

PESQUISA OPERACIONAL – FUNDAMENTOS

Sistemas Lineares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

3-2

Sistemas

Dado um sistema com **m** equações e **n** incógnitas



Sistema Determinado

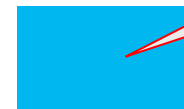
matriz quadrada $m = n$



Solução única

Sistema Indeterminado

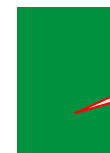
matriz deitada $m < n$



Infinitas soluções

Sistema Redundante

matriz em pé $m > n$



Equações a mais

Sistema Infactível



Equações contraditórias



Problemas & Soluções



3-3

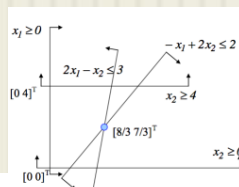
Tem solução

Problema Factível

Problema

Não tem solução

Problema Infactível



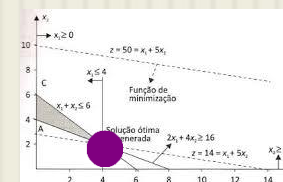
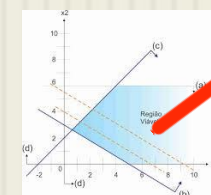
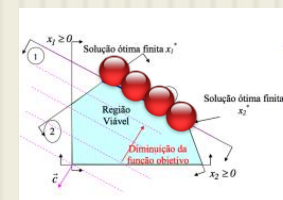
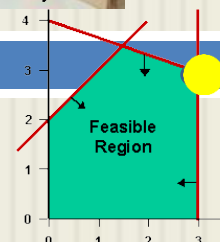
Tipos de Solução

Solução Única

Solução Múltipla

Solução Ilimitada

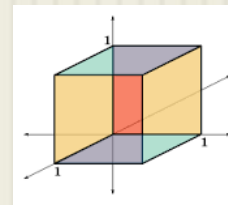
Solução Degenerada



Capítulo 3

Tipos de Soluções

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Base — conjunto de vetores linearmente independentes

3-4

BÁSICO — Solução ótima nos vértices

Solução



Solução Factível TODA A ÁREA AMARELA

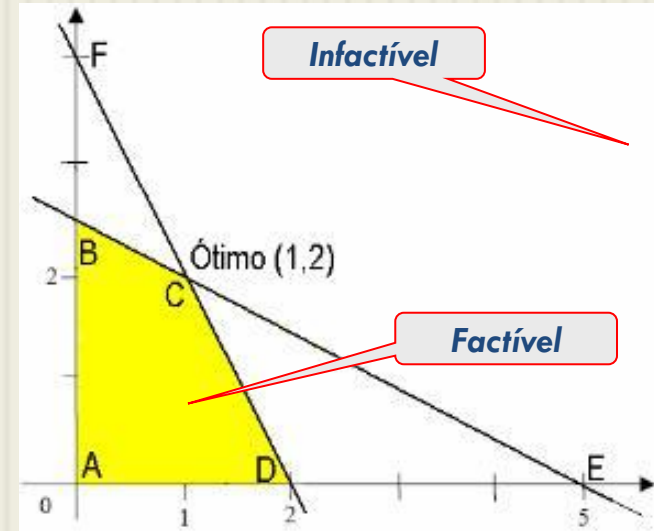
Solução Básica A, B, C, D, E, F

Solução Básica Factível A, B, C, D

Solução Básica Infactível E, F

Solução Ótima Básica C

Solução Ótima Não Básica
Exemplo: ARESTA BC se a solução é múltipla



NÃO BÁSICO — Solução ótima nas arestas





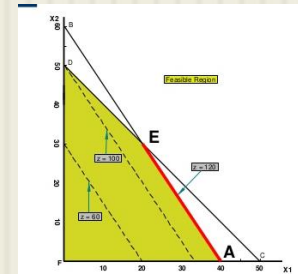
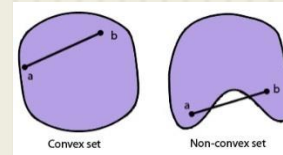
Teoremas



