\delta} \right) s = \tau(s)$$

(a tensão na mesa varia linearmente, porque o momento estático assim também o faz)

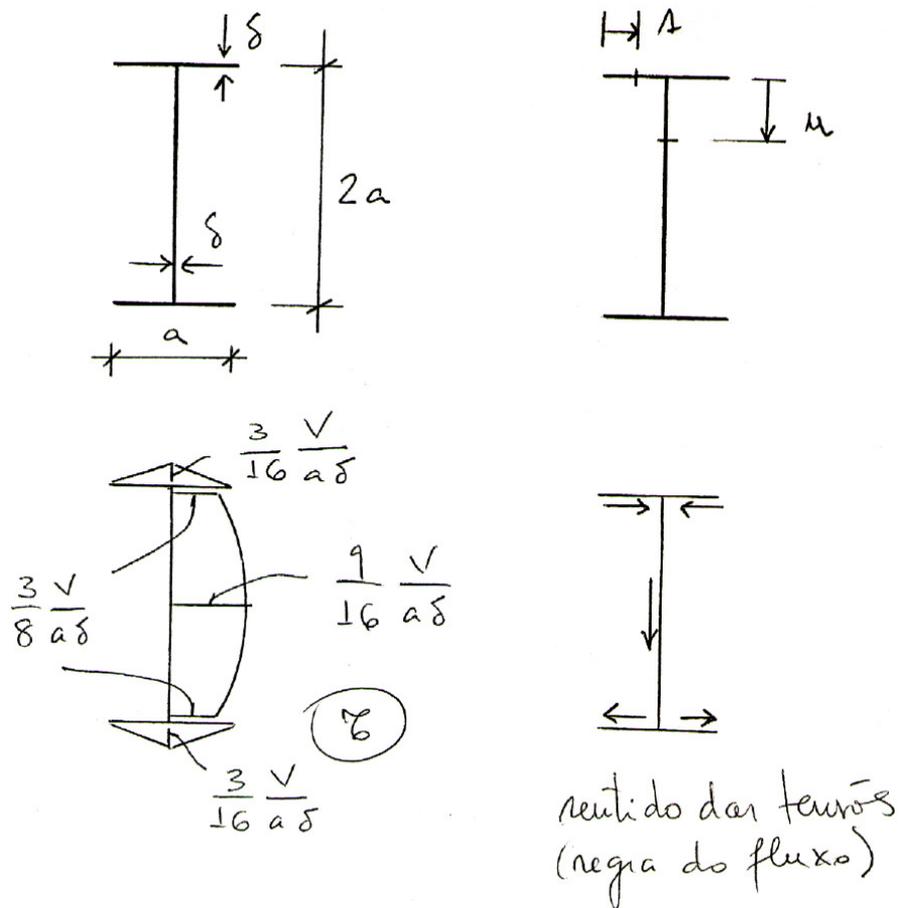


Figura 6 - 15

Tensão na alma:

Na figura 6-15, "u" é uma variável auxiliar que percorre a alma. Tem-se:

$$\tau = \frac{V}{\delta I} \left[(a\delta)a + (u\delta) \left(a - \frac{u}{2} \right) \right] = \frac{3}{8} \left(\frac{V}{a^3 \delta^2} \right) \left(a^2 \delta + a \delta u - \frac{u^2 \delta}{2} \right) = \tau(u)$$

(a tensão na alma varia parabolicamente)

Apresenta-se na figura 6-15 o diagrama de tensões tangenciais na seção. Note-se que a tensão máxima ocorre na alma, à altura do centróide, e isto acontece porque o momento estático é máximo nesse mesmo ponto. É interessante verificar também que a tensão máxima é bem maior do que a tensão média:

$$\tau_{\text{máx}} = \left(\frac{9}{16} \right) \frac{V}{a\delta} > \left(\frac{1}{4} \right) \frac{V}{a\delta} = \tau_{\text{médio}}$$

O sentido das tensões é o que está indicado na figura 6-15, tendo sido determinado pela chamada *regra do fluxo*. Quando a força cortante é para baixo, a regra do fluxo diz o seguinte:

Na alma o sentido da tensão é para baixo, acompanhando o sentido da força cortante. Acima da linha neutra o fluxo entra pelas extremidades livres e abaixo da linha neutra o fluxo sai pelas extremidades livres.

Portanto, o fluxo de cisalhamento na seção tem uma certa *semelhança* com o fluxo de um fluido num encanamento, ou o fluxo de corrente num circuito elétrico.

Observação: Em vez de usar a regra do fluxo, podemos também determinar o sentido da tensão tangencial estudando a variação do momento fletor, como mostra a figura 6-16, no caso da mesa superior.

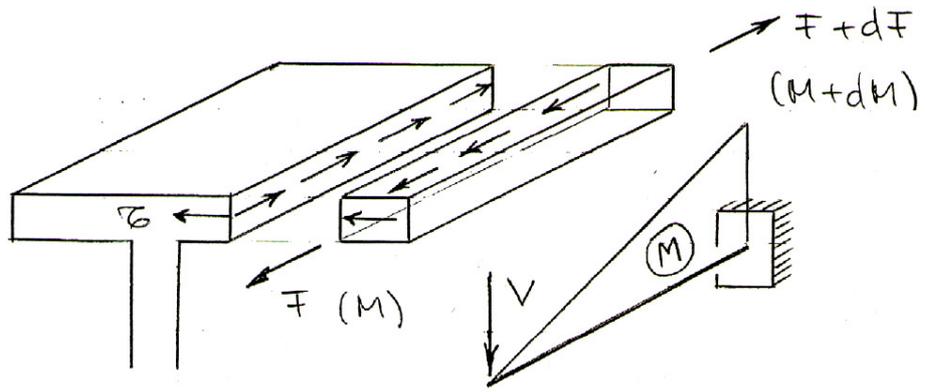


Figura 6 - 16

Em vez do diagrama de tensões, é possível também traçar o diagrama do fluxo q :

$$q = \tau \delta = \frac{VQ^*}{I}$$

mostrado na figura 6-17. Quando a espessura é constante para todos os elementos, o diagrama de fluxo é proporcional ao de tensões (como neste exemplo).

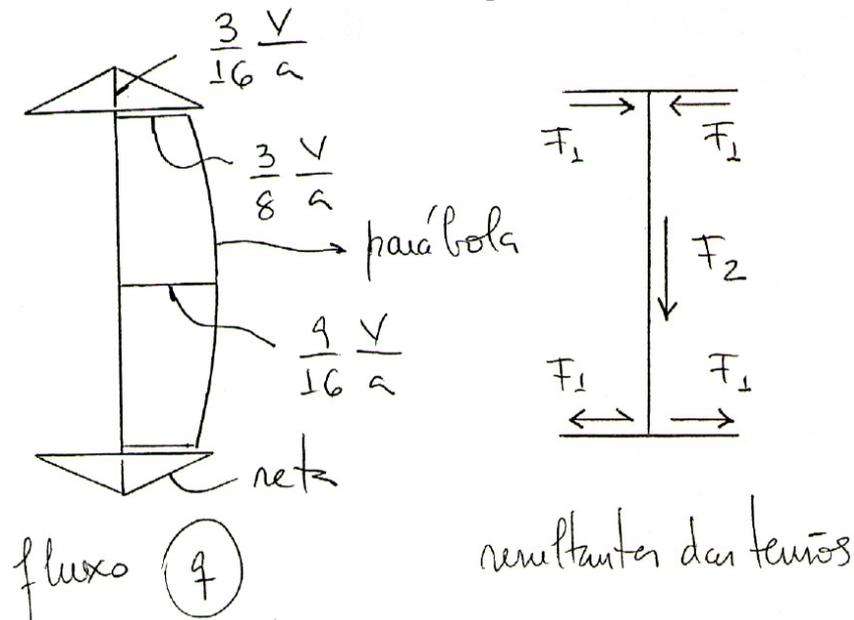


Figura 6 - 17

Em geral há duas vantagens em se lidar com o fluxo, em vez das tensões. A primeira é que o fluxo é sempre contínuo (porque o momento estático também o é), enquanto que a tensão será descontínua se a espessura de todas as paredes não for a mesma. A segunda vantagem é que a resultante das tensões, em cada trecho, é igual à área sob o diagrama de fluxo, pela própria definição de fluxo.

