

# PESQUISA OPERACIONAL – PROGRAMAÇÃO INTEIRA

Capítulo 6

# Programação Inteira

6-2

SIMPLEX



Resolução de problemas com variáveis inteiras ou binárias

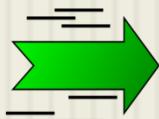
Problema da Designação



Branch-and-Bound

Bifurcação e Limite

Separação e Avaliação



2)

Branch-and-Bound

3) Enumeração Implícita (0/1)

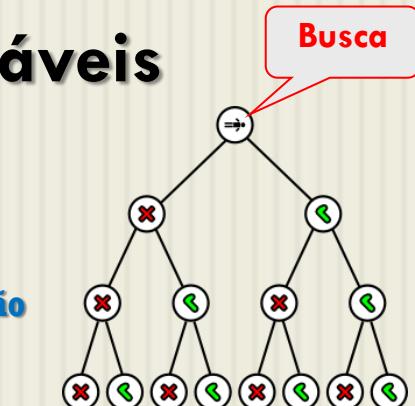


Capítulo 6

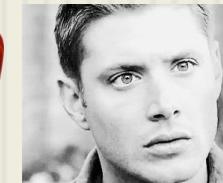


Gomory (1929 – )

Computação  
IBM



Branch  
-and-  
Bound



Administração  
Carnegie Mellon



Balas (1922 – )

# Programação Inteira

## ► PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

6-3

### Apresentação

#### Designação de:

- Operações a máquinas
- Operários a tarefas
- Trabalhadores a locais de trabalho
- Dinheiro a investimentos

#### Designação de custo mínimo

Minimizar o custo do transporte dos agentes designados aos locais de trabalho

#### Designação de lucro máximo

Maximizar a satisfação dos agentes designados aos locais de trabalho



## Capítulo 6

$$\begin{aligned} \min f &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} && \text{Custo} \\ s/a & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1..n) && \text{Horizontal} \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1..n) && \text{Vertical} \\ x_{ij} &= 0/1 && \end{aligned}$$

x <sub>11</sub>	x <sub>12</sub>	x <sub>13</sub>	x <sub>14</sub>
x <sub>21</sub>	x <sub>22</sub>	x <sub>23</sub>	x <sub>24</sub>
x <sub>31</sub>	x <sub>32</sub>	x <sub>33</sub>	x <sub>34</sub>
x <sub>41</sub>	x <sub>42</sub>	x <sub>43</sub>	x <sub>44</sub>

Custo

6-4

	T1	T2	T3	T4
O1	6	3	2	4
O2	10	6	2	5
O3	6	10	9	8
O4	11	5	4	9

x11	x12	x13	x14
x21	x22	x23	x24
x31	x32	x33	x34
x41	x42	x43	x44



# Programação Inteira

## PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

### Exercício 1



	T1	T2	T3	T4
O1				1
O2			1	
O3	1			
O4		1		

**min**  $f = 6x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 4x_{14} + 10x_{21} + 6x_{22} + 2x_{23} + 5x_{24} + 6x_{31} + 10x_{32} + 9x_{33} + 8x_{34} + 11x_{41} + 5x_{42} + 4x_{43} + 9x_{44}$

s/a

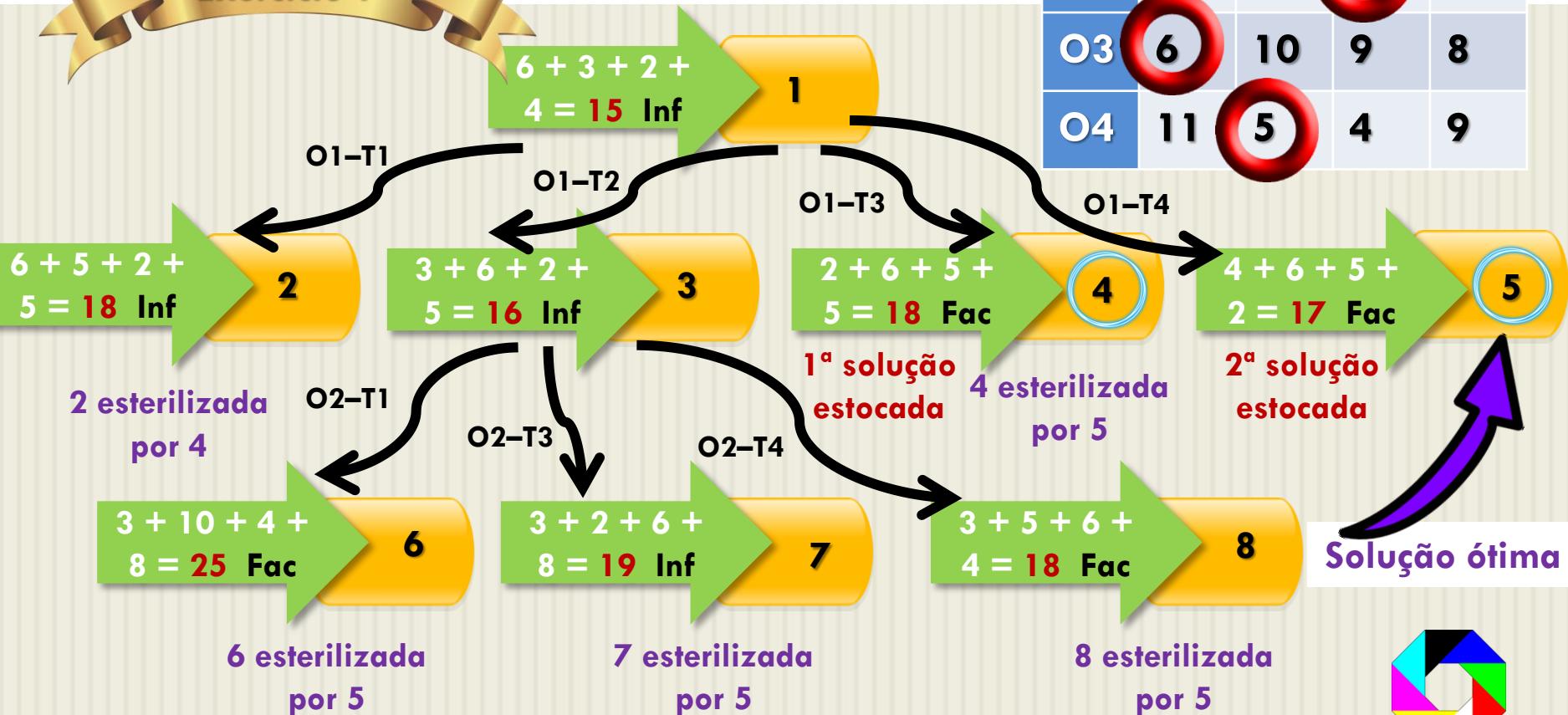
$$\begin{aligned}
 x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 \\
 x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1 \\
 x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1 \\
 x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1 \\
 x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 1 \\
 x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1 \\
 x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 1 \\
 x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 1 \\
 x_{ij} &= 0/1
 \end{aligned}$$

# Programação Inteira

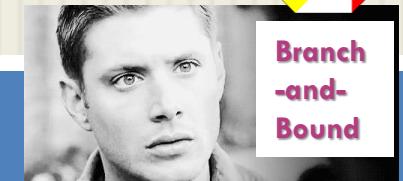
## PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

6-5

### Exercício 1



Capítulo 6



Branch  
-and-  
Bound

**Custo**

6-6

	T1	T2	T3	T4
O1	5	10	28	10
O2	24	25	9	17
O3	13	3	8	15
O4	7	23	5	3

# Programação Inteira

## PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

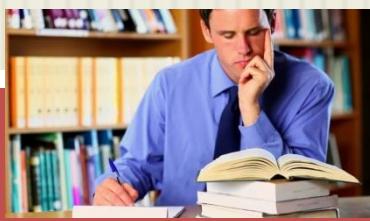
### Exercício 2

**min**  $f = 5x_{11} + 10x_{12} + 28x_{13} + 10x_{14} + 24x_{21} + 25x_{22} + 9x_{23} + 17x_{24} + 13x_{31} + 3x_{32} + 8x_{33} + 15x_{34} + 7x_{41} + 23x_{42} + 5x_{43} + 3x_{44}$