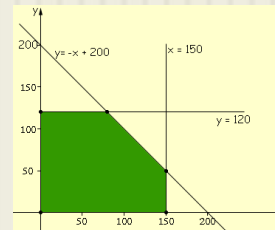
3-5

Programa Linear

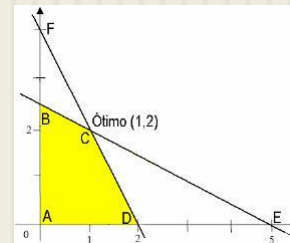
O conjunto das soluções factíveis de um PL é **convexo**



Toda solução factível básica de um PL é um **ponto extremo** do conjunto de soluções factíveis



Se a função-objetivo tem um **único** ponto ótimo finito, então esse ponto é um ponto extremo (**solução única**)



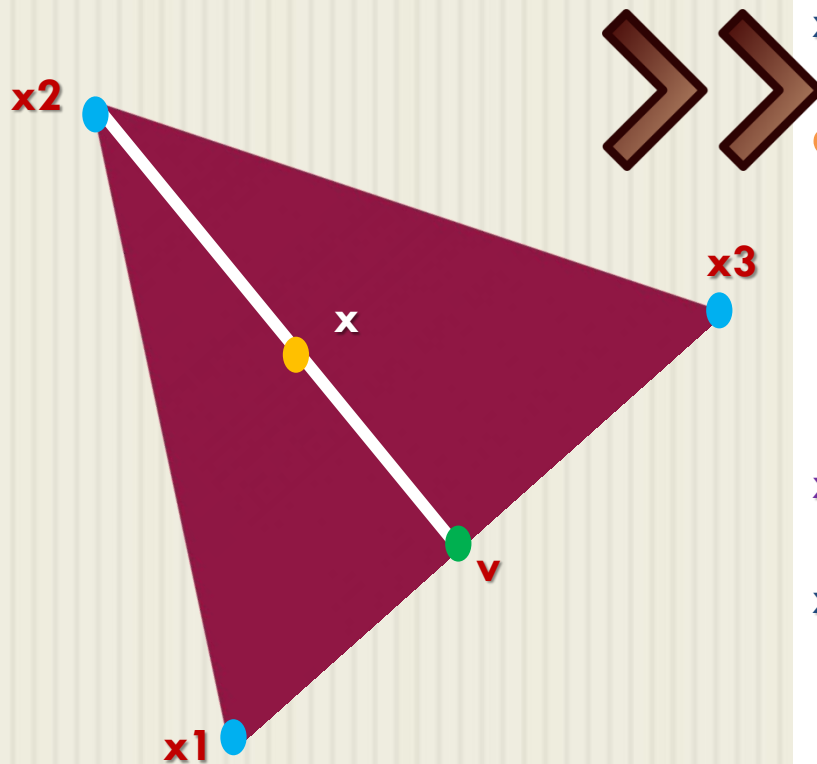
Se a função-objetivo tem valor ótimo em **mais** de um ponto extremo, então a solução ótima está em toda a aresta (**solução múltipla**)



Combinação Linear



3-6



$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

$$x = \lambda_1 x_2 + (1 - \lambda_1) v \quad (0 \leq \lambda_1 \leq 1)$$

$$v = \lambda_2 x_1 + (1 - \lambda_2) x_3 \quad (0 \leq \lambda_2 \leq 1)$$

$$x = \lambda_1 x_2 + (1 - \lambda_1) [\lambda_2 x_1 + (1 - \lambda_2) x_3]$$

$$x = (1 - \lambda_1) \lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2 + (1 - \lambda_1) (1 - \lambda_2) x_3$$

α_1

α_2

α_3



Capítulo 3





Forma Padrão

3-7

$$\begin{array}{l} \text{max } f = c * x \\ \text{s/a } \left\{ \begin{array}{l} A * x = b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Desigualdade

$$x_1 + x_2 \leq 4 \quad \rightarrow \quad x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + x_2 \geq 4 \quad \rightarrow \quad x_1 + x_2 - x_4 = 4$$