Apresenta-se na figura 6-17, além do diagrama de fluxo, a resultante das tensões em cada trecho. Tem-se:

$$F_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{3V}{16a} \right) a = \frac{3}{64} V$$

$$F_2 = \left(\frac{3V}{8a} \right) 2a + \frac{2}{3} \left(\frac{9V}{16a} - \frac{3V}{8a} \right) 2a = V$$

Note-se que a resultante do fluxo na alma resultou igual à força cortante, o que já era de se esperar. Para chegar ao valor de $F_2 = V$, usamos uma conhecida fórmula da área sob uma parábola, mostrada na figura 6-18.

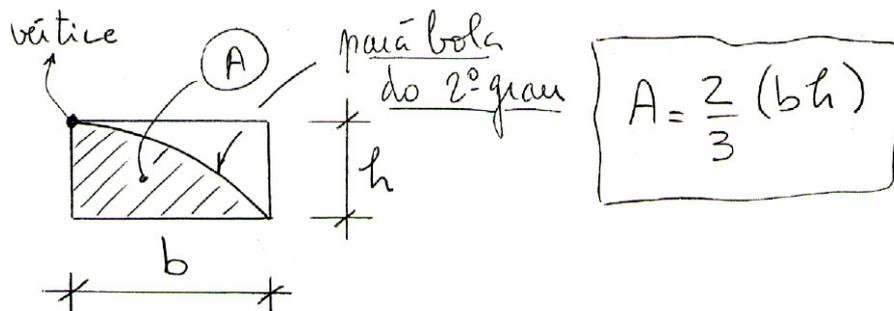


Figura 6 – 18

Colocando agora a mesma seção deitada, conforme a figura 6-19, temos:

$$I = 2 \left(\frac{\delta a^3}{12} \right) = \frac{a^3 \delta}{6}$$

Na figura 6-19 apresenta-se o diagrama do fluxo, em grandeza e sentido. O fluxo nas almas é parabólico, enquanto que na mesa o fluxo é nulo (por quê?). A resultante F do fluxo, em cada alma, vale a metade da força cortante, como era de se esperar.

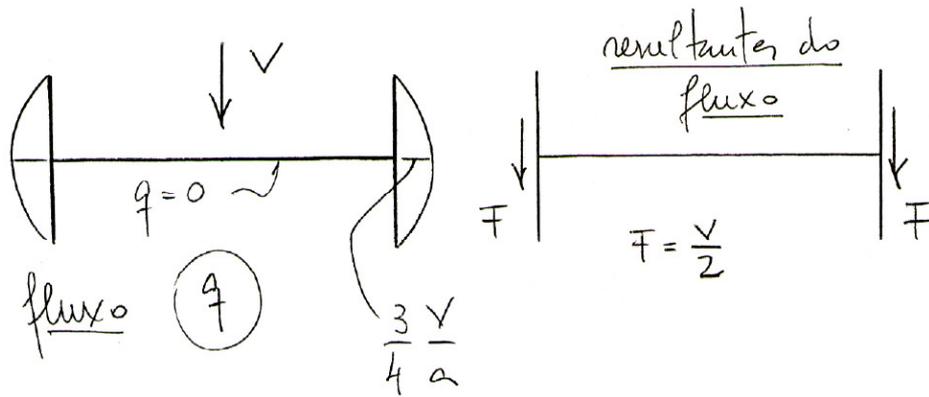


Figura 6 - 19

3) Seções fechadas com dupla simetria

Considere-se a seção da figura 6-20. O momento de inércia vale:

$$I = \frac{16}{3} a^3 \delta$$

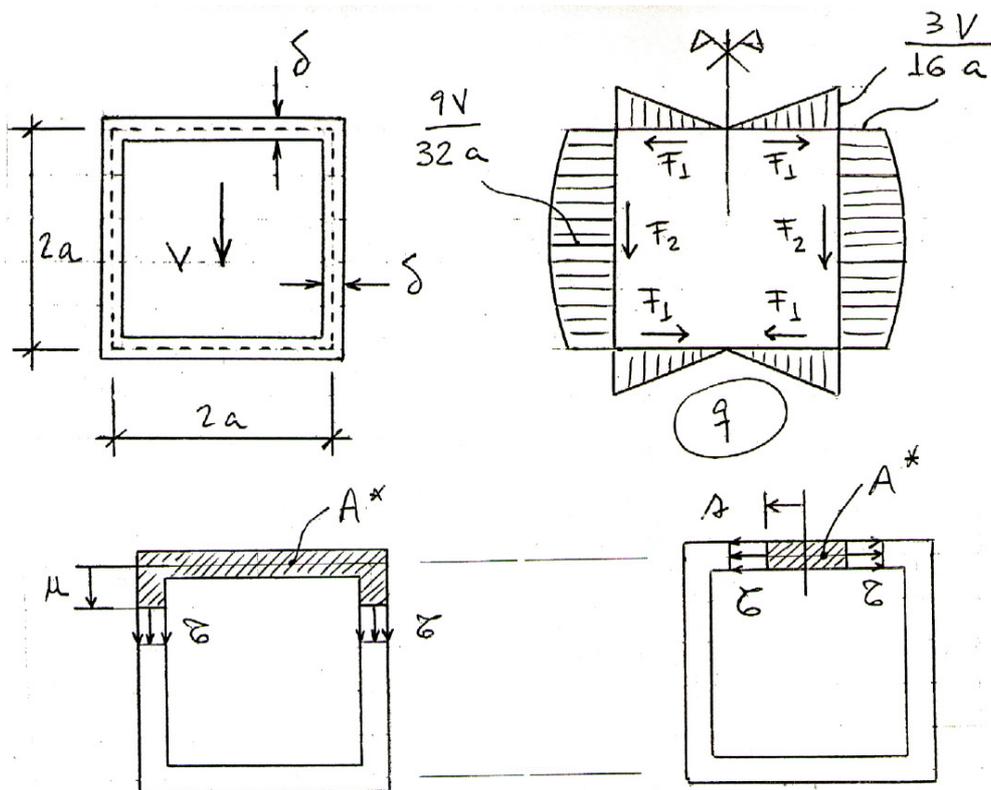


Figura 6 - 20

Na figura 6-20 mostra-se o diagrama de fluxo, obtido pelas funções:

$$q(s) = \frac{3}{16} \left(\frac{V}{a^2} \right) s \quad (\text{na mesa superior})$$

$$q(u) = \frac{3}{32} \left(\frac{V}{a^3} \right) (2a^2 + 2a u - u^2) \quad (\text{na alma esquerda})$$

Note-se que o corte feito (tanto na mesa quanto na alma), de largura $b = 2\delta$, é descontínuo, ou seja, na verdade são dois cortes. Mas isso não tem importância, pois a condição de que a tensão tangencial deve ser constante ao longo do corte está sendo respeitada. Além disso, a condição de dividir a seção em duas partes também está garantida.

As resultantes das tensões são: $F_1 = \frac{3}{32} V$ e $F_2 = \frac{V}{2}$

4) Seções assimétricas abertas

Nos exemplos de seções delgadas vistos até agora havia dois eixos de simetria. Portanto, a força cortante, supostamente aplicada no centróide, era estaticamente equivalente às tensões tangenciais, como deve ser.

Neste item vamos estudar o que acontece no caso de uma seção que tenha *apenas um eixo de simetria*. Se a força cortante é paralela ao eixo de simetria, não há problemas. Entretanto, quando a força cortante for *perpendicular* ao eixo de simetria, aparece uma dificuldade que não havia antes.