$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$
$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	$x_{24}$
$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{33}$	$x_{34}$
$x_{41}$	$x_{42}$	$x_{43}$	$x_{44}$

	T1	T2	T3	T4
O1	1			
O2			1	
O3		1		
O4			1	



s/a

$$\begin{aligned}
 x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 \\
 x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1 \\
 x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1 \\
 x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1 \\
 x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 1 \\
 x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1 \\
 x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 1 \\
 x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 1 \\
 x_{ij} &= 0/1
 \end{aligned}$$

# Programação Inteira

## PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

6-7

### Exercício 2



Capítulo 6

	T1	T2	T3	T4
O1	5	10	28	10
O2	24	25	9	17
O3	13	3	8	15
O4	7	23	5	3



Branch  
-and-  
Bound



**Custo**

	T1	T2	T3	T4
O1	8	3	1	5
O2	11	7	1	6
O3	7	8	6	8
O4	11	6	4	9

6-8

x11	x12	x13	x14	T1	T2	T3	T4
x21	x22	x23	x24	O1			
x31	x32	x33	x34	O2	1		
x41	x42	x43	x44	O3	1		
				O4	1		



# Programação Inteira

## PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

### Exercício 3



$$\begin{aligned} \min \quad & f = 8x_{11} + 3x_{12} + x_{13} + \\ & 5x_{14} + 11x_{21} + 7x_{22} + x_{23} + \\ & 6x_{24} + 7x_{31} + 8x_{32} + 6x_{33} + \\ & 8x_{34} + 11x_{41} + 6x_{42} + 4x_{43} + \\ & 9x_{44} \end{aligned}$$

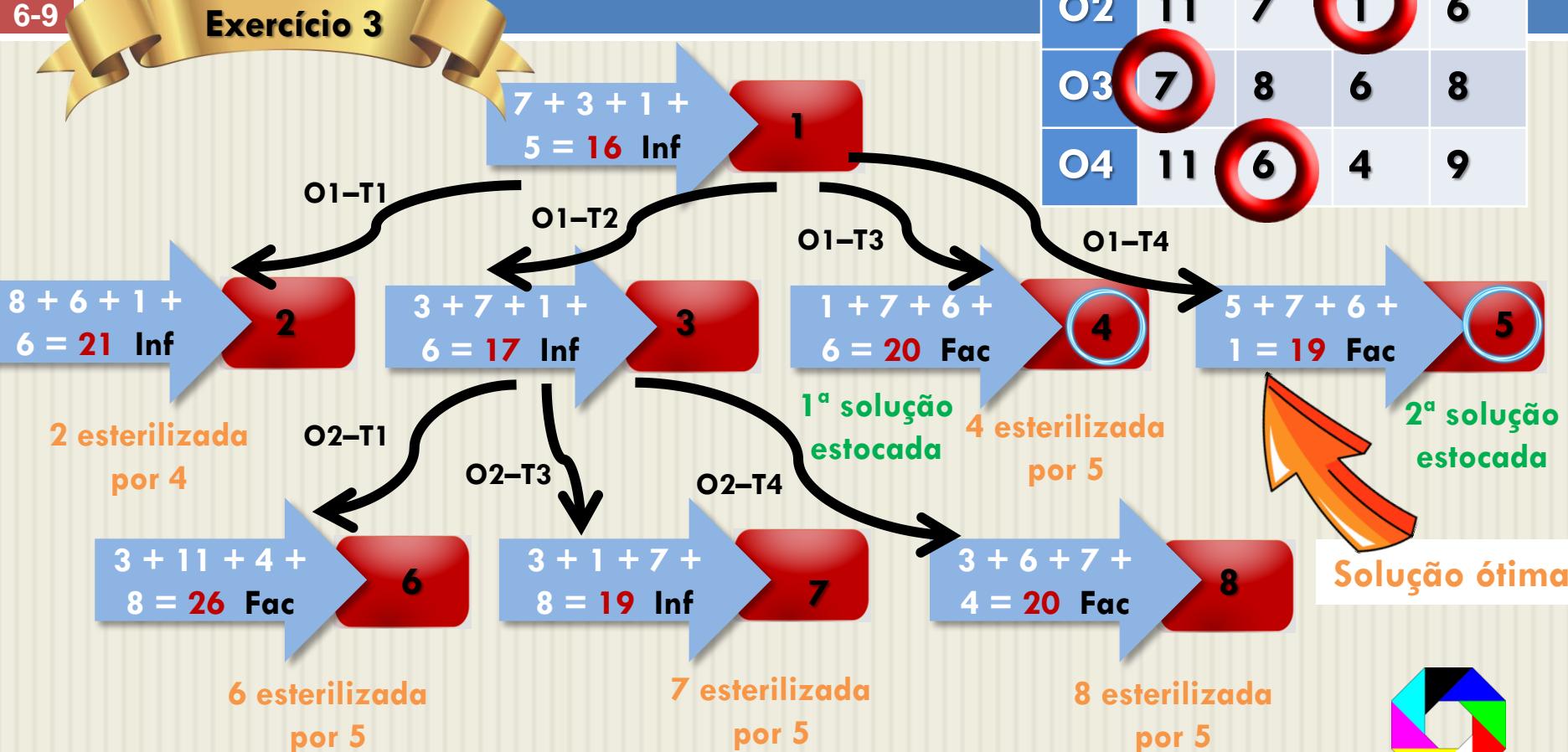
s/a

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 1 \\ x_{ij} &= 0/1 \end{aligned}$$

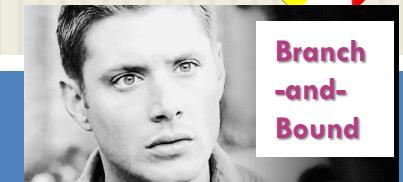
# Programação Inteira

## PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

### Exercício 3



Capítulo 6



Branch  
-and-  
Bound



**Custo**

6-10

	T1	T2	T3	T4
O1	2	1	4	2
O2	3	4	1	6
O3	1	2	6	5
O4	1	3	3	7

# Programação Inteira

## PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

### Exercício 4

Designar 4  
operários a 4  
tarefas

x11	x12	x13	x14
x21	x22	x23	x24
x31	x32	x33	x34
x41	x42	x43	x44

	T1	T2	T3	T4
O1				
O2				
O3				
O4	1	1	1	1



min  $f = 2x_{11} + x_{12} + 4x_{13} + 2x_{14} + 3x_{21} + 4x_{22} + x_{23} + 6x_{24} + x_{31} + 2x_{32} + 6x_{33} + 5x_{34} + x_{41} + 3x_{42} + 3x_{43} + 7x_{44}$

s/a

$$\begin{aligned}
 x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 \\
 x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1 \\
 x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1 \\
 x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1 \\
 x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 1 \\
 x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1 \\
 x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 1 \\
 x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 1 \\
 x_{ij} &= 0/1
 \end{aligned}$$

# Programação Inteira

## PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

6-11

### Exercício 4



Capítulo 6



Branch  
-and-  
Bound

# Programação Inteira



## SIMPLEX

6-12

### Exercício 5

$$\begin{array}{ll} \text{max } f = 21*x_1 + 11*x_2 \\ \text{s/a } 7*x_1 + 4*x_2 \leq 13 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiros} \end{array}$$