Variável não positiva

$$x_1 + x_2 \geq 4 \text{ com } x_1 \leq 0, x_2 \geq 0$$

Fazer $x_1' = -x_1$

$$-x_1' + x_2 - x_3 = 4, x_1', x_2 \geq 0$$

$$b_i \leq 0$$

$$x_1 + x_2 \geq -4 \quad \rightarrow \quad -x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

Variável livre (+, -, 0)

$$x_1 + x_2 \geq 4 \text{ com } x_1 \text{ livre}, x_2 \geq 0$$

Fazer $x_1 = x_1' - x_1'', x_1', x_1'' \geq 0$

$$x_1' - x_1'' + x_2 - x_3 = 4$$



Forma Padrão ➤ EXERCÍCIOS

3-8

$$\begin{array}{l} \text{max } f = c * x \\ \text{s/a } \begin{cases} A * x = b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{max } f = 2 * x_1 + 2 * x_2 \\ \text{s/a } \begin{array}{l} x_1 - x_2 \geq 1 \\ -0.5 * x_1 + 4 * x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \end{array}$$



$$\begin{array}{l} \text{max } f = 2 * x_1 + 2 * x_2 \\ \text{s/a } \begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -0.5 * x_1 + 4 * x_2 + x_4 = 2 \\ x_i \geq 0 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{max } f = 3 * x_1 + 4 * x_2 \\ \text{s/a } \begin{array}{l} x_1 + 3 * x_2 \leq 5 \\ 2 * x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \text{ livre} \end{array} \end{array}$$



$$\begin{array}{l} \text{max } f = 3 * x_1 + 4 * x_2' - 4 * x_2'' \\ \text{s/a } \begin{array}{l} x_1 + 3 * x_2' - 3 * x_2'' + x_3 = 5 \\ 2 * x_1 + x_2' - x_2'' + x_4 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2' \geq 0, x_2'' \geq 0 \end{array} \end{array}$$



Forma Padrão ➤ EXERCÍCIOS

3-9

$$\begin{aligned} \max f &= c * x \\ \text{s/a } \begin{cases} A * x &= b \\ x &\geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max f &= 2 * x_1 + x_2 - x_3 + 3 * x_4 - x_5 \\ \text{s/a } \quad x_1 + 2 * x_2 - x_3 + x_4 + 3 * x_5 &\geq 5 \\ 4 * x_1 + x_3 - 2 * x_4 - x_5 &\leq 0 \\ -2 * x_3 + x_4 + 2 * x_5 &\geq -7 \\ 3 * x_1 + x_2 - x_4 + x_5 &= 8 \\ x_1, x_2, x_5 &\geq 0, \quad x_3 \leq 0 \quad x_4 \text{ livre} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \max f &= 2 * x_1 + x_2 + x_3' + 3 * x_4' - 3x_4'' - x_5 \\ \text{s/a } \quad x_1 + 2 * x_2 + x_3' + x_4' - x_4'' + 3 * x_5 - x_6 &= 5 \\ 4 * x_1 - x_3' - 2 * x_4' + 2 * x_4'' - x_5 + x_7 &= 0 \\ -2 * x_3' - x_4' + x_4'' - 2 * x_5 + x_8 &= 7 \\ 3 * x_1 + x_2 - x_4' + x_4'' + x_5 &= 8 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$



Forma Padrão ➤ EXERCÍCIOS

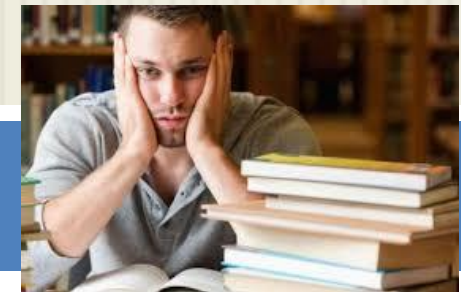
3-10

$$\begin{array}{l} \text{max } f = c * x \\ \text{s/a } \left\{ \begin{array}{l} A * x = b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{max } f = -2 * x_1 - 3 * x_2 + 5 * x_3 \\ \text{s/a } \quad x_1 + x_2 + x_4 \geq 5 \\ \quad \quad 2 * x_1 + x_3 \leq 4 \\ \quad \quad x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ \quad \quad x_1 \leq 0, \quad x_2, x_3 \geq 0, \quad x_4 \text{ livre} \end{array}$$