Seja a seção da figura 6-21, com eixo de simetria horizontal e sujeita a uma força cortante vertical V . Esta seção corresponde à metade esquerda da seção da figura 6-20. O momento de inércia vale, portanto, a metade:

$$I = \frac{8}{3} a^3 \delta$$

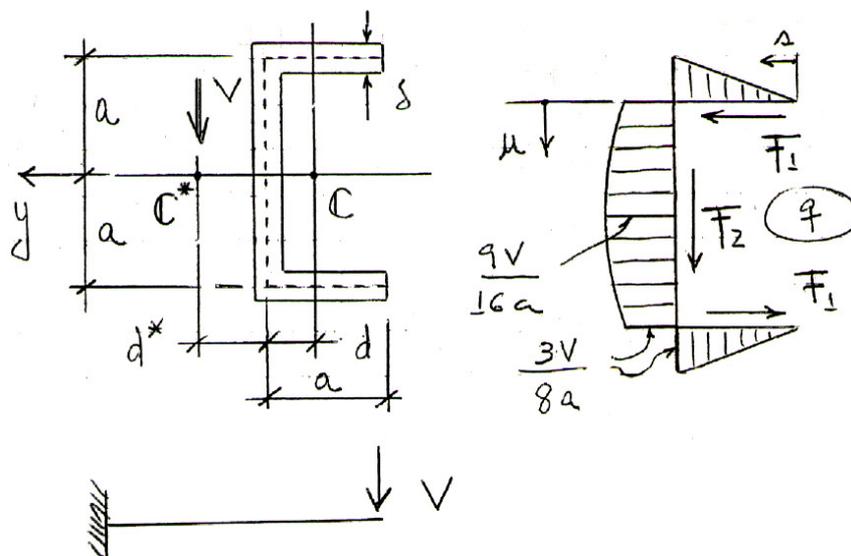


Figura 6 - 21

O centróide da seção, calculado de forma aproximada, é dado, conforme a figura 6-21, pela distância d:

$$d \cong \frac{2(a\delta)\frac{a}{2}}{4a\delta} = \frac{a}{4}$$

Na figura 6-21 se apresenta o diagrama de fluxo na seção. Os fluxos na mesa e na alma foram determinados pelas funções das variáveis auxiliares “s” e “u”, conforme a figura 6-21:

$$q(s) = \frac{3}{8} \left(\frac{V}{a^2} \right) s \quad (\text{na mesa})$$

$$q(u) = \frac{3}{16} \left(\frac{V}{a^3} \right) (2a^2 + 2au - u^2) \quad (\text{na alma})$$

As resultantes dos fluxos são:

$$F_1 = \frac{3}{16} V \quad \text{e} \quad F_2 = V$$

Admitindo que a força cortante está aplicada no centróide C, é imediato que as tensões tangenciais na seção e a força cortante não são estaticamente equivalentes, pois, apesar das resultantes serem iguais, os momentos são diferentes. Por exemplo, em relação ao centróide, o momento da cortante vale zero, enquanto que o momento das tensões obviamente é diferente de zero. Por definição:

Centro de cisalhamento é o ponto C*, pertencente ao eixo de simetria da seção, em relação ao qual o momento das tensões tangenciais vale zero.

Para achar o centro de cisalhamento, podemos calcular a distância d*, que o localiza em relação à alma do perfil. A condição é a seguinte:

$$F_1 (2a) - F_2 d^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{d^* = \frac{3}{8} a}$$

Note-se que a posição do centro de cisalhamento é uma característica puramente geométrica da seção, e não depende da espessura das paredes, desde que ela seja constante. Quando as paredes tiverem espessuras diferentes, a posição de C* irá depender da relação entre elas, mas não diretamente delas.

Assim, quando a força cortante passar pelo centro de cisalhamento, e apenas neste caso, ela será equivalente às tensões tangenciais que agem na seção, o que é óbvio, pois em relação a C* ambos os sistemas apresentam o mesmo momento (igual a zero). Se a força cortante passar por outro ponto, diferente de C*, então haverá, além da cortante, um momento de torção cujo braço é a

distância de C^* à linha de ação da cortante, e, neste caso, temos que somar ao diagrama de tensões que foi determinado, outro diagrama, causado pela torção, assunto este que já foi estudado no fascículo 3 deste curso.

Outro exemplo

Na figura 6-22 se apresenta uma cantoneira de abas iguais. Neste caso, é óbvio que o centro de cisalhamento é o ponto de intersecção das paredes da cantoneira.

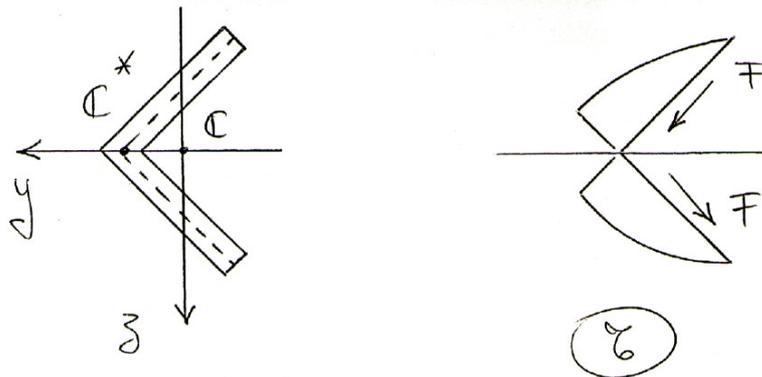


Figura 6 – 22

Observação: Quando a seção apresenta uma parede inclinada, como a cantoneira da figura 6-22, pode ser útil a seguinte fórmula (figura 6-23), que fornece o momento de inércia da parede em relação ao eixo que passa pelo centróide, e faz um ângulo α com a parede:

$$I = \frac{\delta L^3}{12} \text{sen}^2 \alpha$$

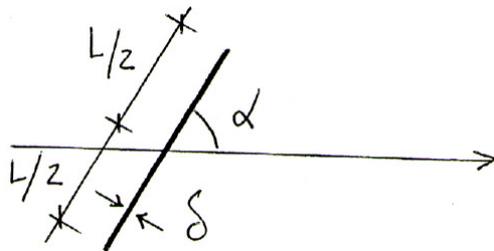


Figura 6 – 23

Pede-se ao estudante que demonstre esta fórmula.

Último exemplo (Prof. Diogo)

Seja a seção da figura 6-24, em forma de circunferência com uma ranhura. É dada a seguinte fórmula:

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\text{sen } 2x}{4} + \text{cte.}$$

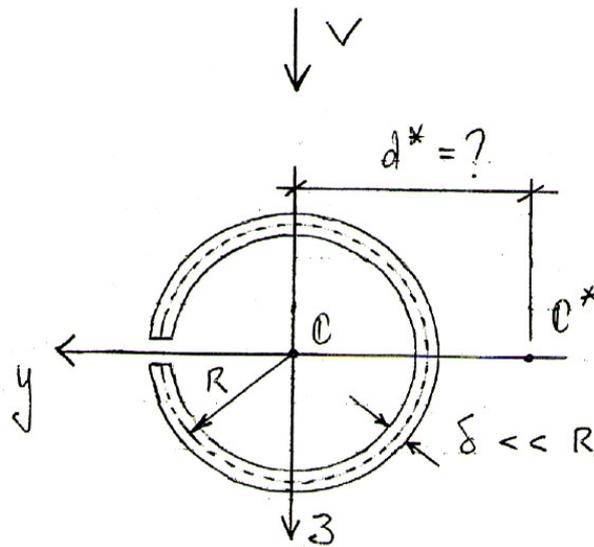


Figura 6 - 24

Resolução: O momento de inércia, por ser metade do momento polar, pode ser achado, através de um cálculo simplificado:

$$I = \frac{1}{2}(2\pi R\delta)R^2 = \pi R^3\delta$$

Antes de calcular a tensão tangencial, é preciso achar o centróide de um arco de circunferência de ângulo θ , conforme a figura 6-25.