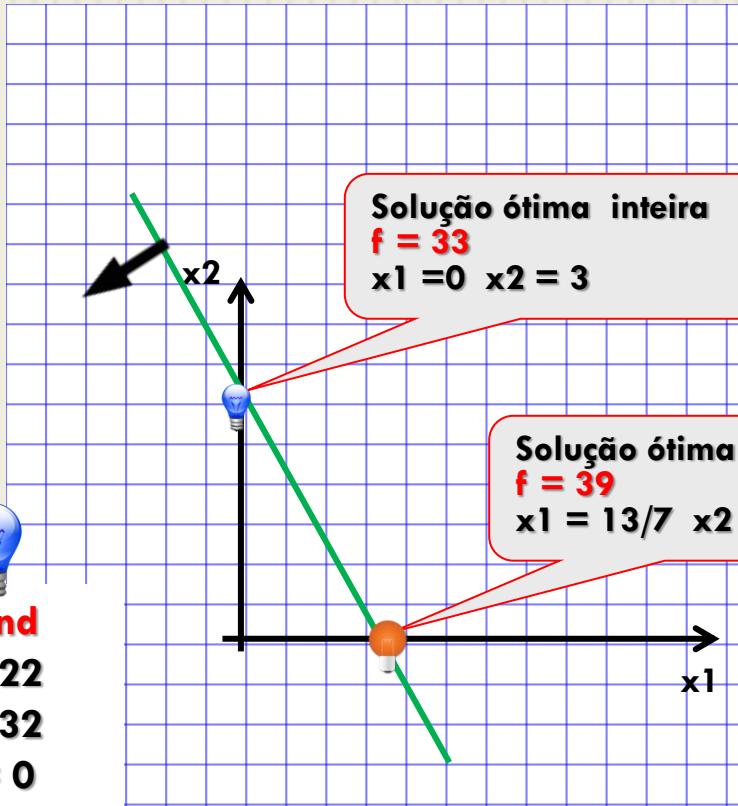
Nos Reais SIMPLEX

(0,0)	$f = 0$
(0, 13/4)	$f = 35.75$
(13/7, 0)	$f = 39$



Nos Inteiros Branch-and-Bound

(0,3) $f= 33$	(0,2) $f= 22$
(0,1) $f= 11$	(1,1) $f= 32$
(1,0) $f= 21$	(0,0) $f = 0$



$$\frac{13}{7} = 1.857$$

$$\frac{13}{4} = 3.25$$



Capítulo 6



Branch  
-and-  
Bound



# Programação Inteira



## SIMPLEX

6-13

### Exercício 5

$$\begin{array}{ll} \text{max } & f = 21*x_1 + 11*x_2 \\ \text{s/a } & 7*x_1 + 4*x_2 \leq 13 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiros} \end{array}$$

$$x_1 = 1.857$$



$$x_1 \leq 1$$

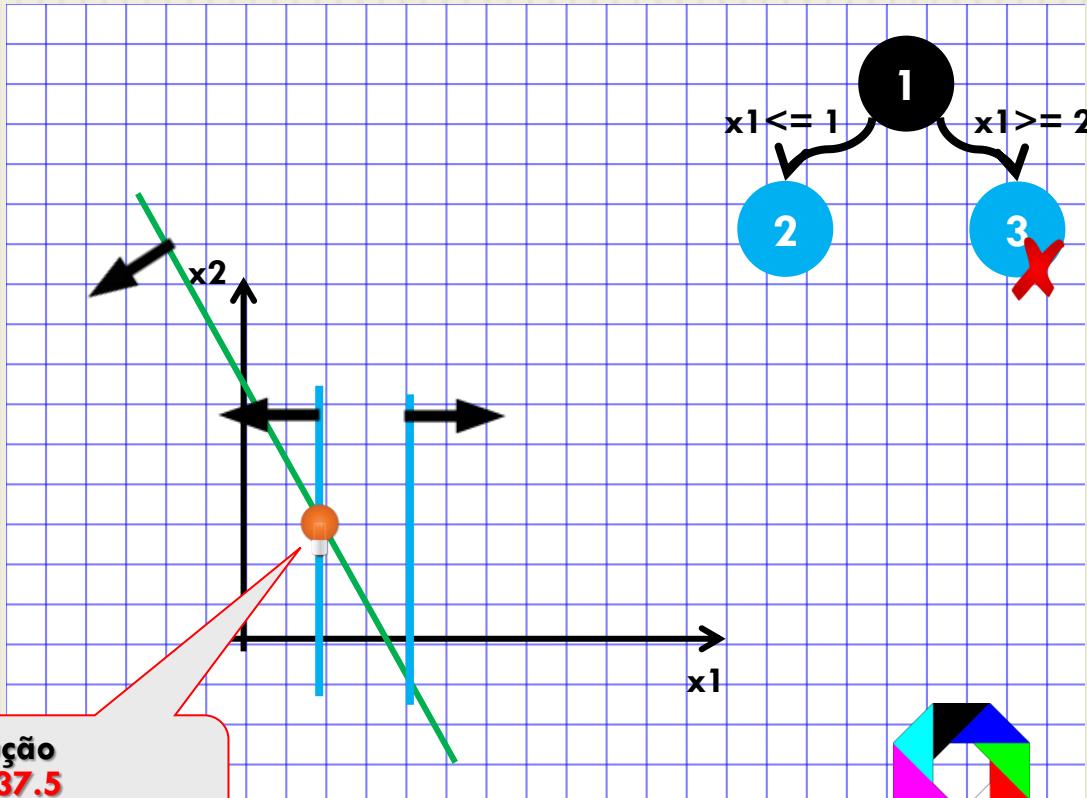
$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1.5$$

$$f = 37.5$$

$$x_1 \geq 2$$

Problema Infactível



Capítulo 6



Branch  
-and-  
Bound



# Programação Inteira



## SIMPLEX

6-14

### Exercício 5

$$\begin{array}{ll} \text{max } & f = 21*x_1 + 11*x_2 \\ \text{s/a } & 7*x_1 + 4*x_2 \leq 13 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiros} \end{array}$$

$$x_2 = 1.5$$



$$x_2 \leq 1$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1$$

$$f = 32$$

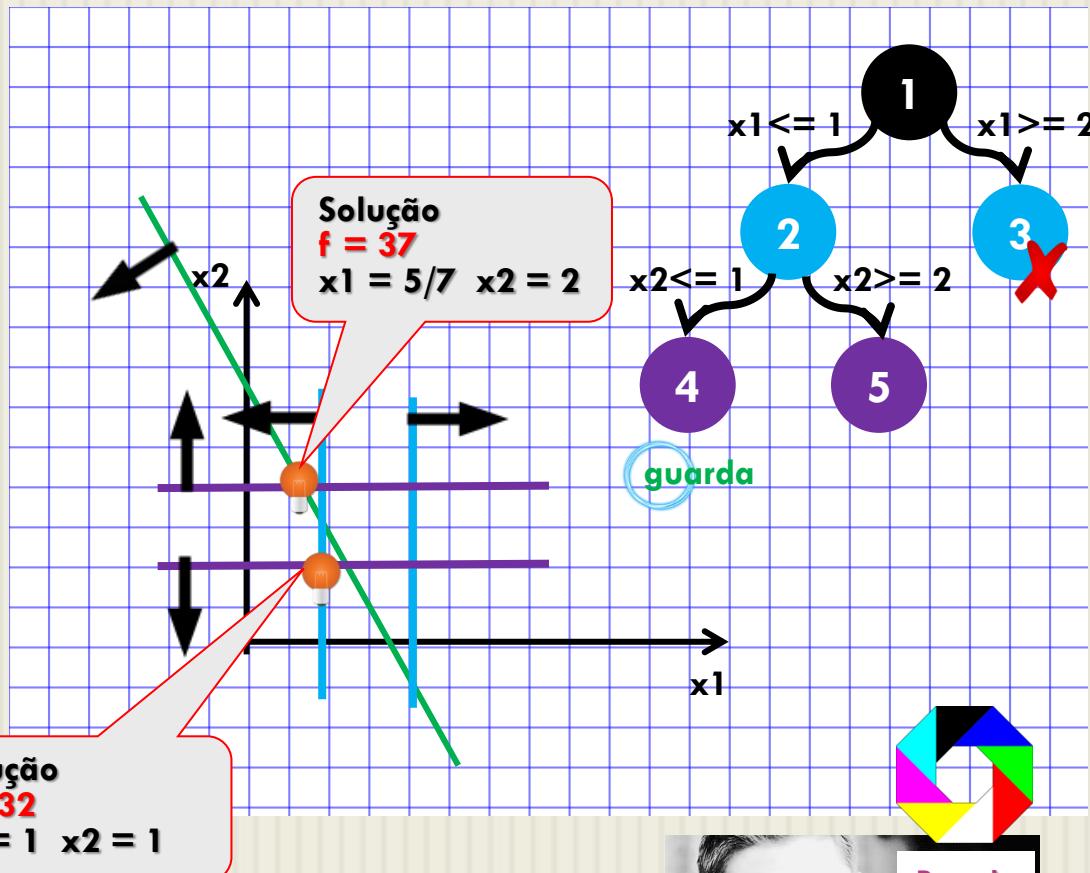
1<sup>a</sup> solução  
estocada

$$> x_1 = 5/7$$

$$x_2 = 2$$

$$f = 37$$

(0.714)



