Eletromagnetismo - Prova 2

18 de junho de 2012

Solução

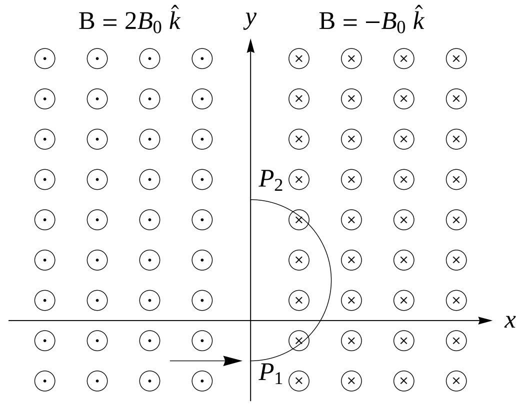
Exercício	Nota
1	
2	
3	
4	
5	

- A prova tem duração de 1h:40min.
- Resolva os problemas nos locais propriamente designados. Há espaço mais do que suficiente.
- Esta é uma prova de física: o foco é na física, não na matemática. Se os seus cálculos estiverem muito complicados, há uma grande probabilidade que você esteja fazendo algo errado.
- As questões somam um total 100 pontos.
- O gabarito estará disponível no mesmo dia.

(1) (16 pontos) Considere o problema da figura abaixo referente a uma certa região do espaço onde o campo magnético vale

$$\boldsymbol{B} = \begin{cases} -B_0\hat{\boldsymbol{k}} & x > 0 \quad \text{(entrando na página)} \\ +2B_0\hat{\boldsymbol{k}} & x < 0 \quad \text{(saindo da página)} \end{cases}$$

Uma partícula de massa m e carga q é injetada no ponto P_1 com velocidade v, para a direita. Observa-se que ela descreve uma trajetória circular para cima (vide figura). Suas respostas devem ser em termos de m, q, B_0 e v.



(a) (4 pontos) A carga da partícula é positiva ou negativa? Justifique.

Temos $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{\imath}}$ e $\boldsymbol{B} = B_0(-\hat{\boldsymbol{k}})$; com isso $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = vB_0\hat{\boldsymbol{\jmath}}$. Para que o movimento da partícula seja para cima, a direção da força magnética também deve ser $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$; portanto, como $\boldsymbol{F}_M = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$, a carga deverá necessariamente ser **positiva**.

(b) (4 pontos) Partindo do fato de que a força magnética age como uma força centrípeta, calcule o raio da trajetória.

Igualando a força centrípeta (mv^2/r) com a força magnética (qvB), obtemos para o raio

$$r = \frac{mv}{qB}$$

(c) (4 pontos) Qual o tempo necessário para ela atingir o ponto P_2?

A velocidade do movimento é constante e portanto o tempo necessário para atingir P_2 será

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{v} = \frac{\pi r}{v} = \frac{\pi m}{qB}$$

Note que o tempo de vôo independe da velocidade.

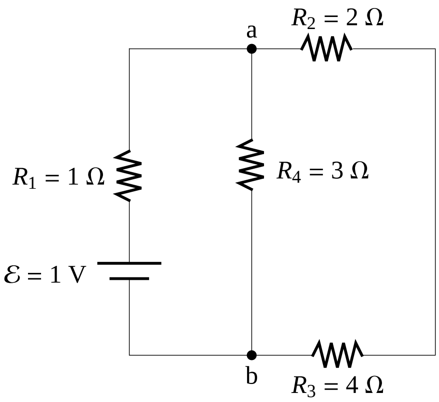
(d) (4 pontos) Após passar por P_2 a partícula irá descrever outro semi-círculo até cruzar novamente com o eixo y num novo ponto, P_3. Qual será a direção e o raio do movimento neste intervalo? Explique.