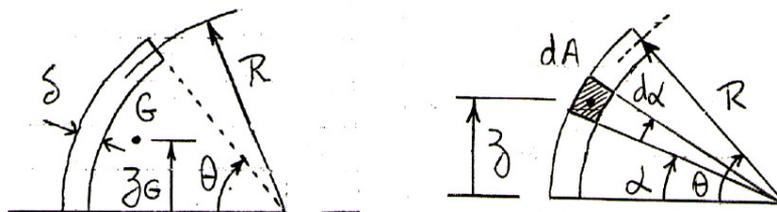


Figura 6 - 25

Mas isto é imediato:

$$z_G = \frac{\int_0^\theta z dA}{\int_0^\theta dA} = \frac{\int_0^\theta (R \sin \alpha)(\delta R d\alpha)}{R\theta\delta} = \frac{R}{\theta}(1 - \cos \theta)$$

O momento estático, conforme a figura 6-26, vale:

$$Q^* = A^* z^* = (R\theta\delta) \frac{R}{\theta}(1 - \cos \theta) = R^2\delta(1 - \cos \theta)$$

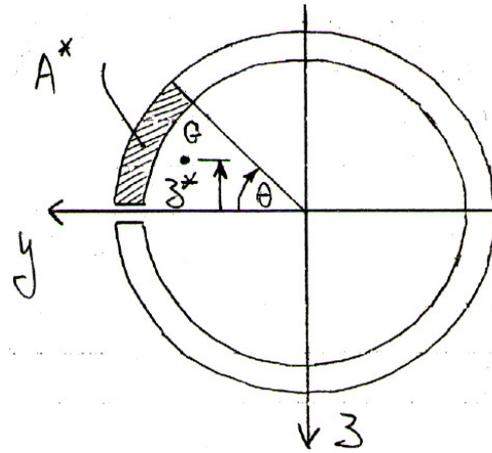


Figura 6 - 26

A tensão tangencial se escreve como ($b = \delta$):

$$\tau(\theta) = \frac{VQ^*}{bI} = \left(\frac{V}{2\pi R\delta} \right) 2(1 - \cos \theta) = \tau_{\text{médio}} K(\theta)$$

sendo o parâmetro adimensional $K(\theta)$ mostrado na figura 6-27. Note-se que a tensão máxima vale 4 vezes a tensão média.

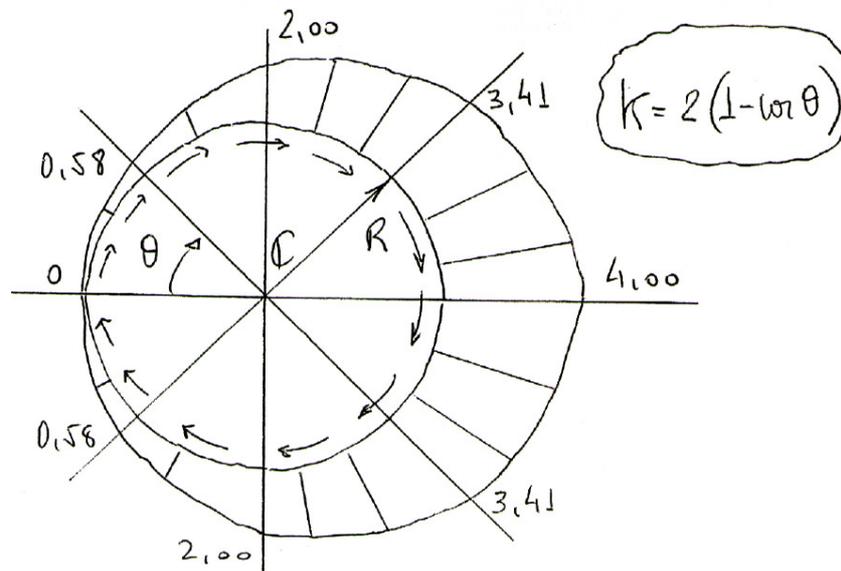


Figura 6 - 27

Finalmente, para achar o centro de cisalhamento, basta calcular a distancia d^* mostrada na figura 6-28. O momento elementar vale:

$$dM = [\tau(\theta)dA](R + d^* \cos \theta) \text{ sendo: } dA = \delta(R d\theta)$$

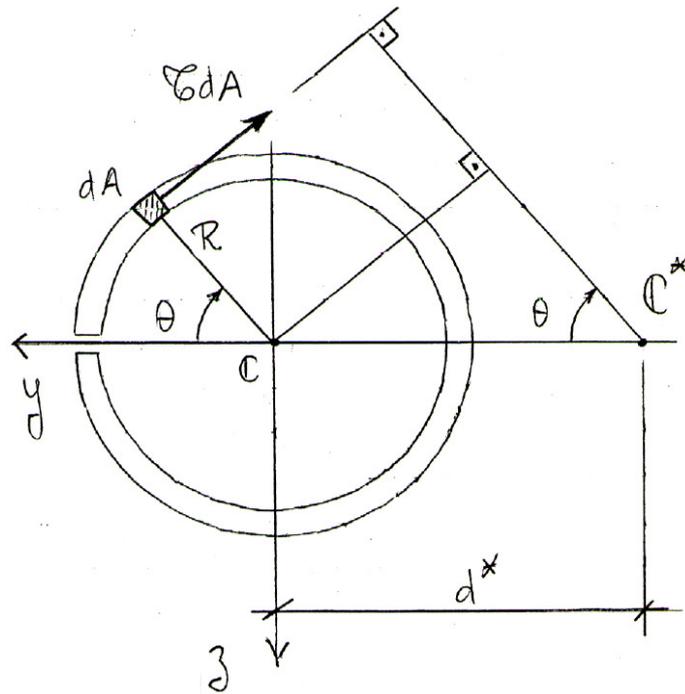


Figura 6 – 28

O momento total é a somatória dos momentos elementares e deve ser igual a zero:

$$M = \int dM = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0$$

Da condição acima, e usando a fórmula dada no enunciado, obtém-se (confirmar!):

$$\boxed{d^* = 2R}$$

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESCOLA POLITÉCNICA

Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica

**CURSO BÁSICO DE
RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS**

FASCÍCULO Nº 7

Deformações na flexão. Linha elástica

H. Britto

2.010

DEFORMAÇÕES NA FLEXÃO. LINHA ELÁSTICA

1) Hipótese de Navier

As seções transversais, que são, antes da deformação, planas e perpendiculares ao eixo da barra, permanecem, após a deformação, planas e normais ao eixo encurvado (*linha elástica*). Isso corresponde a se desprezar o efeito da força cortante, na deformação (figura 7-1).

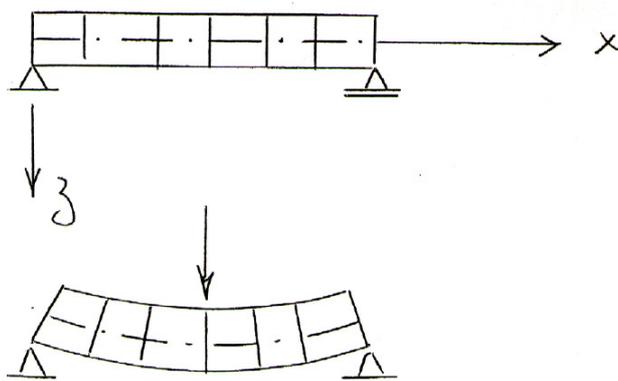


Figura 7 - 1

A hipótese de Bernoulli (distribuição linear das tensões normais) decorre da hipótese de Navier e da Lei de Hooke, como já foi visto no fascículo 4 (flexão normal).

2) Equação diferencial da linha elástica (E.D.L.E.)

A linha elástica é uma curva lisa ou suave, isto é, contínua e com derivada primeira contínua. A linha elástica, portanto, não pode ter “bicos”, porque nesses pontos a curvatura seria infinita, assim como o momento fletor, que, como veremos, é proporcional à curvatura.