Capítulo 6



Branch  
-and-  
Bound

# Programação Inteira



## SIMPLEX

6-15

### Exercício 5

$$\begin{array}{ll} \text{max } & f = 21*x_1 + 11*x_2 \\ \text{s/a } & 7*x_1 + 4*x_2 \leq 13 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiros} \end{array}$$

$$x_1 = 0.714$$



$$x_1 \leq 0$$

$$x_1 \geq 1$$

$$x_1 = 0$$

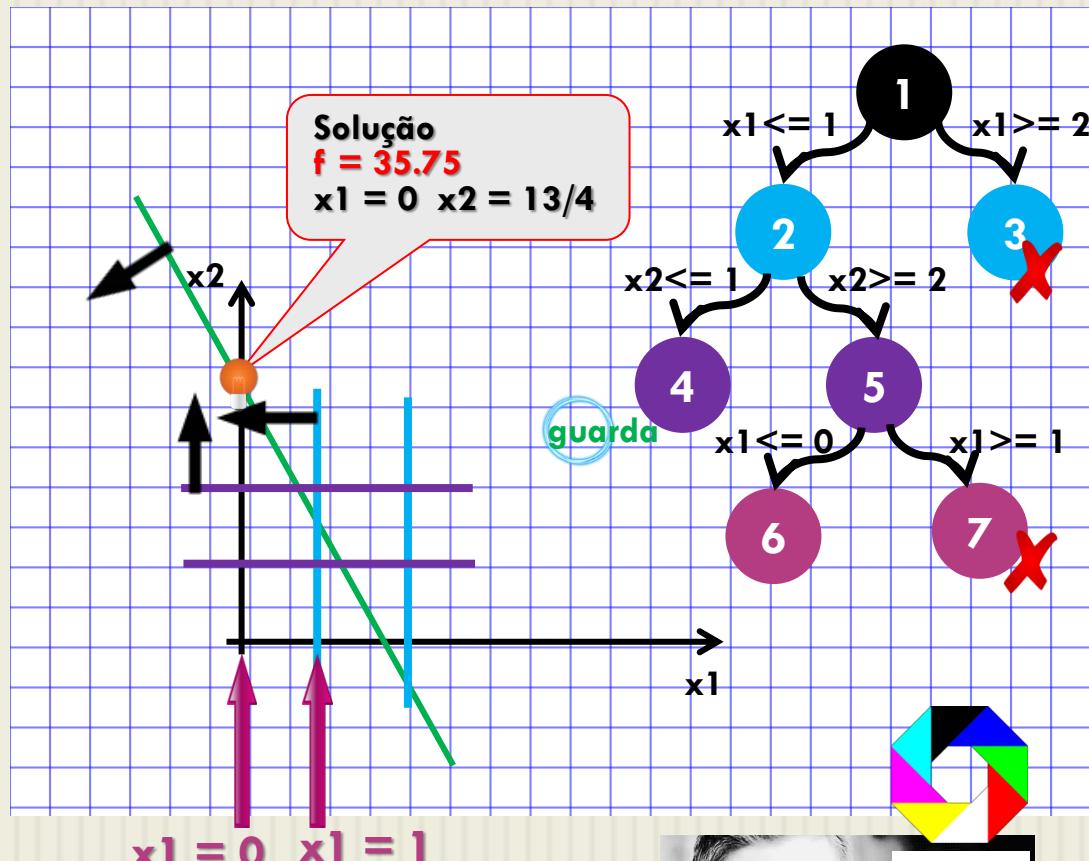
Problema  
Infactível

$$> x_2 = 13/4 \text{ (3.25)}$$

$$f = 35.75$$



Capítulo 6



Branch  
-and-  
Bound

# Programação Inteira



# SIMPLEX

6-16

## **Exercício 5**

$$\begin{array}{ll} \max & f = 21*x_1 + 11*x_2 \\ \text{s}/\text{a} & 7*x_1 + 4*x_2 \leq 13 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiros} \end{array}$$