$$\begin{array}{l} \text{max } f = 2 * x_1' - 3 * x_2 + 5 * x_3 \\ \text{s/a } \quad -x_1' + x_2 + x_4' - x_4'' - x_5 = 5 \\ \quad \quad -2 * x_1' + x_3 + x_6 = 4 \\ \quad \quad x_2 + x_3 + x_4' - x_4'' = 6 \\ \quad \quad x_i \geq 0 \end{array}$$



Resolução Gráfica

3-11

$$\begin{aligned} \max \min f &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s/a} \quad x_1 + x_2 &\leq 4 \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solução

$$\begin{aligned} \max \\ x_1 = 2.5, x_2 = 1.5, f = 6.5 \end{aligned}$$

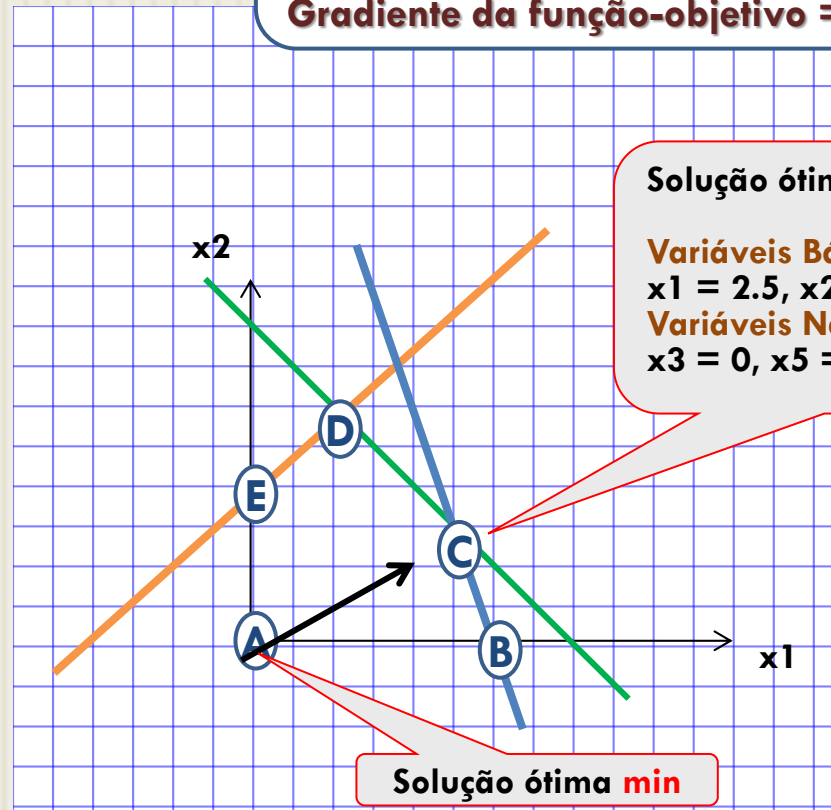
$$\begin{aligned} \min \\ x_1 = 0, x_2 = 0, f = 0 \end{aligned}$$

Ponto C

Ponto A

Solução Única

Região Factível = Polígono ABCDE
Soluções Básicas Factíveis = A, B, C, D, E
Gradiente da função-objetivo = (2, 1)



Solução ótima **max**

Variáveis Básicas:
 $x_1 = 2.5, x_2 = 1.5, x_4 = 3$
Variáveis Não Básicas:
 $x_3 = 0, x_5 = 0$

Solução ótima **min**



Capítulo 3

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + x_2 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_5 &= 9 \end{aligned}$$