A figura 7-2 representa uma viga, submetida a um carregamento qualquer $p = p(x)$. O eixo y não aparece na figura, está saindo do papel. A função que expressa a linha elástica é $w = w(x)$, onde w é o deslocamento transversal à viga, neste caso vertical (estamos desprezando o deslocamento horizontal dos pontos do eixo). Adotaremos a seguinte convenção de sinais:

$p > 0$: para baixo

$M > 0$: tração em baixo

$V > 0$: sentido horário

$w > 0$: para baixo

$\varphi > 0$: sentido horário

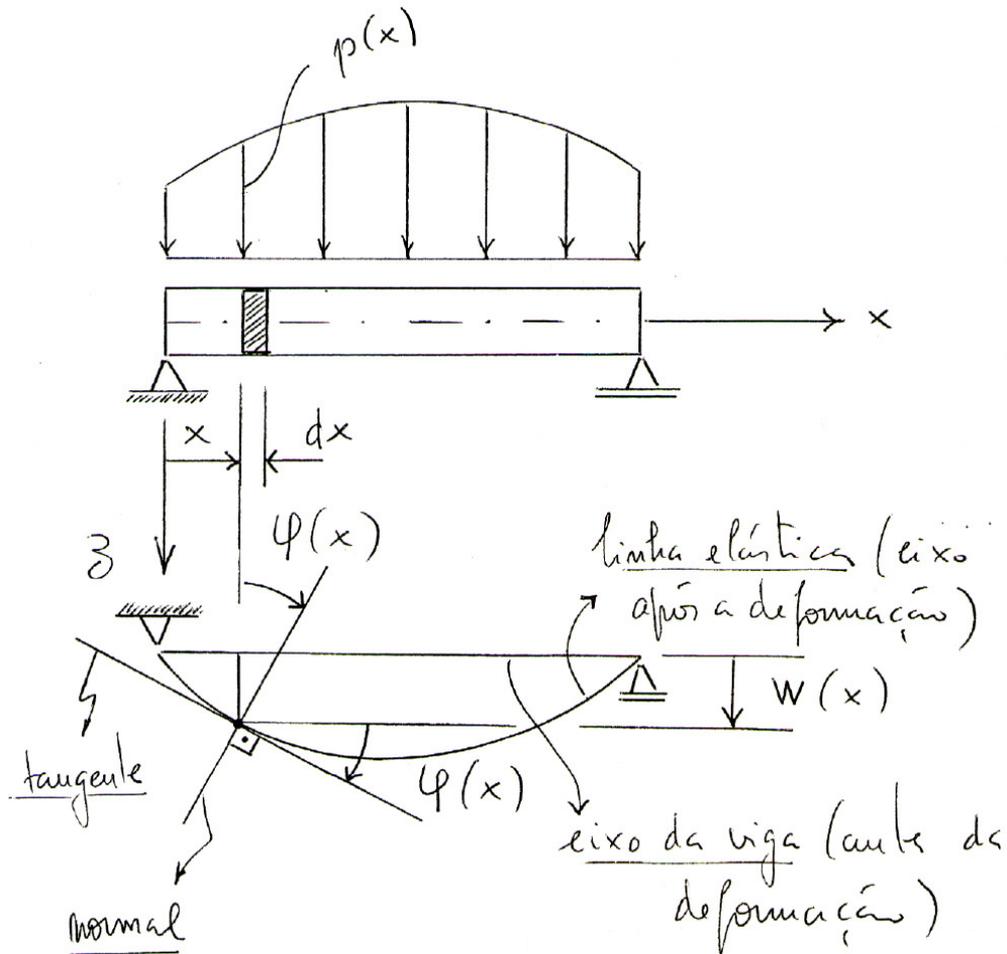


Figura 7 - 2

Sendo φ a rotação da seção, positiva no sentido horário, sabemos do Cálculo que:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dw}{dx}$$

Como as rotações são pequenas (da ordem do milésimo de radiano), podemos escrever, com muito boa aproximação (sendo φ em radianos):

$$\varphi = \frac{dw}{dx}$$

A figura 7-3 representa um elemento infinitesimal da viga, de comprimento dx , antes e depois da deformação. A fibra que corresponde ao eixo não se deforma, apenas encurva, mantendo o mesmo comprimento dx . As fibras abaixo do eixo se alongam, tanto mais quanto mais afastadas estiverem do eixo, e as fibras acima do eixo encurtam, sendo que a fibra mais comprimida é a fibra superior.

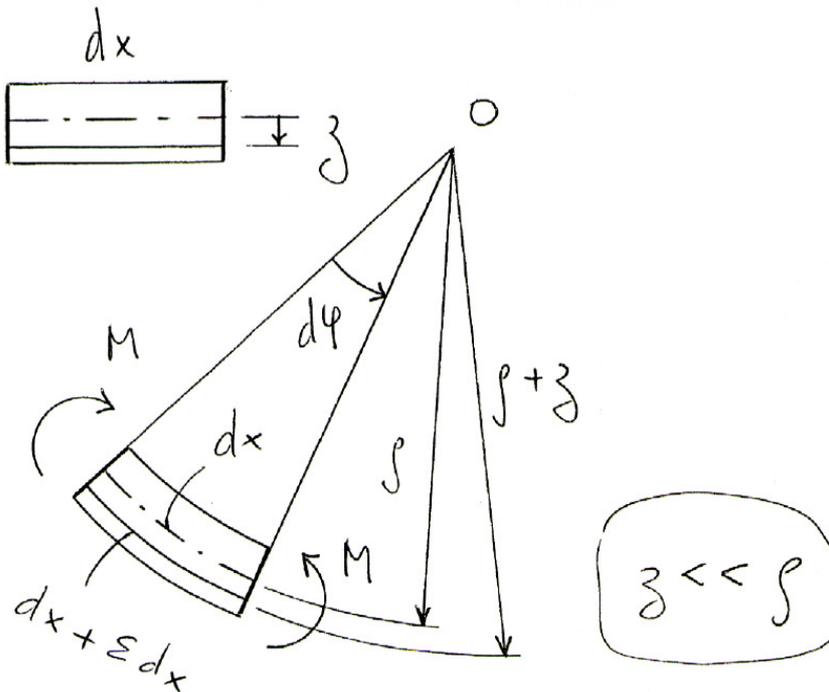


Figura 7 – 3

Seja $d\varphi$ o acréscimo local da rotação. Convém reparar que, para um momento $M > 0$ (tração em baixo), tem-se $d\varphi < 0$ (sentido anti-horário). Isso acarretará a necessidade de um sinal corretivo na formulação, como veremos a seguir.

Sendo ρ o raio de curvatura local ($\rho > 0$), podemos escrever:

$$dx = \rho (-d\varphi) \quad (i)$$

Para uma fibra abaixo do eixo, de ordenada z , temos:

$$dx + \varepsilon dx = (\rho + z)(-d\varphi) \quad (ii)$$

sendo $\varepsilon > 0$ a deformação da fibra. Comparando (i) e (ii), vem:

$$\varepsilon dx = z (-d\varphi)$$

Portanto, a *curvatura* local da linha elástica se escreve como:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{-d\varphi}{dx} = \frac{\varepsilon}{z}$$

Até aqui consideramos apenas a geometria da deformação (*compatibilidade*). Entrando agora com o material da viga (por meio da *lei de Hooke*: $\epsilon = \sigma/E$) e com a condição de *equilíbrio*: $\sigma = (M/I)z$, e ainda considerando que $\phi = w'$, a curvatura fica, finalmente:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{-d^2w}{dx^2} = \frac{-d\phi}{dx} = \frac{M}{EI} = \frac{\epsilon}{z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d\phi}{dx} = -\frac{M}{EI}}$$

onde o sinal $(-)$ é um sinal corretivo, para levar em conta o fato, já mencionado, de que, para um momento positivo, o incremento de rotação é negativo.