$$x_2 = 3.25$$

 3

4

$$x_2 \leq 3$$

$$x_2 \geq 4$$

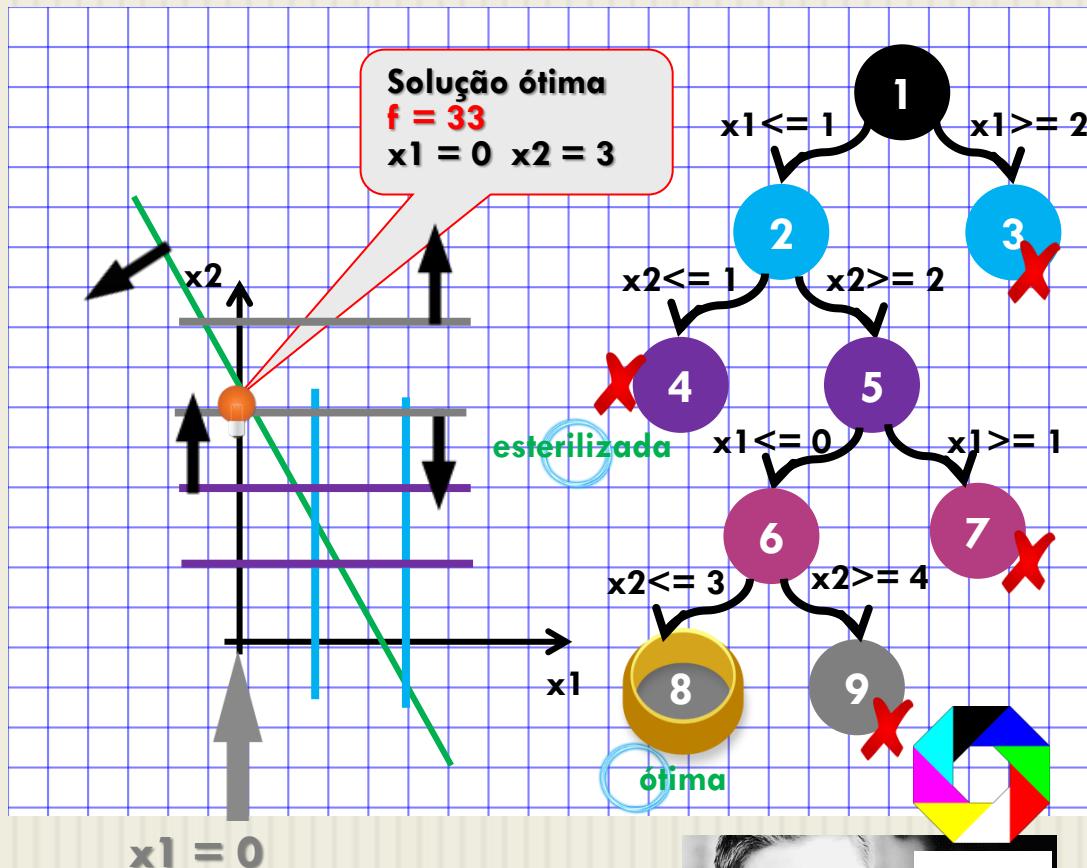
$$x_1 = 0$$

$$x^2 = 3$$

f = 33

## **Problema Infactível**

Solução  
Ótima



# Capítulo 6

# Programação Inteira

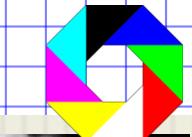
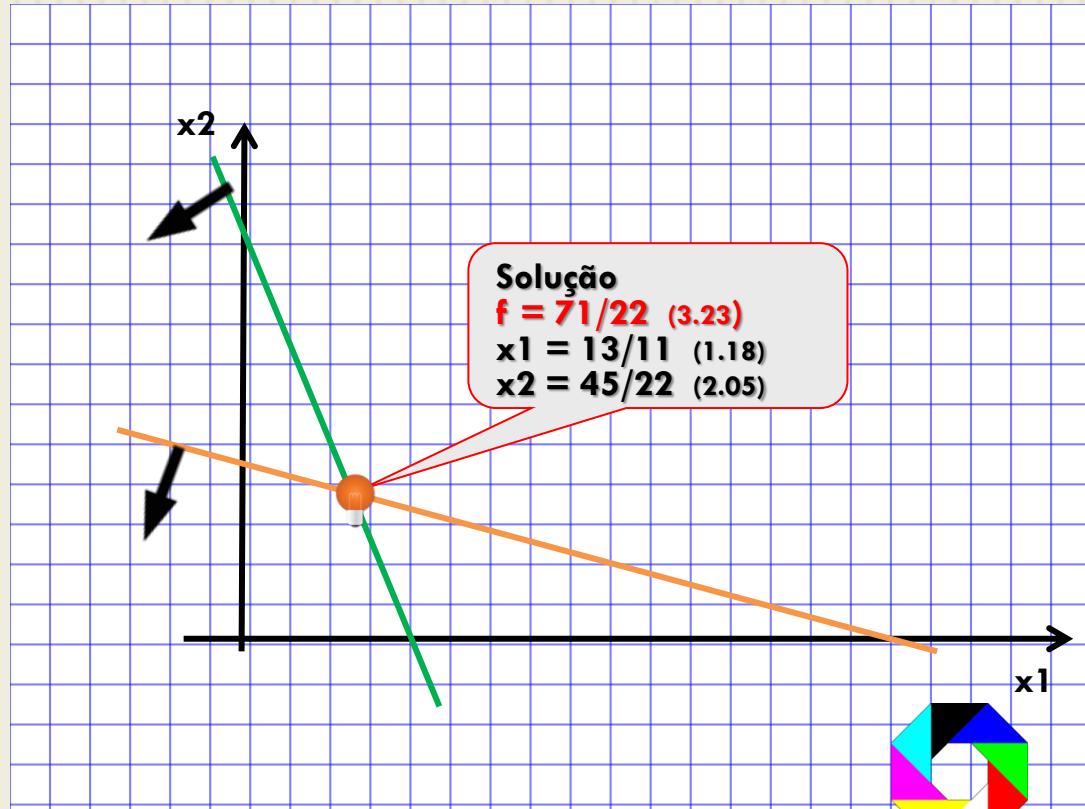
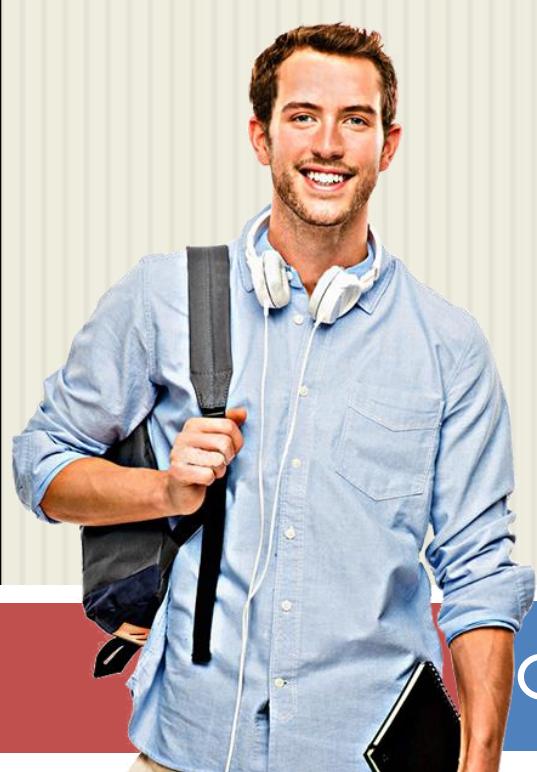
## SIMPLEX

6-17

### Exercício 6

$$\max f = x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s/a} \quad & 5*x_1 + 2*x_2 \leq 10 \\ & 3*x_1 + 10*x_2 \leq 24 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiros} \end{aligned}$$



# Programação Inteira

## SIMPLEX

6-18

### Exercício 6

$$\max f = x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s/a} \quad & 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & 3x_1 + 10x_2 \leq 24 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiros} \end{aligned}$$

$$x_2 = 2.05$$



$$x_2 \leq 2$$

$$x_2 \geq 3$$

$$> x_1 = 6/5 \quad (1.2)$$

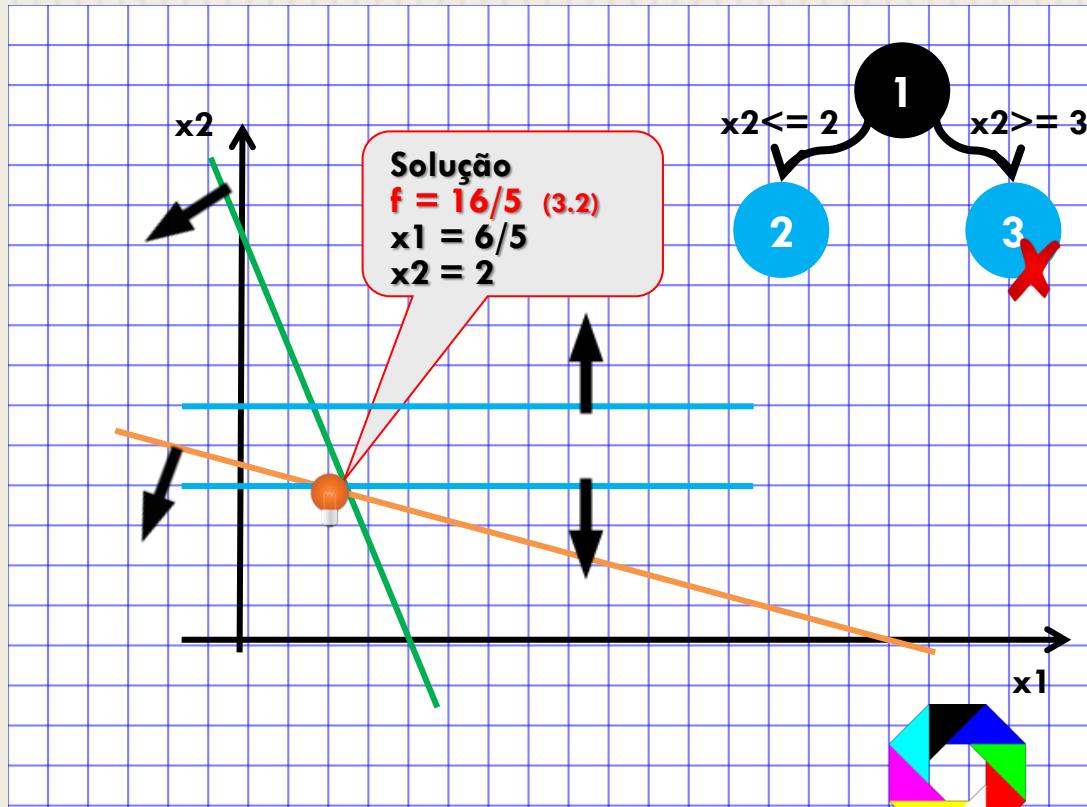
$$x_2 = 2$$

$$f = 16/5 \quad (3.2)$$

Problema  
Infactível



Capítulo 6



# Programação Inteira

## SIMPLEX

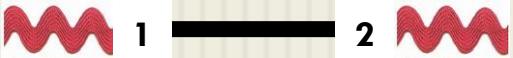
6-19

### Exercício 6



$$\begin{array}{ll} \max & f = x_1 + x_2 \\ \text{s/a} & 5*x_1 + 2*x_2 \leq 10 \\ & 3*x_1 + 10*x_2 \leq 24 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiros} \end{array}$$