Resolução Gráfica



3-12

$$\begin{aligned} \max \min f &= 4x_1 + 2x_2 \\ \text{s/a} \quad x_1 + x_2 &\geq 4 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 15 \\ 2 &\leq x_1 \leq 6 \\ 1 &\leq x_2 \leq 5 \end{aligned}$$

Solução

max

$$x_1 = 6, x_2 = 3, f = 30$$

$$x_1 = 5, x_2 = 5, f = 30$$

min

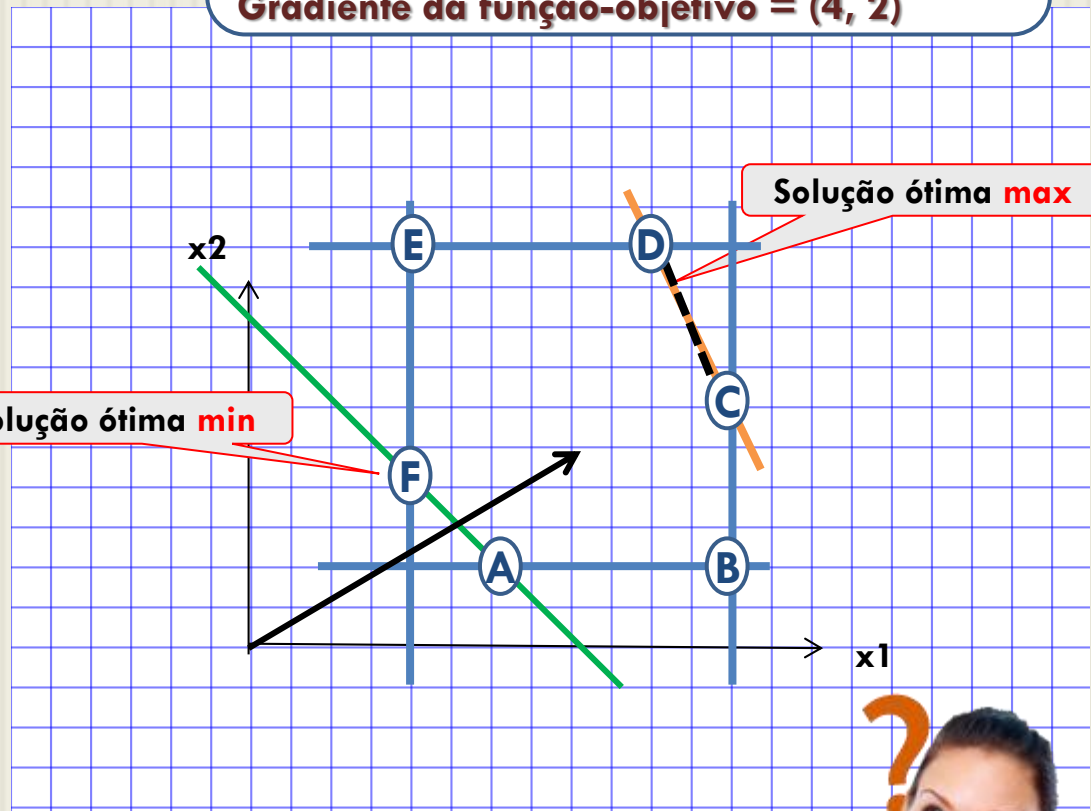
$$x_1 = 2, x_2 = 2, f = 12$$

Aresta CD

Ponto F

Solução ótima min

Solução ótima max



Resolução Gráfica

3-13

$$\begin{array}{ll} \max \min f = 3x_1 + x_2 \\ \text{s/a} & x_1 - 6x_2 \leq 6 \\ & -4x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Solução

$$\begin{array}{l} \max \\ f = +\infty \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \min \\ x_1 = 0, x_2 = 0, f = 0 \end{array}$$