Integrando a equação acima, em função do momento fletor, chega-se ao campo de rotações $\phi = \phi(x)$. Integrando mais uma vez, obtém-se a linha elástica $w = w(x)$. As constantes de integração se determinam por meio das condições de contorno. Na prática se usa a forma condensada da equação:

$$\boxed{EIw'' = -M}$$

Primeira observação: O deslocamento máximo, também conhecido como *flecha* ($f = w_{\text{máx}}$), dar-se-á no ponto em que a rotação se anula ($\phi = w' = 0$). As rotações extremas ($\phi_{\text{máx}}$ e $\phi_{\text{mín}}$), por sua vez, ocorrerão nos pontos em que a curvatura se anula ($\phi' = w'' = 0$), ou, o que é o mesmo, nos pontos em que o momento se anula, já que o momento é proporcional à curvatura.

Segunda observação: Considerando as equações diferenciais de equilíbrio para o elemento de viga:

$$\frac{dV}{dx} = -p \quad \text{e} \quad \frac{dM}{dx} = V$$

a equação diferencial da linha elástica pode assumir as formas alternativas:

$$\boxed{EIw''' = -V}$$

$$\boxed{EIw^{(4)} = p}$$

que podem ser úteis (especialmente a última, quando o carregamento é complicado).

Exemplos de aplicação

Primeiro exemplo) Seja a viga em balanço, prismática, da figura 7-4.

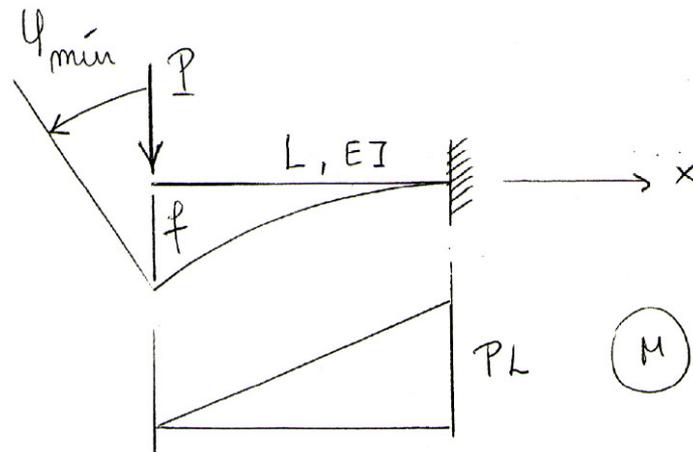


Figura 7 - 4

Momento fletor: $M = -Px$

Considerando a EDLE, vem:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{-M}{EI} = \frac{P}{EI}x \Rightarrow d\varphi = \left(\frac{P}{EI}x\right)dx \Rightarrow \varphi = \frac{P}{2EI}x^2 + C_1$$

Integrando mais uma vez:

$$\frac{dw}{dx} = \varphi \Rightarrow dw = \varphi dx \Rightarrow w = \int \varphi dx \Rightarrow w = \frac{P}{6EI}x^3 + C_1x + C_2$$

Para determinar as constantes de integração, impomos as *condições de contorno*:

$$\varphi(L) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{-PL^2}{2EI}$$

$$w(L) = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{PL^3}{3EI}$$

Portanto, o campo de rotações e a linha elástica (campo de deslocamentos) ficam:

$$\varphi = \frac{P}{2EI}x^2 - \frac{PL^2}{2EI}$$

e

$$w = \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{PL^2}{2EI}x + \frac{PL^3}{3EI}$$

O deslocamento máximo (*flecha* f) e a rotação mínima se dão para $x = 0$ (tratam-se de extremos não analíticos, que ocorrem na extremidade do intervalo):

$$f = w_{\text{máx}} = w(0) = \frac{PL^3}{3EI} \quad (\text{para baixo})$$

$$\varphi_{\min} = \varphi(0) = -\frac{PL^2}{2EI} \quad (\text{anti-horário})$$

Segundo exemplo) Seja a viga simplesmente apoiada da figura 7-5, sujeita a uma carga distribuída $p = \text{cte}$.

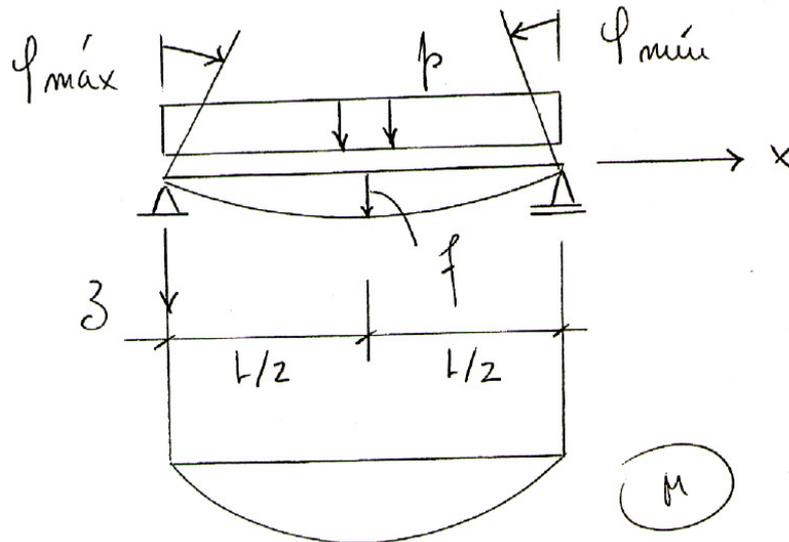


Figura 7 - 5

Momento fletor:
$$M = \frac{pL}{2}x - \frac{p}{2}x^2$$

Considerando a forma compacta ($EIw'' = -M$) da EDLE, vem:

$$EIw'' = -\frac{pL}{2}x + \frac{p}{2}x^2$$

Integrando duas vezes, consecutivamente:

$$EIw' = -\frac{pL}{4}x^2 + \frac{p}{6}x^3 + C_1$$

$$EIw = -\frac{pL}{12}x^3 + \frac{p}{24}x^4 + C_1x + C_2$$

Condições de contorno:

$$w(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$w(L) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{pL^3}{24}$$

donde, finalmente:

$$EIw' = -\frac{pL}{4}x^2 + \frac{p}{6}x^3 + \frac{pL^3}{24}$$

$$EIw = -\frac{pL}{12}x^3 + \frac{p}{24}x^4 + \frac{pL^3}{24}x$$

A flecha se dará, por simetria, na seção a meio vão (e também porque lá $\varphi = 0$):

$$f = w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{pL^4}{EI}$$

As rotações extremas se dão nas extremidades da viga:

$$\varphi_{\text{máx}} = \varphi(0) = \frac{pL^3}{24EI} \quad \text{e} \quad \varphi_{\text{mín}} = \varphi(L) = -\frac{pL^3}{24EI}$$

Terceiro exemplo) Seja a viga da figura 7-6, sujeita a uma carga hidrostática, ou seja, uma carga triangular cujo valor máximo é p_0

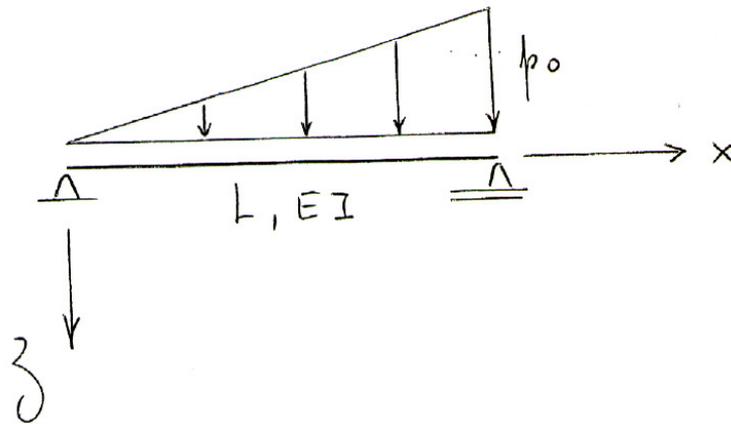


Figura 7 - 6

Neste exemplo, como a carga não é tão simples, vamos usar a equação de quarta ordem:

$$EIw^{IV} = p = p_0 \frac{x}{L}$$

Integrando seqüencialmente:

$$EIw''' = \frac{p_0}{2L} x^2 + C_1$$

$$EIw'' = \frac{p_0}{6L}x^3 + C_1x + C_2$$

$$EIw' = \frac{p_0}{24L}x^4 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$$

$$EIw = \frac{p_0}{120L}x^5 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4$$