$$x_1 = 1.2$$



$$x_1 \leq 1$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$f = 3$$

Solução  
Ótima

$$x_1 \geq 2$$

$$x_1 = 2$$

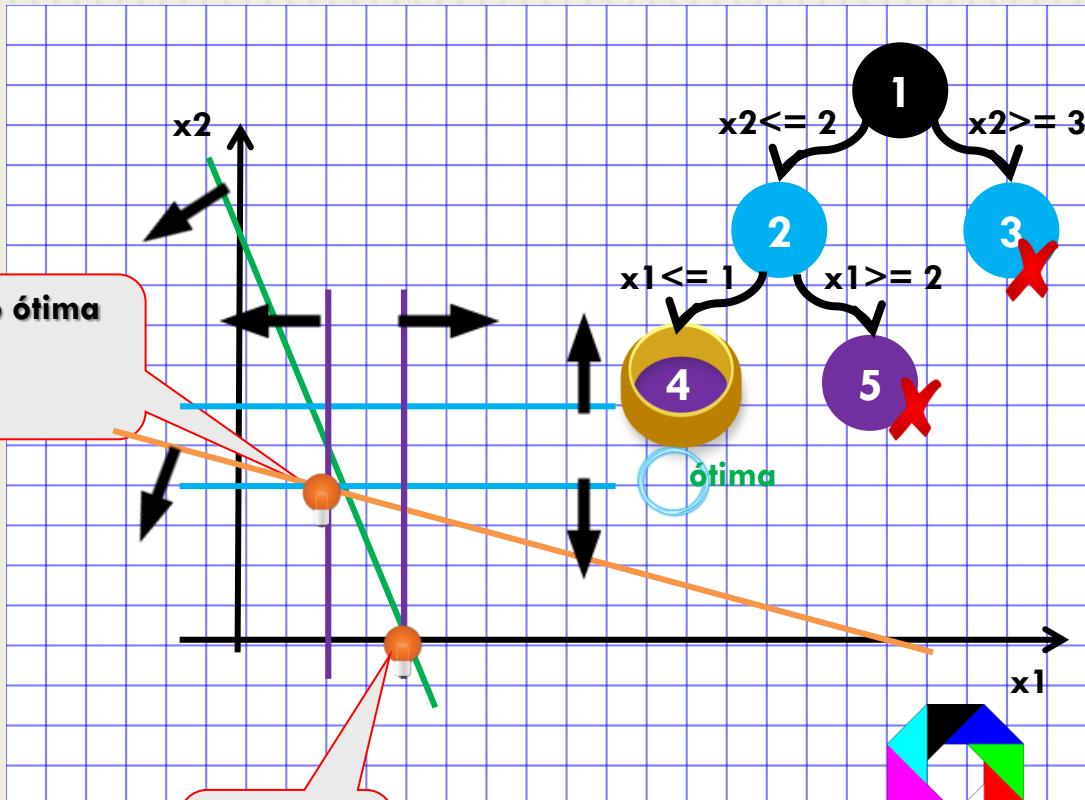
$$x_2 = 0$$

$$f = 2$$

Esterilizada por  
 $f = 3$



Capítulo 6



Branch  
-and-  
Bound

# Programação Inteira

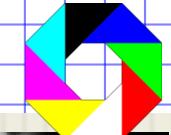
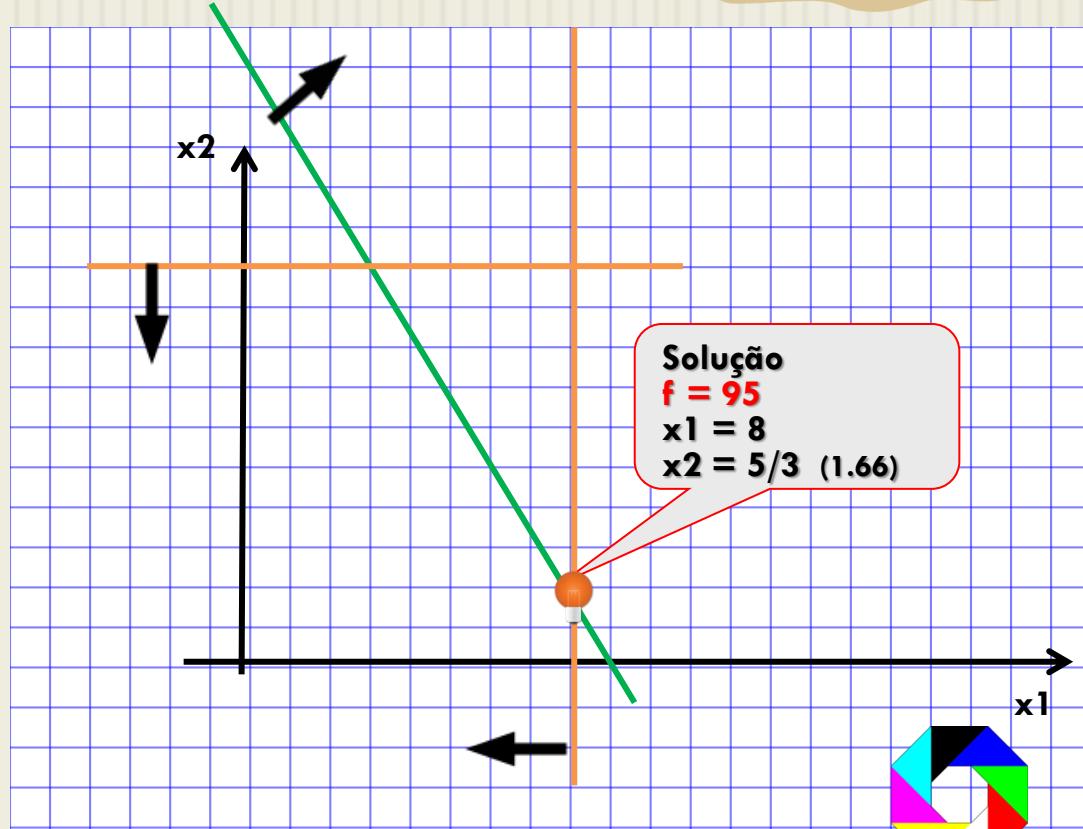


## SIMPLEX

6-20

### Exercício 7

$$\begin{array}{ll}\min & f = 10*x_1 + 9*x_2 \\ \text{s/a} & 5*x_1 + 3*x_2 \geq 45 \\ & 0 \leq x_1 \leq 8 \\ & 0 \leq x_2 \leq 10 \text{ inteiros}\end{array}$$



# Programação Inteira



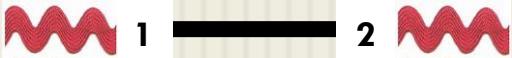
## SIMPLEX

6-21

### Exercício 7

$$\begin{array}{ll} \min & f = 10*x_1 + 9*x_2 \\ \text{s/a} & 5*x_1 + 3*x_2 \geq 45 \\ & 0 \leq x_1 \leq 8 \\ & 0 \leq x_2 \leq 10 \text{ inteiros} \end{array}$$

$$x_2 = 1.66$$



$$x_2 \leq 1$$

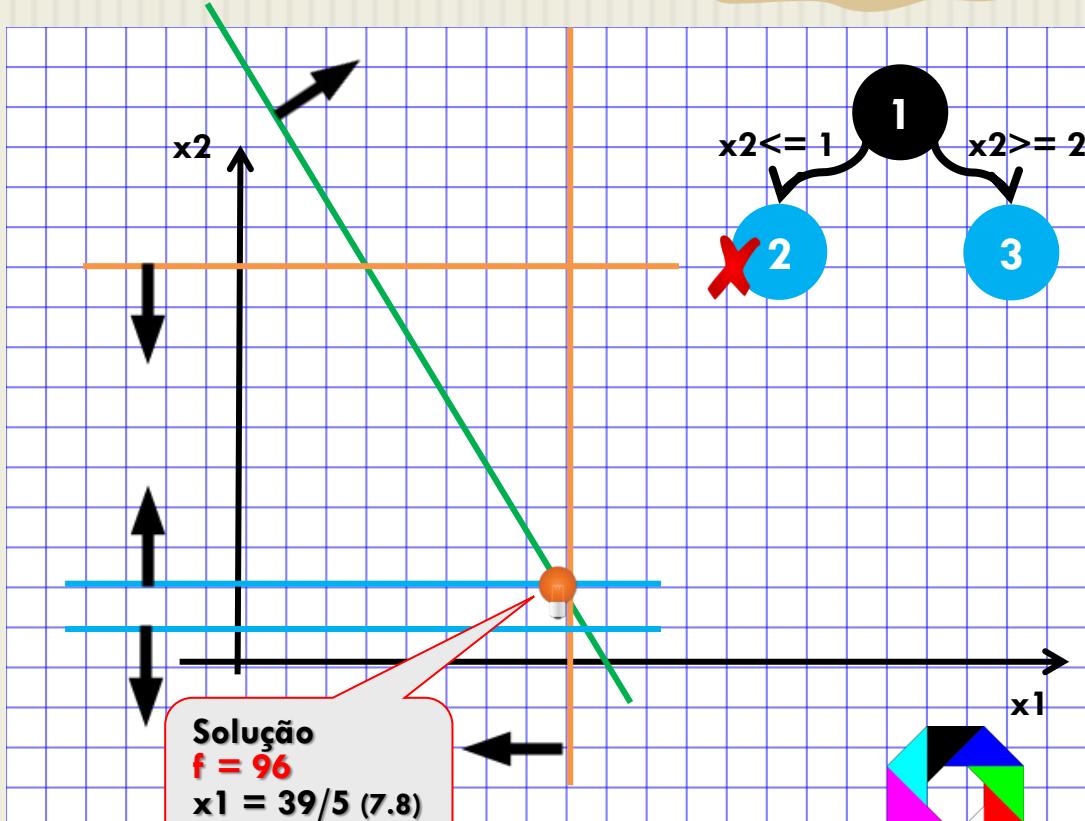
$$x_2 \geq 2$$

Problema  
Infactível

$$\begin{aligned} &\rightarrow x_1 = 39/5 (7.8) \\ &x_2 = 2 \\ &f = 96 \end{aligned}$$