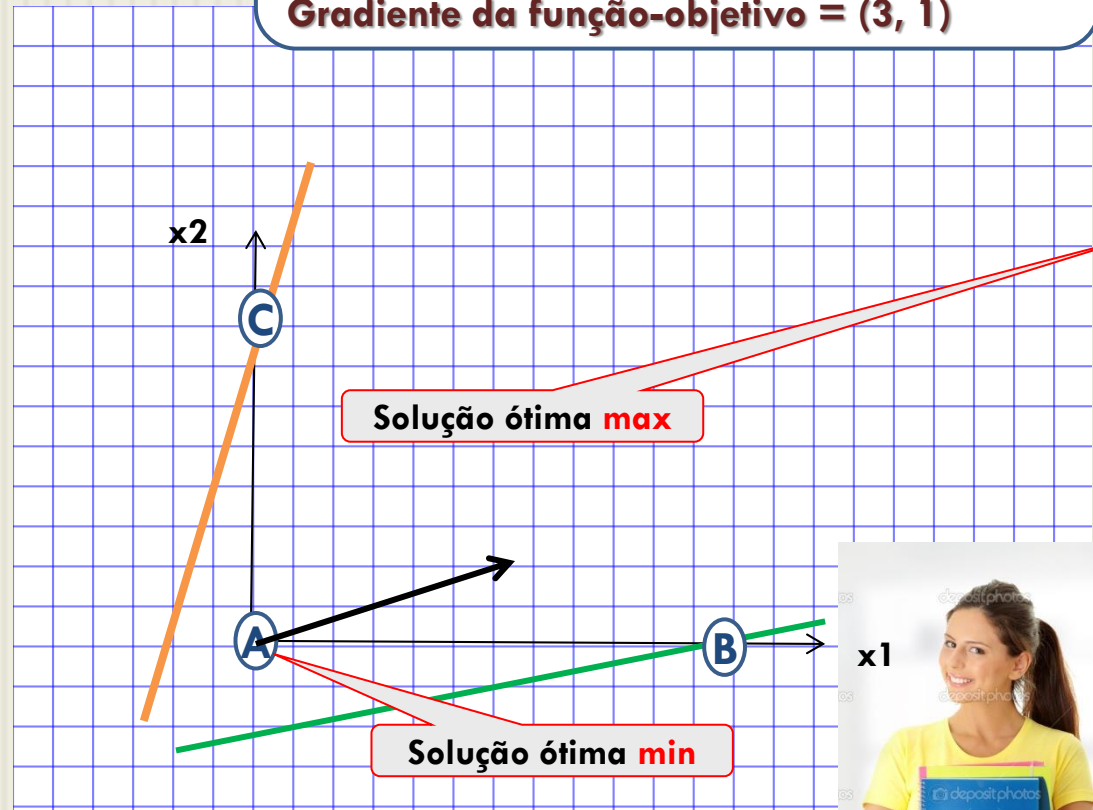
Ponto A

Solução Ilimitada

Região Factível = Polígono aberto

Soluções Básicas Factíveis = A, B, C

Gradiente da função-objetivo = (3, 1)



Capítulo 3



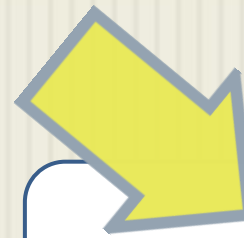
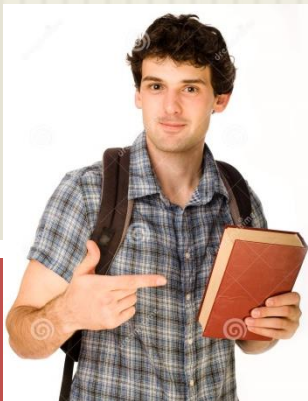
Resolução Gráfica

3-14

$$\begin{array}{ll} \max \min & f = x_1 + x_2 \\ \text{s/a} & -3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & x_1 - 5x_2 \geq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