Em P_2 teremos $\boldsymbol{v} = v(-\hat{\boldsymbol{\imath}})$ e $\boldsymbol{B} = 2B_0\hat{\boldsymbol{k}}$. Assim, novamente, a força magnética será $\boldsymbol{F}_M = qv(2B_0)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$; ou seja, para cima, como no intervalo anterior. O novo raio será simplesmente

$$r' = \frac{mv}{2qB_0}$$

Ele vale metade do raio entre P_1 e P_2: quanto maior o campo, mais confinada é a trajetória.

(2) (16 pontos) Considere o circuito da figura abaixo.



(a) (4 pontos) Calcule a corrente I_1 através de R_1.

A resistência equivalente entre de R_2 e R_3 é $R_{23} = R_2 + R_3 = 6\ \Omega$. Já a resistência equivalente de R_4 com R_{23} é

$$\frac{1}{R_{234}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Ou seja, $R_{234} = 2\ \Omega$. Assim, pela lei de Ohm, a corrente passando por R_1 será simplesmente

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_{234}} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}\ \text{A}$$

(b) (4 pontos) Calcule a diferença de potencial entre os pontos a e b.

A resistência equivalente referente aos pontos a e b é $R_{234} = 2\ \Omega$. Portanto,

$$\Delta V_{ab} = I_1 R_{234} = \frac{2}{3}\ \text{V}$$

Nota: a ddp através de R_1 é $\Delta V_1 = I_1 R_1 = 1/3$ V. Ela, somada a ΔV_{ab}, retorna 1 V, que é a fem fornecida pela bateria, como esperado.

(c) (4 pontos) Calcule as correntes I_2, I_3 e I_4 através de R_2, R_3 e R_4 respectivamente.

Os três resistores estão sob a mesma diferença de potencial, que é $\Delta V_{ab} = 2/3$ V. Teremos, portanto,

$$I_2 = I_3 = \frac{\Delta V_{ab}}{R_{23}} = \frac{2/3}{6} = \frac{1}{9}\ \text{A}$$

Analogamente,

$$I_4 = \frac{\Delta V_{ab}}{R_4} = \frac{2/3}{3} = \frac{2}{9}\ \text{A}$$

Nota: $I_2 + I_4 = 1/9 + 2/9 = 1/3\ \text{A} = I_1$, assim como previsto ($I_1$ se divide em I_2 e I_4 no ponto a).

(d) (4 pontos) Suponha agora que $R_3 \to \infty$. Recalcule as correntes através de cada resistor.

Neste caso não passará corrente pelo ramo de R_3. Portanto, $I_2 = I_3 = 0$. Consequentemente, as correntes através de R_1 e R_4 passarão a ser as mesmas, valendo

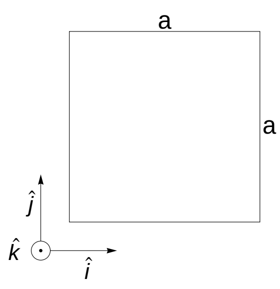
$$I_1 = I_4 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_4} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}\ \text{A}$$

Nota: a resistência equivalente $R_{234} = 2\ \Omega$ dos itens anteriores era menor que R_4. Isso concorda com o fato que a corrente extraída da bateria nos casos anteriores (1/3 A) era maior do que no presente caso (1/4 A).

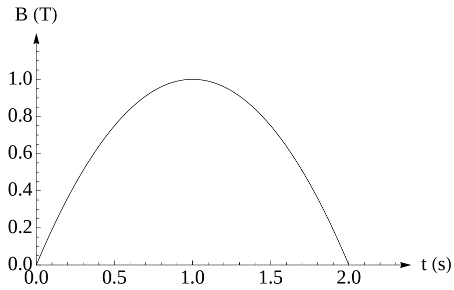
(3) (28 pontos) Considere o problema da figura abaixo, referente a uma espira quadrada de aresta a, cuja resistência total é R. Em $t = 0$ ela é submetida a um campo magnético pulsado,

$$\boldsymbol{B}(t) = \begin{cases} B_0[1 - (t-1)^2]\hat{\boldsymbol{k}} & 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

[vide figura (b)] Assuma que o campo é homogêneo no espaço. Tome a normal da espira como sendo na direção $\hat{\boldsymbol{k}}$ e, para correntes, tome o sentido anti-horário como positivo.