## Capítulo 6



Branch  
-and-  
Bound

# Programação Inteira

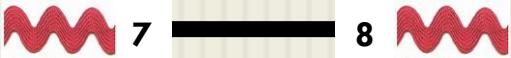
## SIMPLEX

6-22

### Exercício 7

$$\begin{array}{ll} \text{min } & f = 10*x_1 + 9*x_2 \\ \text{s/a } & 5*x_1 + 3*x_2 \geq 45 \\ & 0 \leq x_1 \leq 8 \\ & 0 \leq x_2 \leq 10 \text{ inteiros} \end{array}$$

$$x_1 = 7.8$$



$$x_1 \leq 7$$

$$x_1 \geq 8$$

$$x_1 = 7$$

$$x_1 = 8$$

$$> x_2 = 10/3$$

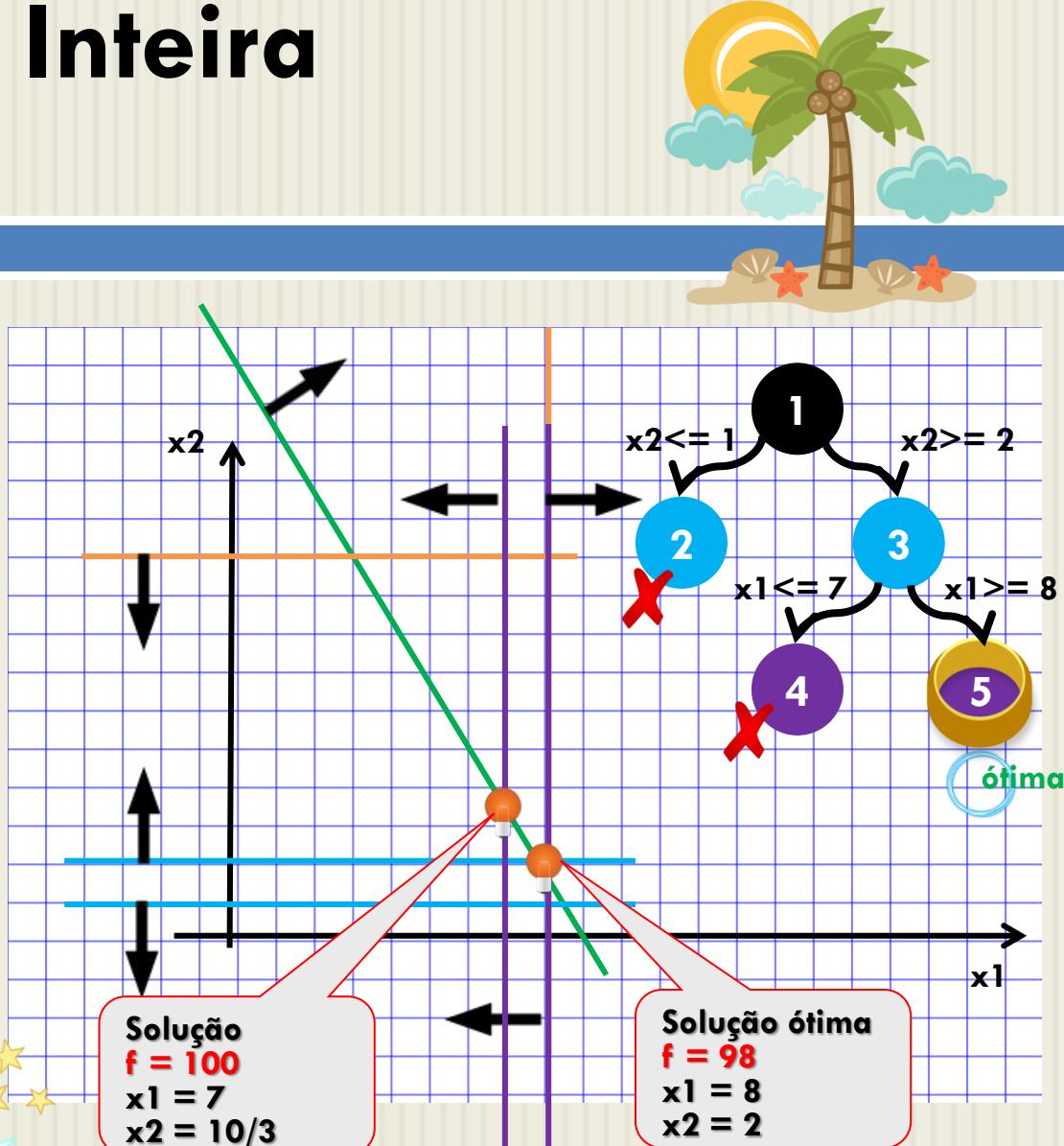
$$x_2 = 2$$

$$f = 100$$

$$f = 98$$

Esterilizada por  
 $f = 98$

Solução  
Ótima



# Programação Inteira

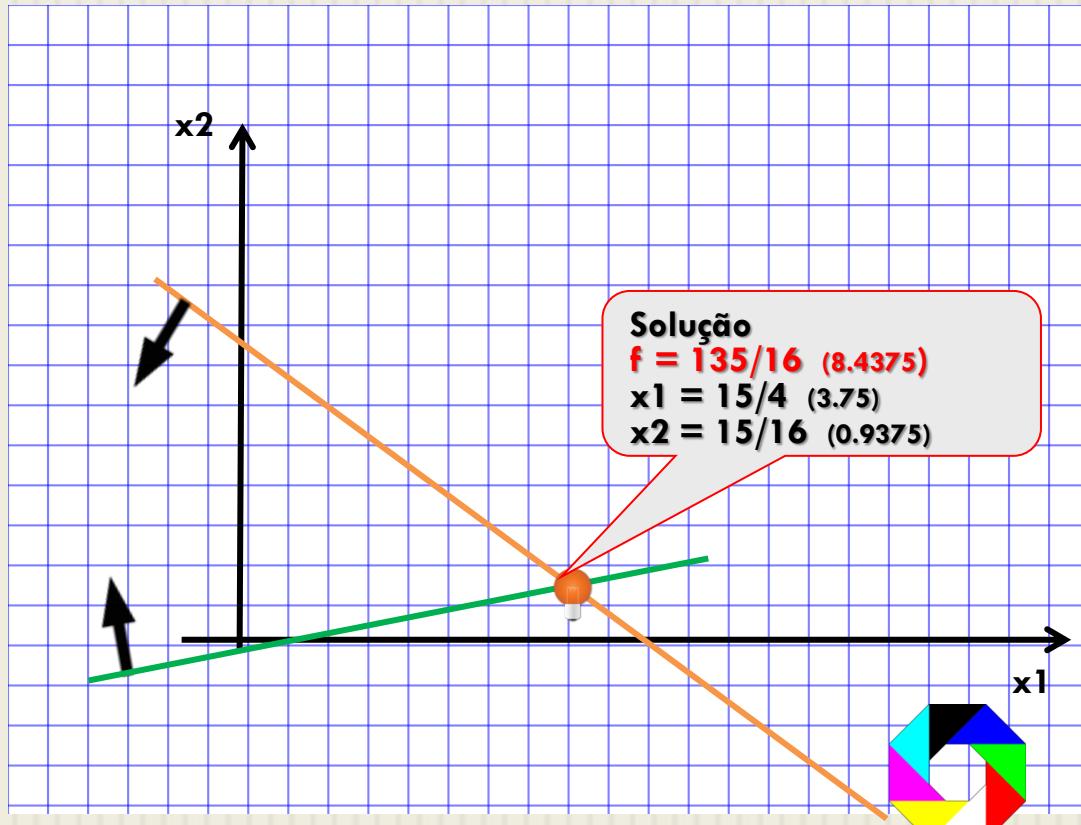
## SIMPLEX

6-23

### Exercício 8



$$\begin{array}{ll} \text{max } & f = 2*x_1 + x_2 \\ \text{s/a } & x_1 - 4*x_2 \leq 0 \\ & 3*x_1 + 4*x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiros} \end{array}$$