Condições de contorno:

$$w''(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$w(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$w''(L) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{p_0L}{6}$$

$$w(L) = 0 \Rightarrow C_3 = \frac{7}{360}p_0L^3$$

Portanto, as expressões anteriores ficam, com as constantes determinadas:

$$EIw''' = \frac{p_0}{2L}x^2 - \frac{p_0L}{6} \quad (= -V)$$

$$EIw'' = \frac{p_0}{6L}x^3 - \frac{p_0L}{6}x \quad (= -M)$$

$$EIw' = \frac{p_0}{24L}x^4 - \frac{p_0L}{12}x^2 + \frac{7}{360}p_0L^3$$

$$EIw = \frac{p_0}{120L}x^5 - \frac{p_0L}{36}x^3 + \frac{7}{360}p_0L^3x$$

Para descobrir a flecha, basta fazer $\varphi = w' = 0$, obtendo a seguinte equação bi-quadrada:

$$15x^4 - 30L^2x^2 + 7L^4 = 0$$

cuja raiz, a única que nos interessa, é:

$$x = \sqrt{\frac{15 - 2\sqrt{30}}{15}} L \cong 0,51933 L$$

e com a qual podemos obter o valor da flecha: $f = w_{\max} \cong 6,5222 (10)^{-3} \frac{p_0L^4}{EI}$

Quarto exemplo) Seja a viga simplesmente apoiada da figura 7-7, sujeita a uma carga P.

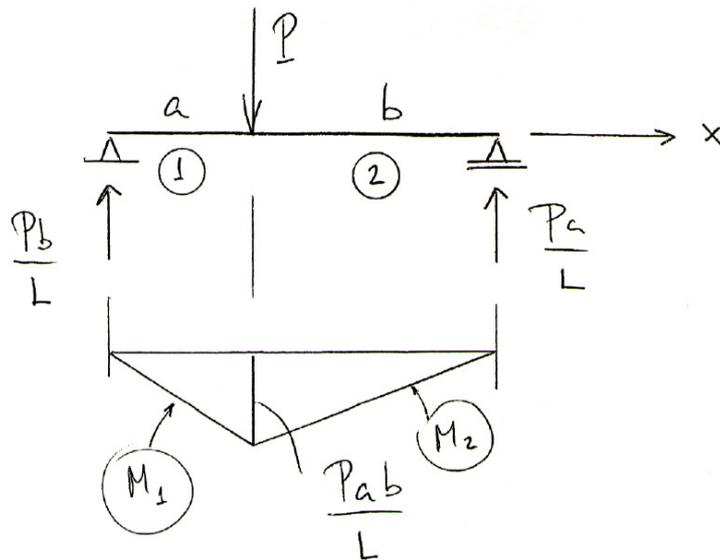


Figura 7 - 7

Imediatamente aparece uma dificuldade neste caso. É que não existe uma expressão única do momento fletor, que seja válida para todo o domínio do problema. Assim, vamos dividir a viga em duas partes, a parte 1, à esquerda da carga, e a parte 2, à direita.

No trecho 1 : $M_1(x) = \frac{Pb}{L}x$

$$EIw_1'' = -M_1 = -\frac{Pb}{L}x$$

$$EIw_1' = -\frac{Pb}{2L}x^2 + C_1$$

$$EIw_1 = -\frac{Pb}{6L}x^3 + C_1x + C_2$$

No trecho 2 : $M_2(x) = \frac{Pa}{L}(L-x)$

$$EIw_2'' = -M_2 = -Pa + \frac{Pa}{L}x$$

$$EIw_2' = -Pax + \frac{Pa}{2L}x^2 + C_3$$

$$EIw_2 = -\frac{Pa}{2}x^2 + \frac{Pa}{6L}x^3 + C_3x + C_4$$

Condições de contorno:

$$w_1(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = C_2$$

$$w_2(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -\frac{Pa}{2}L^2 + \frac{Pa}{6L}L^3 + C_3L + C_4$$

$$w_1(a) = w_2(a) \quad \Rightarrow \quad -\frac{Pb}{6L}a^3 + C_1a + C_2 = -\frac{Pa^3}{2} + \frac{Pa^4}{6L} + C_3a + C_4$$

$$w_1'(a) = w_2'(a) \quad \Rightarrow \quad -\frac{Pb}{2L}a^2 + C_1 = -Pa^2 + \frac{Pa^3}{2L} + C_3$$

Resolvendo o sistema acima, determinam-se as 4 constantes de integração, e o problema fica resolvido.

Se houvesse duas cargas, em vez de uma, haveria a necessidade de dividir a viga em três trechos, e apareceriam 6 constantes de integração. No item seguinte apresenta-se uma maneira prática de facilitar a resolução de problemas deste tipo.

3) A função de Macaulay

Define-se a função de Macaulay da seguinte forma:

$$\langle x-a \rangle = \begin{cases} (x-a) & \text{se } x-a > 0 \\ \text{(não existe)} & \text{se } x-a < 0 \end{cases}$$

Exemplo (Prof. Diogo): Determinar a linha elástica $w(x)$ da viga da figura 7-8. É dado o produto de rigidez à flexão da viga: $EI = 10^5 \text{ kgf m}^2$ (constante).

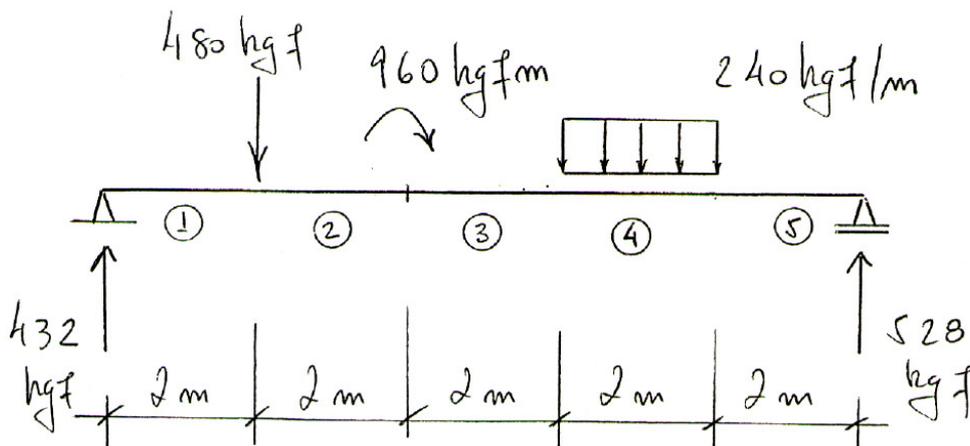


Figura 7 - 8

A resolução deste problema fica muito simplificada se usarmos a função de Macaulay. Caso contrário, como são 5 trechos, teríamos que determinar 10 constantes de integração.

