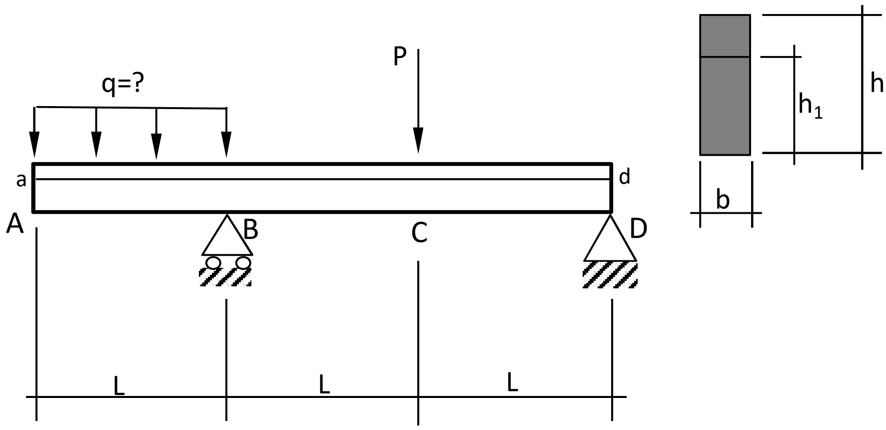
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

PME3210 – Mecânica dos Sólidos I – Terceira Prova – 05/07/2017

Duração: 100 minutos

Não é permitido o uso de equipamentos eletrônicos durante a prova!

1ª Questão (5,0 pontos) A viga reta ABCD, de seção retangular, mostrada abaixo, é formada a partir da união de duas peças com um adesivo rígido ao longo da superfície horizontal cuja aresta é *ad*. No trecho AB é aplicada uma carga distribuida ***q*** (desconhecida) e, em C, é aplicada uma carga concentrada P=40 kN. São conhecidas as dimensões b=45 mm, h=200 mm e L= 2m. Admitindo-se que o material hipotético possua tensão de tração admissível $\sigma_a = 300\ MPa$ pede-se:
(a) determinar o valor máximo da carga distribuída ***q*** de modo que a tensão de cisalhamento para uma seção horizontal distante h_1=180 mm da superfície inferior da viga não exceda a tensão admissível de cisalhamento do adesivo, $\tau_a = 1{,}5\ MPa$.
(b) admitindo-se dados q= 8 kN/m e P=38 kN e mantida a geometria da viga, de seus vínculos e dos locais de carregamento, determinar o fator de segurança para as tensões normais.
Atenção: todas as respostas devem ser justificadas.



Resolução:

(a) Cortante

Reações vinculares

$$\sum M_B = 0 \rightarrow 2LR_D - LP + qL.\frac{L}{2} = 0$$
$$R_D = \frac{P}{2} - \frac{qL}{4} = 20 - \frac{q}{2} \ (kN)$$
$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_B = P + qL - R_D$$
$$R_B = \frac{P}{2} + \frac{5qL}{4} = 20 + \frac{5q}{2} \ (kN)$$

Força cortante:

Para $0 \leq x < L$*:*

$$V(x) = -qx$$
$$V(L^-) = -qL = -2q$$
$$V(L^+) = V(L^-) + R_B$$
$$V(L^+) = -qL + \frac{P}{2} + \frac{5qL}{4} = \frac{P}{2} + \frac{qL}{4} = 20 + \frac{q}{2} \ (kN)$$

Para $L \leq x < 2L$

$$q(x) = 0 \rightarrow V(x) = cte. = V(L^+) = \frac{P}{2} + \frac{qL}{4}$$
$$\rightarrow V(x) = 20 + \frac{q}{2} \ (kN)$$
$$V(2L^-) = \frac{P}{2} + \frac{qL}{4}$$
$$V(2L^+) = V(2L^-) - P = -\frac{P}{2} + \frac{qL}{4} = -20 + \frac{q}{2}$$

