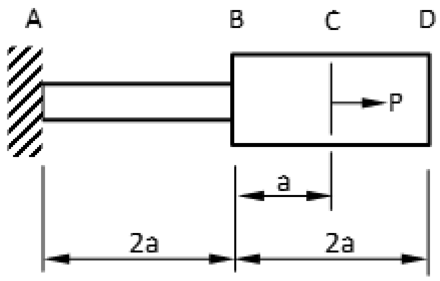
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

PME3210 – Mecânica dos Sólidos I – Prova Substitutiva – 11/07/2017
Duração: 100 minutos

Não é permitido o uso de equipamentos eletrônicos durante a prova!

1ª Questão (2,0 pontos)



A barra reta da figura, engastada em A e livre em D, é formada pela união dos segmentos prismáticos AB, de comprimento 2a e área de seção transversal S, e BD, de comprimento 2a e área de seção transversal 4S. O material do qual é fabricada possui relação tensão-deformação não-linear dada por $\sigma = K\epsilon^n$, onde K e n são constantes obtidas experimentalmente. A barra sofre a ação do carregamento P na seção transversal C. Nessas condições pedem-se:

a) o alongamento da barra na extremidade D;

b) considerando que a tensão de cisalhamento máxima admissível é $\tau_a = \frac{3P}{4S}$, determine o fator de segurança ao cisalhamento nas mesmas condições de carregamento e vinculação.

Resolução

(a)

O deslocamento em D será idêntico ao de C, pois a força normal no trecho CD é nula (não há força externa aplicada). Assim:

$$\delta_D = \delta_C$$

Para obter a relação entre o alongamento e a força normal, utilizamos a equação constitutiva não-linear do material:

$$\sigma = K\epsilon^n \rightarrow \frac{N}{A} = K\left(\frac{\delta}{L}\right)^n \rightarrow \delta = \left(\frac{N}{AK}\right)^{\frac{1}{n}} L$$

Utilizando os dados do problema temos:

$$\delta_D = \delta_{AB} + \delta_{BC} = \left(\frac{P}{SK}\right)^{\frac{1}{n}}.2a + \left(\frac{P}{4SK}\right)^{\frac{1}{n}}.a$$

$$\delta_D = a.\left(\frac{P}{SK}\right)^{\frac{1}{n}}\left[2 + \frac{1}{2^{\frac{2}{n}}}\right] \Longrightarrow$$

$$\delta_D = a.\left(\frac{P}{SK}\right)^{\frac{1}{n}}\left[\frac{2^{\frac{n+2}{n}} + 1}{2^{\frac{2}{n}}}\right]$$

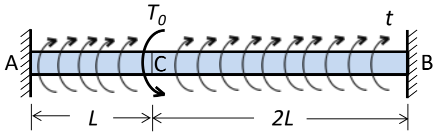
(b)

As máximas tensões de cisalhamento devido a esforços de tração ocorrem em planos a 45^o em relação ao eixo da barra (direção longitudinal) e valem $\frac{\sigma_{\max}}{2}$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{S} \rightarrow \tau_{max} = \frac{P}{2S}$$

$$f_s = \frac{\tau_a}{\tau_{max}} = \frac{\frac{3P}{4S}}{\frac{P}{2S}} = \frac{3}{2}$$

2ª Questão (4,0 pontos)



O eixo prismático da figura é composto por um material com módulo de elasticidade a cisalhamento *G* e está engastado em A e em B. O momento polar da seção transversal do eixo em relação ao seu centroide é I_P. No ponto C do eixo há um torque concentrado aplicado, de magnitude T_0 e sentido indicado na figura. Ao longo do eixo está aplicado um torque uniformemente distribuído, de magnitude $t = T_0/3L$ e sentido indicado na figura. Pede-se:

a) determinar os torques reativos em A e B e

b) determinar o ângulo de giro em C.

Resolução:

DCL

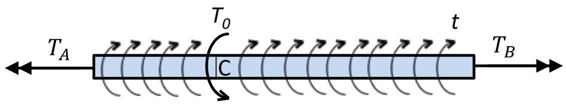
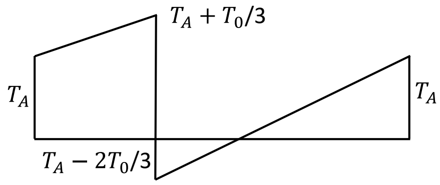


Diagrama de momento de torção:



i) Equilíbrio:

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow \; -T_A + T_0 - t\,3L + T_B = 0$$
$$\Rightarrow T_A = T_B$$

ii) Compatibilidade de giro:

$$\phi_{AC} + \phi_{CB} = 0$$

iii) Relações entre torque e giro:

$$\phi_{AC} = \frac{1}{GI_P}\int_0^L \left(T_A + \frac{T_0}{3L}x\right)dx = \frac{L}{GI_P}\left(T_A + \frac{T_0}{6}\right)$$

$$\phi_{CB} = \frac{1}{GI_P}\int_0^{2L} \left(T_A - \frac{2T_0}{3L} + \frac{T_0}{3L}x\right)dx = \frac{L}{GI_P}\left(2T_A - \frac{2T_0}{3}\right)$$

Aplicado as relações iii na equação de compatibilidade ii:

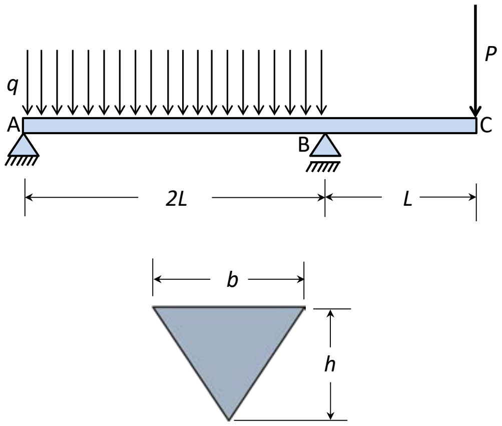
$$\Rightarrow T_A + \frac{T_0}{6} + 2T_A - \frac{2T_0}{3} = 0$$

$$\Rightarrow T_A = \frac{T_0}{6} \Rightarrow T_B = \frac{T_0}{6}$$

Aplicando o resultado em uma das relações ii:

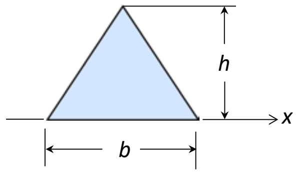
$$\phi_c = \phi_{AC} = \frac{L}{GI_P}\left(\frac{T_0}{6} + \frac{T_0}{6}\right) \Rightarrow \ \phi_C = \frac{T_0 L}{3GI_P}$$

3ª Questão (4,0 pontos)



A viga da figura está submetida a uma carga distribuída de intensidade *q*=750N/m no trecho entre a articulação A e o apoio simples B e a uma carga concentrada *P*=150N aplicada à sua extremidade *C* conforme a figura. A seção transversal dessa viga é um triângulo isósceles de base *b*=4cm e altura *h*=3cm. O comprimento total da barra é *3L*, sendo *L*=1m. Sabendo que a tensão admissível do material à tração é $\sigma_t = 400MPa$ e a tensão admissível à compressão é $\sigma_c = 300MPa$, pede-se determinar o fator de segurança.

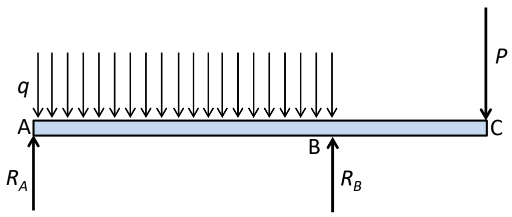
Dados:



$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

Resolução:

DCL:



Equilíbrio:

$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow R_A + R_B = 2qL + P$$

$$\Sigma M_B = 0 \;\Rightarrow\; -R_A\, 2L + q\, 2L^2 - PL = 0$$

$$\Rightarrow R_A = qL - \frac{P}{2} \Rightarrow R_B = qL + \frac{3P}{2}$$

$$\Rightarrow R_A = 675N \Rightarrow R_B = 975N$$

Os pontos em que podem ocorrer máximos locais do módulo do momento fletor são o ponto *B* e o ponto do trecho *AB* em que a cortante é nula e chamaremos de *D*. Vamos calcular o momento fletor apenas nesses pontos:

$$M_B = -PL = -150Nm$$

A força cortante em um ponto genérico do trecho *AB* é dada por:

$$V(x) = R_A \; - qx$$

Então:

$$V(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{R_A}{q} \Rightarrow x = 0{,}9$$

e, assim,

$$M_D = 0{,}9R_A - q\frac{0{,}9^2}{2}$$

$$\Rightarrow M_D = 303{,}75\ Nm$$

Para calcular as tensões é necessário, primeiro, calcular o momento de inércia em relação ao eixo horizontal que passa pelo centroide. Como a coordenada vertical do centroide em relação à face superior da seção é *h*/3, então, pelo teorema dos eixos paralelos,

$$I = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh}{2} \times \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{36}$$

$$I = 3cm^4 = 3 \times 10^{-8} m^4$$

Na seção *D* o momento fletor é positivo, então a máxima tensão de compressão ocorrerá na face superior e será:

$$\sigma = \frac{M_D}{I}\frac{h}{3} = \frac{303{,}75 \times 10^{-2}}{3 \times 10^{-8}} \times 10^{-6} = 101{,}25MPa$$

que corresponde a um fator de segurança:

$$FS_1 = \frac{\sigma_C}{\sigma} = \frac{300}{101{,}25} \cong 3$$

e a máxima tensão de tração ocorrerá na base:

$$\sigma = \frac{M_D}{I}\frac{2h}{3} = \frac{303{,}75 \times 2 \times 10^{-2}}{3 \times 10^{-8}} \times 10^{-6} = 202{,}5MPa$$

que corresponde a um fator de segurança:

$$FS_2 = \frac{\sigma_t}{\sigma} = \frac{400}{202{,}5} \cong 2$$

Já na seção *B* o momento fletor é negativo, então a máxima tensão de compressão ocorrerá na base e será:

$$\sigma = \frac{M_B}{I}\frac{2h}{3} = \frac{150 \times 2 \times 10^{-2}}{3 \times 10^{-8}} \times 10^{-6} = 100MPa$$

que corresponde a um fator de segurança:

$$FS_3 = \frac{\sigma_C}{\sigma} = \frac{300}{100} = 3$$

e a máxima tensão de tração ocorrerá na face superior:

$$\sigma = \frac{M_B}{I}\frac{h}{3} = \frac{150 \times 10^{-2}}{3 \times 10^{-8}} \times 10^{-6} = 50MPa$$

que corresponde a um fator de segurança:

$$FS_4 = \frac{\sigma_t}{\sigma} = \frac{400}{50} = 8$$

O fator de segurança da estrutura será o menor valor encontrado. Portanto:

$$FS \cong 2$$