(a) Espira



(b) Campo magnético

(a) (7 pontos) Calcule o fluxo magnético através da espira em função do tempo. [Sua resposta deverá conter apenas a, B_0, R, t, constantes e números.]

Pela definição de fluxo temos,

$$\Phi_B = \int \boldsymbol{B} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}A = \int B\, \mathrm{d}A = BA = Ba^2 = a^2 B_0[1 - (t-1)^2]$$

(b) (7 pontos) Obtenha uma expressão para a corrente $I(t)$ em função do tempo. [Sua resposta deverá conter apenas a, B_0, R, t, constantes e números.]

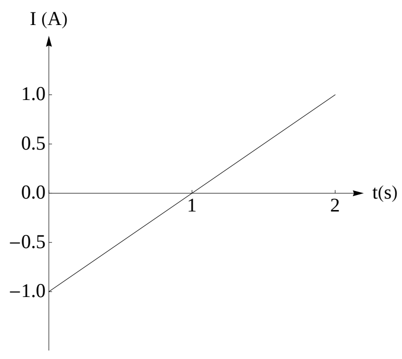
Usando a lei de Ohm e em seguida a lei de Faraday escrevemos

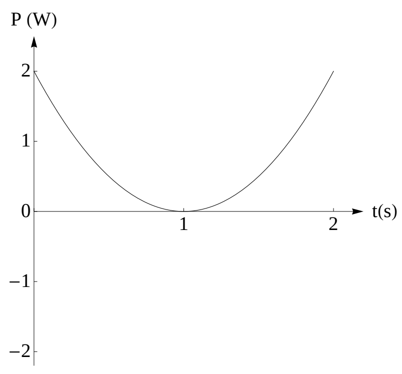
$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_{\text{ind}}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{B_0 a^2}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[1 - (t-1)^2]$$

$$\therefore \quad I(t) = \frac{2B_0 a^2}{R}(t-1)$$

(c) (7 pontos) Tome $a = 1$ m, $B_0 = 1$ T e $R = 2\ \Omega$. Esboce um gráfico da corrente I, e da potência P, em função do tempo. Não se esqueça das escalas.

Com os valores fornecidos obtemos $I(t) = (t-1)$. A potência dissipada é $P = RI(t)^2 = 2(t-1)^2$.





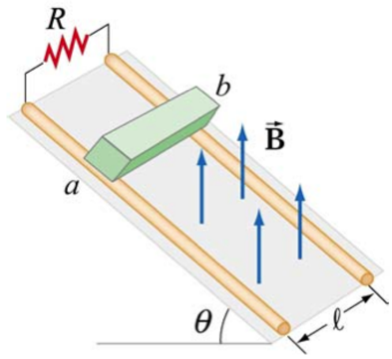
(d) (7 pontos) Explique como é possível prever qualitativamente o comportamento da corrente baseado somente no gráfico de $B(t)$ (ou seja, se você por exemplo não soubesse explicitamente qual a fórmula para $B(t)$).

O ponto principal é que

$$I(t) \propto -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

Ou seja, a corrente é proporcional ao negativo da *taxa de variação* do fluxo (que neste caso varia somente devido ao campo). Assim, mesmo que a forma funcional do gráfico não fosse conhecida, eu saberia que: (i) no inicio a corrente seria negativa pois a inclinação de $B(t)$ é positiva; (ii) em torno de $t = 1$s a corrente seria praticamente nula pois a taxa de inclinação de $B(t)$ é praticamente nula; (iii) após $t = 1$s a corrente passa a ser positiva pois a taxa de inclinação de $B(t)$ se torna negativa.

(4) (15 pontos) A barra na figura abaixo desliza sem atrito por trilhos condutores separados por uma distância l e inclinados de um ângulo θ com relação à horizontal. Na região do sistema há um campo magnético B, constante e uniforme, que aponta para cima. O sistema, cuja resistência é desprezível, está ligado a um resistor de resistência R.