Note que $V(2L^+) = -R_D$

Dimensionamento à cortante

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \rightarrow V = \frac{\tau Ib}{Q} \quad (eq.1)$$

$$Q = b.(h - h_1).\left(h_1 - \frac{h}{2} + \frac{h - h_1}{2}\right) = b.(h - h_1).\frac{h_1}{2}$$

$$\therefore Q = 45.(200 - 180).90 = 81000 \ mm^3$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = 45.\frac{200^3}{12} = 30.10^6 \ mm^4$$

A cortante máxima é função de q e, para sua determinação, é necessário analisar os valores em $|V(L^-)|$ e $V(L^+)$:

Caso (1) Se $V(L^+) > |V(L^-)|$

$$\rightarrow 20 + \frac{q}{2} > 2q \rightarrow q < \frac{40}{3}$$
$$\rightarrow V_{max} = 20 + \frac{q}{2} \ (eq.2) \ \ (kN/m)$$

Caso (2) Se $q > \frac{40}{3} \rightarrow V_{max} = 2q \ \ (eq.3) \ \ \ (kN/m)$

Caso (1)

Da eqs. 1 e 2 temos $q = 2\left(\tau.I.\frac{b}{Q} - 20.10^3\right)$

$$q = 2\left(\frac{1{,}5.10^6.30.10^6.10^{-12}45.10^{-3}}{81000.10^{-9}} - 20.10^3\right)$$

$$\Longrightarrow q = 10 \ kN/m$$

Caso (2)

Deve-se, primeiro, verificar se, com $q = \frac{40}{3} kN/m$, o adesivo ainda é capaz de suportar a tensão de cisalhamento:

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} = \frac{qLQ}{Ib} = \frac{\frac{40.10^3.2}{3}81.10^{-6}}{30.10^{-6}45.10^{-3}} = 1{,}6 \ MPa$$

Como $\tau > \tau_a$, o adesivo não pode suportar a tensão de cisalhamento e a situação em que $V(L^+) < |V(L^-)|$ não pode ocorrer. Portanto, o caso (1) é o único possível.

(b) Momento fletor

Dada a geometria dos vínculos e dos carregamentos, conclui-se que o momento fletor máximo deva ocorrer em *x=L* ou em *x=2L* m.

$$M(L) = \frac{qL^2}{2} = -8.\frac{4}{2} = -16 \ kN.m$$

$$M(2L) = -qL.\frac{3L}{2} + \left(\frac{P}{2} + \frac{5qL}{4}\right).L \rightarrow$$

$$M(2L) = -8.2.3 + \left(19 + \frac{5.8}{2}\right).2 = 30 \ kN.m$$

Assim, o momento máximo ocorre em x=2L e a tensão na viga é $\sigma = \frac{M}{I}\frac{h}{2}$. Utilizando os valores já calculados temos:

$$\sigma = \frac{30.10^3}{30.10^{-6}}.\frac{200.10^{-3}}{2} = 100 \ MPa$$

O fator de segurança é :

$$\frac{\sigma_a}{\sigma} = \frac{300}{100} = 3$$

Critérios de pontuação

(a)

Reações em A e em B: 0,5 + 0,5 pontos

Cortantes: 1 ponto

Cálculos de Q e I (ambos corretos): 0,5 pontos

Cálculo de q: 1 ponto (2 casos considerados)

(b)

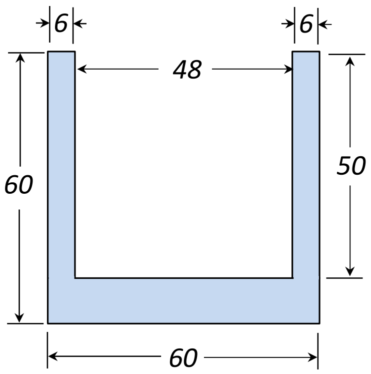
Cálculo do momento máximo: 0,5 pontos

Cálculo de σ: 0,5 pontos

Cálculo de f_s: 0,5 pontos

2ª Questão (5,0 pontos)

A figura representa a seção transversal de uma viga prismática. Esta viga é formada por um material cuja tensão normal de tração admissível é $\sigma_t = 200MPa$ e cuja tensão normal de compressão admissível é $\sigma_c = 300MPa$. Pede-se determinar qual é o momento fletor positivo admissível e qual é o momento fletor negativo admissível.