A expressão do momento fletor, válida para toda a extensão da viga, é a seguinte:

$$M(x) = 432x - 480\langle x - 2 \rangle + 960\langle x - 4 \rangle^0 - 120\langle x - 6 \rangle^2 + 120\langle x - 8 \rangle^2$$

A equação diferencial da linha elástica ($EIw'' = -M$) fica:

$$EIw'' = -432x + 480\langle x - 2 \rangle - 960\langle x - 4 \rangle^0 + 120\langle x - 6 \rangle^2 - 120\langle x - 8 \rangle^2$$

Integrando duas vezes, consecutivamente, vem (a função de Macaulay se integra como outra função qualquer):

$$EIw' = -216x^2 + 240\langle x - 2 \rangle^2 - 960\langle x - 4 \rangle + 40\langle x - 6 \rangle^3 - 40\langle x - 8 \rangle^3 + C_1$$

$$EIw = -72x^3 + 80\langle x - 2 \rangle^3 - 480\langle x - 4 \rangle^2 + 10\langle x - 6 \rangle^4 - 10\langle x - 8 \rangle^4 + C_1x + C_2$$

Temos apenas 2 constantes de integração, que podem ser determinadas por meio das condições de contorno (nos apoios da viga):

$$w(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = C_2$$

$$w(10) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -72(10)^3 + 80(8)^3 - 480(6)^2 + 10(4)^4 - 10(2)^4 + C_1(10)$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = 4.592 \text{ kgf m}^2$$

e o problema está resolvido. Se quisermos o valor da flecha, podemos pesquisar em qual trecho a rotação muda de sinal. Considere-se a seguinte tabela:

x (m)	w' = φ (rad)
0	4,592 (10) ⁻²
2	3,728 (10) ⁻²
4	2,096 (10) ⁻²
6	-1,264 (10) ⁻²
8	-4,112 (10) ⁻²
10	-5,168 (10) ⁻²

Portanto, a rotação se anula entre $x = 4 \text{ m}$ e $x = 6 \text{ m}$, ou seja, no trecho 3. Neste trecho a rotação é dada por:

$$EIw' = -216x^2 + 240(x - 2)^2 - 960(x - 4) - 4.592$$

$$w' = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 240x + 1.114 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4,9476 \text{ m}$$

A flecha será: $f = w_{\text{máx}} = w(4,9476) = 0,15617 \text{ m}$ (para baixo)

4) Introdução ao estudo das vigas hiperestáticas

O estudo apresentado tem, como importante aplicação, a resolução de vigas hiperestáticas. O assunto será apresentado por meio de dois exemplos.

Num primeiro caso, seja a viga da figura 7-9 (uma vez hiperestática). O primeiro passo para resolver essa viga é transformá-la numa viga isostática (que pode ser uma viga em balanço), sujeita a duas cargas aplicadas, uma conhecida e outra a determinar (incógnita hiperestática R), como mostra a figura 7-9.

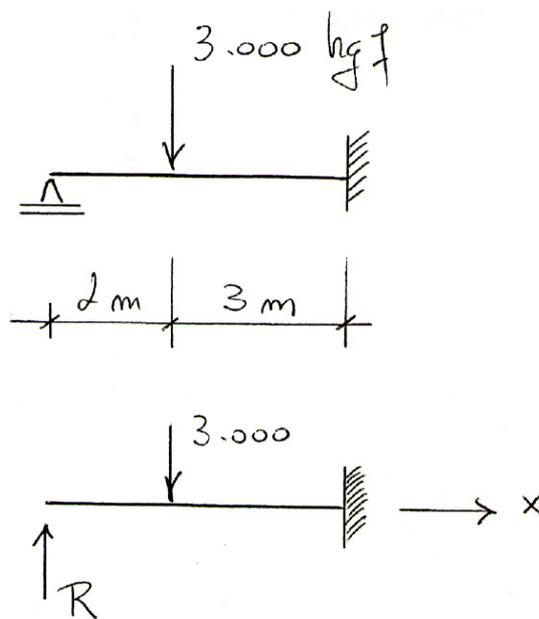


Figura 7 - 9

Sendo assim, vem:

$$EI w'' = -M = -R x + 3.000 \langle x - 2 \rangle$$

$$EI w' = -\frac{R}{2} x^2 + 1.500 \langle x - 2 \rangle^2 + C_1$$

$$EI w = -\frac{R}{6} x^3 + 500 \langle x - 2 \rangle^3 + C_1 x + C_2$$

Há 3 incógnitas: as duas constantes de integração e a reação de apoio. Há também 3 condições de contorno:

$$w(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_2$$

$$w'(5) = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{R}{2}(5)^2 + 1.500(3)^2 + C_1$$

$$w(5) = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{R}{6}(5)^3 + 500(3)^3 + C_1(5) + C_2$$

Resolvendo o sistema, obtêm-se:

$$\begin{cases} R = 1.296 \text{ kgf} \\ C_1 = 2.700 \text{ kgf m}^2 \end{cases}$$

com o que se definem a linha elástica e o campo de rotações. Note-se que a resolução do problema independe do valor do produto de rigidez EI .

Segundo exemplo) Resolver a viga contínua da figura 7-10, sabendo-se que há um recalque no apoio B, de valor $\delta_B = 0,008 \text{ m}$.
É dado: $EI = 10^4 \text{ kgf m}^2$

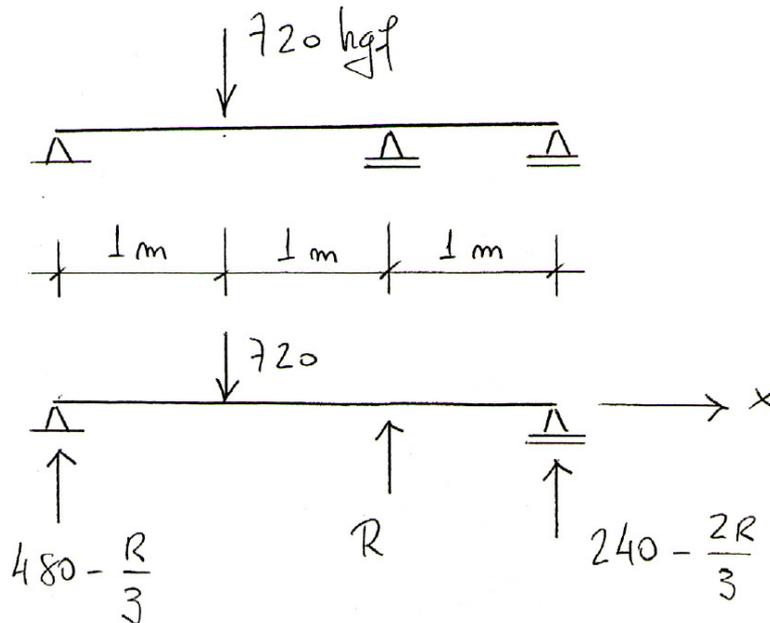


Figura 7 - 10

Para resolver, suprime-se o apoio B, aplicando-se em seu lugar a reação R da viga hiperestática, de acordo com a figura 10. Escreve-se então:

$$EI w'' = -M = -\left(480 - \frac{R}{3}\right)x + 720\langle x - 1 \rangle - R\langle x - 2 \rangle$$

$$EI w' = -\left(480 - \frac{R}{3}\right) \frac{x^2}{2} + 360 \langle x-1 \rangle^2 - \frac{R}{2} \langle x-2 \rangle^2 + C_1$$

$$EI w = -\left(480 - \frac{R}{3}\right) \frac{x^3}{6} + 120 \langle x-1 \rangle^3 - \frac{R}{6} \langle x-2 \rangle^3 + C_1 x + C_2$$

Condições de contorno:

$$w(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = C_2$$

$$w(2) = 0,008 \quad \Rightarrow \quad 10^4(0,008) = -\left(480 - \frac{R}{3}\right) \frac{(2)^3}{6} + 120(1)^3 + C_1(2) + C_2$$

$$w(3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -\left(480 - \frac{R}{3}\right) \frac{(3)^3}{6} + 120(2)^3 - \frac{R}{6}(1)^3 + C_1(3) + C_2$$

Resolvendo, vem:

$$\begin{cases} R = 450 \text{ kgf} \\ C_1 = 200 \text{ kgf m}^2 \end{cases}$$

e o problema fica inteiramente resolvido.