(a) (5 pontos) Qual o sentido da corrente na barra? De a para b ou de b para a? Explique.

O fluxo é positivo pois $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} = B\cos\theta$. Além disso, conforme a barra desliza, a área do circuito formado por ela e pelo resistor aumenta. Portanto $\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} > 0$. Consequentemente, pela lei de Lenz, haverá uma corrente induzida no circuito cuja direção será tal a se opor ao aumento do fluxo magnético. Concluímos então que a corrente deve criar um campo magnético para baixo e, consequentemente, deve ser no sentido **horário**. Ou seja, ela atravessa a barra de **b para a**.

(b) (10 pontos) Suponha que num certo instante de tempo a velocidade da barra seja $v(t)$. Qual será a magnitude da corrente neste instante? [Dica: atenção para a inclinação dos trilhos.]

O fluxo magnético será

$$\Phi_B = \int \boldsymbol{B} \cdot \hat{n}\,\mathrm{d}A = \int (B\cos\theta)\,\mathrm{d}A = Blx(t)\cos\theta$$

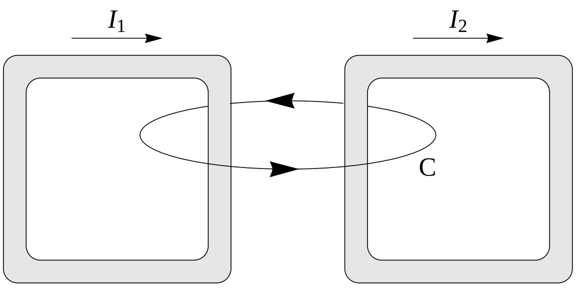
onde $x(t)$ é a distância percorrida pela barra. Portanto, usando a lei de Ohm seguida da lei de Faraday obtemos

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_{\text{ind}}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{Bl\cos\theta}{R}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\therefore \quad I(t) = -\frac{Blv\cos\theta}{R}$$

(5) (25 pontos) Nas questões abaixo não é necessário mostrar seu trabalho.

(a) (5 pontos) De acordo com a lei de Ampere, a integral $\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ através do circuito C abaixo vale:

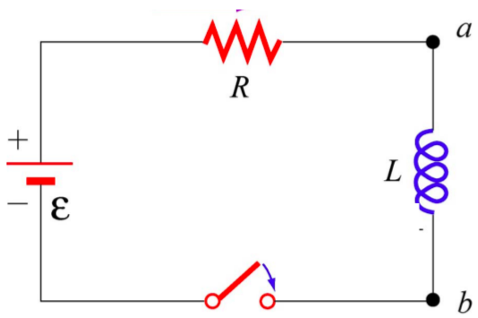


- ☐ $\mu_0(I_2 + I_1)$
- ☒ $\mu_0(I_2 - I_1)$
- ☐ $\mu_0(I_1 - I_2)$
- ☐ $\mu_0 I_2$
- ☐ $\mu_0 I_1$
- ☐ 0
- ☐ Nenhuma das alternativas

De acordo com a regra da mão direita, ao circularmos no sentido anti-horário, correntes para cima devem ser tomadas como positivas e correntes para baixo como negativas. Portanto, usando a lei de Ampere obtemos

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I_C = \mu_0(I_2 - I_1)$$

(b) (10 pontos) A chave no circuito abaixo é fechada em $t = 0$. Em $t = 1$ s, mediu-se uma corrente no circuito de 5 A. Se $\mathcal{E} = 10$ V e $R = 1\ \Omega$, então a indutância $\mathcal{L}$ vale (em Henries):



- ☐ $\ln 2$
- ☐ 1
- ☒ $1/\ln 2$
- ☐ $1/2$
- ☐ $\ln(1/2)$
- ☐ $\ln 5$
- ☐ Nenhuma das alternativas