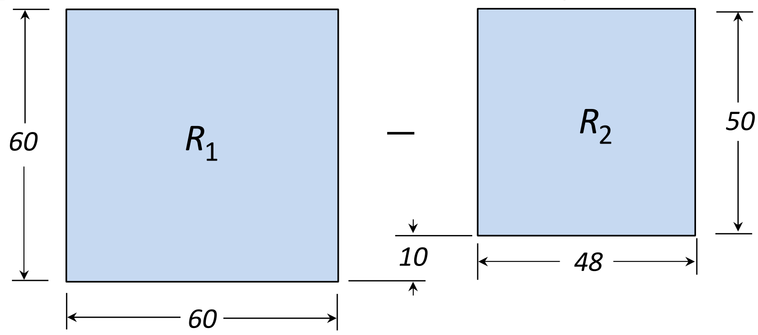


medidas em cm

Resolução:

Cálculo das propriedades da seção transversal:

A seção transversal pode ser considerada como a subtração de dois retângulos:



medidas em cm

Sendo A_1a área de R_1, y_1a coordenada de seu centroide em relação à sua base e I_1o momento de inércia de R_1 em relação ao eixo horizontal que passa pelo seu centroide, então:

$$A_1 = 60 * 60 = 3.600\ cm^2$$
$$y_1 = 30cm$$
$$I_1 = \frac{60 * 60^3}{12} = 1.080.000cm^4$$

Sendo A_2a área de R_2, y_2a coordenada de seu centroide em relação a base R_1e I_1o momento de inércia de R_2 em relação ao eixo horizontal que passa pelo seu centroide, então:

$$A_2 = 50 * 48 = 2.400\ cm^2$$
$$y_2 = 35cm$$
$$I_1 = \frac{48 * 50^3}{12} = 500.000cm^4$$

A coordenada vertical do centroide da seção transversal será:

$$\bar{y} = \frac{A_1 * y_1 - A_2 * y_2}{A_1 - A_2}$$
$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{3.600 * 30 - 2.400 * 35}{3.600 - 2.400} = 20cm$$

(1,0)

E o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo horizontal que passa pelo seu centroide será, usando o teorema dos eixos paralelos:

$$I = I_1 + A_1 * (y_1 - \bar{y})^2 - (I_2 + A_2 * (y_2 - \bar{y})^2)$$
$$\Rightarrow I = 1.080.000 + 3.600 * (30 - 20)^2 - (500.000 + 2.400 * (35 - 20)^2)$$
$$\Rightarrow I = 400.000cm^4 = 0{,}004m^4$$

(2,0)

Para um momento fletor positivo, a maior tensão de tração ocorrerá na face inferior da viga, assim,

$$M \leq \frac{\sigma_t * I}{\bar{y}} = \frac{200 * 10^3 * 0{,}004}{0{,}2} = 4000kN.m$$

e a maior tensão de compressão ocorrerá na face superior, então:

$$M \leq \frac{\sigma_c * I}{0{,}06 - \bar{y}} = \frac{300 * 10^3 * 0{,}004}{0{,}4} = 3000kN.m$$

Portanto o momento fletor positivo admissível será:

$$M_{adm} = 3000kN.m$$

(1,0)

Para um momento fletor negativo, a maior tensão de compressão ocorrerá na face inferior da viga, assim,

$$M \leq \frac{\sigma_c * I}{\bar{y}} = \frac{300 * 10^3 * 0{,}004}{0{,}2} = 6000kN.m$$

e a maior tensão de tração ocorrerá na face superior, então:

$$M \leq \frac{\sigma_t * I}{0{,}06 - \bar{y}} = \frac{200 * 10^3 * 0{,}004}{0{,}4} = 2000kN.m$$

Portanto o momento fletor negativo admissível será, em módulo:

$$M_{adm} = 2000kN.m$$

(1,0)