Branch  
-and-  
Bound

Capítulo 6

# Programação Inteira

## SIMPLEX

6-24

### Exercício 8

$$\begin{array}{ll} \text{max } & f = 2*x_1 + x_2 \\ \text{s/a } & x_1 - 4*x_2 \leq 0 \\ & 3*x_1 + 4*x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiros} \end{array}$$

$$x_1 = 3.75$$

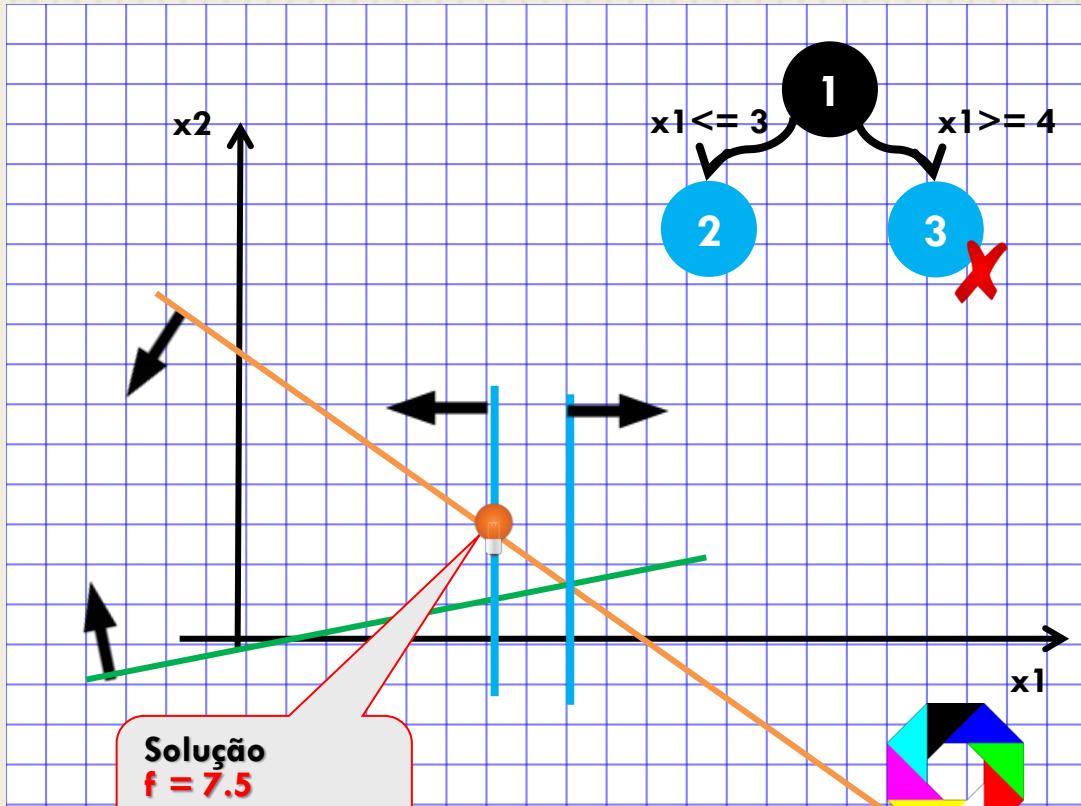


$$x_1 \leq 3$$

$$x_1 \geq 4$$

$$\begin{aligned} > x_1 &= 3 \\ &x_2 = 1.5 \\ &f = 7.5 \end{aligned}$$

Problema Infactível



Capítulo 6



Branch-and-Bound

# Programação Inteira

## SIMPLEX

6-25

### Exercício 8



$$\begin{aligned} \max \quad & f = 2*x_1 + x_2 \\ \text{s/a} \quad & x_1 - 4*x_2 \leq 0 \\ & 3*x_1 + 4*x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiros} \end{aligned}$$

$$x_2 = 1.5$$



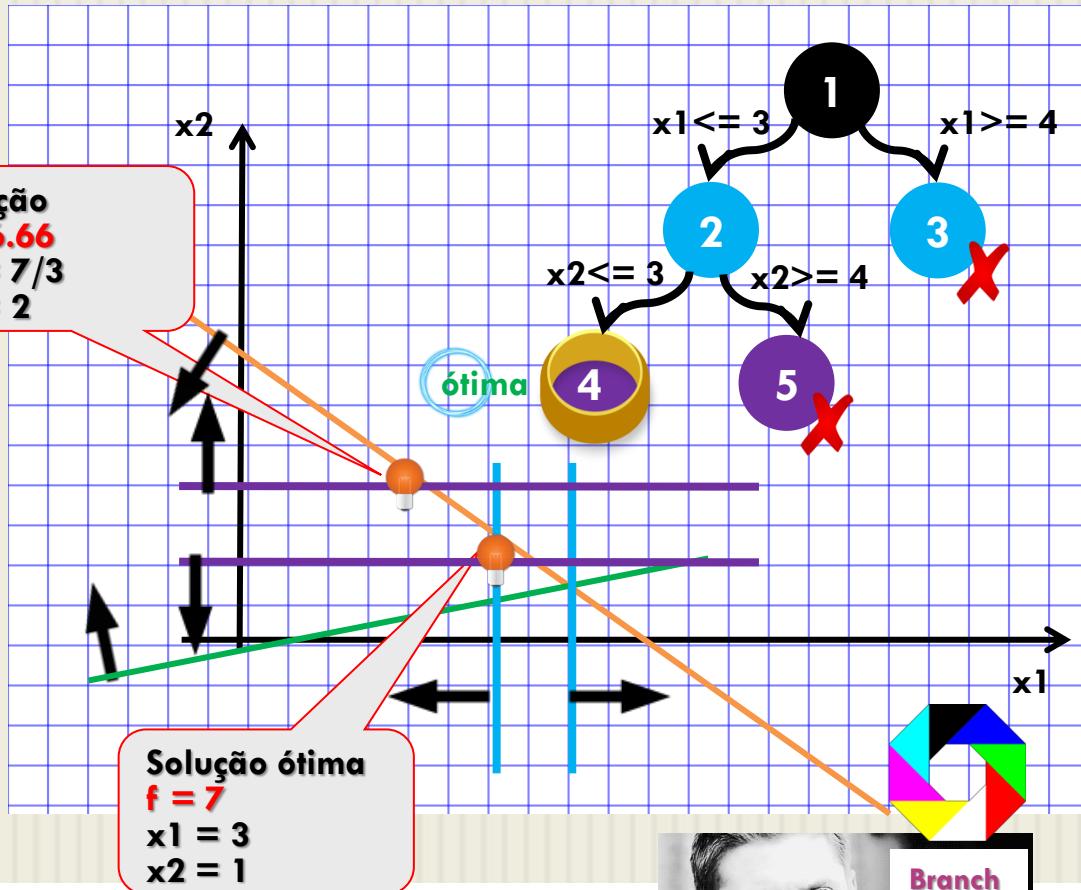
$$x_2 \leq 1 \quad x_2 \geq 2$$

$$x_1 = 3 \quad x_1 = 7/3$$

$$x_2 = 1 \quad x_2 = 2$$

$$f = 7 \quad f = 20/3 \quad (6.66)$$

**Solução Ótima**  
Esterilizada por  
 $f = 7$



Capítulo 6