A corrente em função do tempo é descrita por

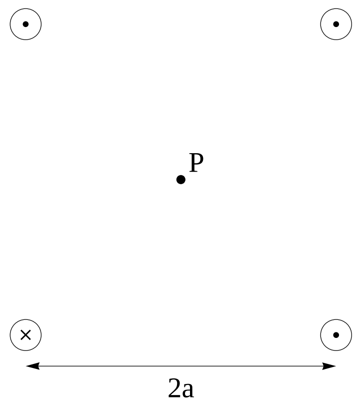
$$I(t) = I_m(1 - e^{-t/\tau})$$

onde $I_m = \mathcal{E}/R = 10$ A e $\tau = \mathcal{L}/R$. Em $t = 1$s mediu-se $I(1) = 5$ A $= I_m/2$. Portanto,

$$\frac{1}{2} = 1 - e^{-1/\tau} \longrightarrow -\frac{1}{\tau} = \ln(1/2) = -\ln 2$$

Ou seja, $\tau = 1/\ln 2$. Como $R = 1\ \Omega$ chegamos finalmente a $\mathcal{L} = 1/\ln 2$ H.

(c) (10 pontos) A figura abaixo ilustra quatro fios infinitos igualmente espaçados por uma distância $2a$. A magnitude da corrente é a mesma em todos os fios, I, e as direções estão denotadas na figura. O campo magnético no ponto P, que se encontra exatamente no centro do sistema, será

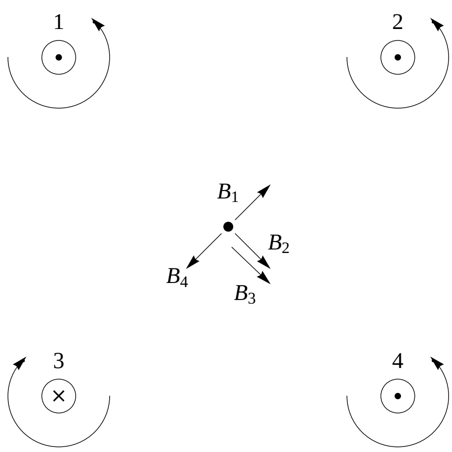


- ☒ $\frac{\mu_0 I}{\sqrt{2}\pi a}$, orientado para baixo
- ☐ $\frac{\mu_0 I}{\sqrt{2}\pi a}$, orientado para cima
- ☐ $\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$, orientado para baixo
- ☐ $\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$, orientado para cima
- ☐ $\frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2}\pi a}$, orientado para baixo
- ☐ $\frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2}\pi a}$, orientado para cima
- ☒ Vide Comentário Nenhuma das alternativas

O campo magnético produzido por um fio infinito à uma distância r dele é dado por

$$B_{\text{fio}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

No presente caso a distância r de interesse é a distância de cada fio ao ponto P, que vale $r = \sqrt{2}a$ (o que pode ser visto facilmente pela geometria do problema). Como o diagrama na figura abaixo ajuda a ilustrar, no ponto P o campo de um dos fios aponta para cima, ao passo que os outros três todos apontam para baixo (inclinados como indicado na figura).



Consequentemente, o campo total será a soma de apenas dois dos quatro campos presentes (já que dois deles se cancelam mutuamente). Portanto,

$$B(P) = 2B_{\text{fio}}(r = \sqrt{2}a) = 2 \times \frac{\mu_0 I}{2\pi(\sqrt{2}a)} = \frac{\mu_0 I}{\sqrt{2}\pi a}$$

Além disso, como também é possível observar da figura, a direção do campo resultante é para baixo.

As expressões **“para baixo”** e **“para cima”** foram péssimas escolhas pois dão a entender **“verticalmente para baixo”** ou **“verticalmente para cima”**. Em sala foi avisado explicitamente que “para cima” deveria ser interpretado como qualquer vetor acima da horizontal. Mesmo assim, eu imagino que isso possa ter causado uma certa confusão. Por essa razão, eu também vou aceitar “Nenhuma das alternativas” como resposta. Peço desculpas pelo erro.