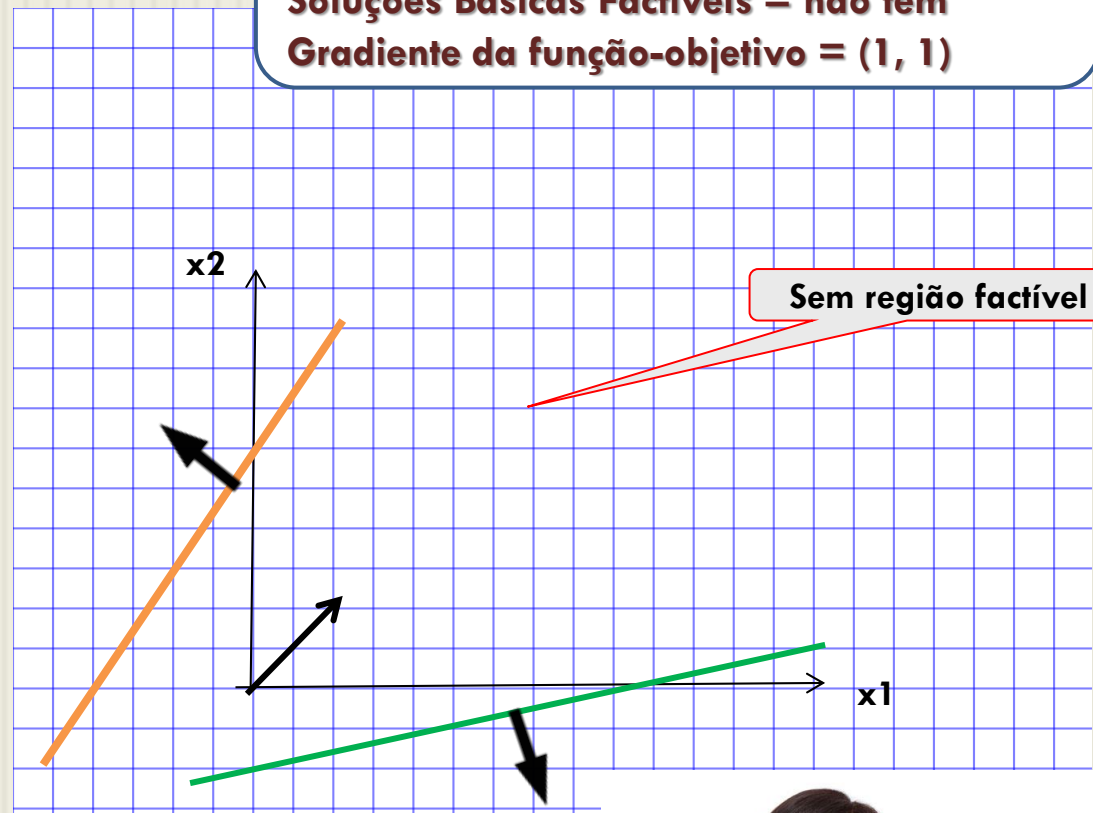
Solução

Problema infatível
(Sem solução)



Solução Infactível

Região Factível = não tem
Soluções Básicas Factíveis = não tem
Gradiente da função-objetivo = (1, 1)



Resolução Gráfica

➤ EXERCÍCIO 1

3-15



Forma Padrão

$$\begin{array}{ll} \text{max min} & f = x_1 + 2 \cdot x_2 \\ \text{s/a} & x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 4 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

- A) Escrever na FP
- B) Resolver graficamente

Solução DEGENERADA

Variáveis Básicas:

$$x_1 = 4, x_2 = 0$$

Variáveis Não Básicas:

$$x_3 = 0, x_4 = 0$$

$$\begin{array}{ll} x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 & = 4 \\ x_1 & + x_4 = 4 \\ x_i & \geq 0 \end{array}$$

BASE

Solução múltipla

max

$$x_1 = 4, x_2 = 0, f = 4$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2, f = 4$$

min

$$x_1 = 0, x_2 = 0, f = 0$$

Solução única



Resolução Gráfica

➤ EXERCÍCIO 2



3-16

BASE

Forma Padrão

max min $f = x_1 + 2 \cdot x_2$
s/a $-x_1 + x_2 \leq 0$
 $x_1 \geq 4$
 $x_1, x_2 \geq 0$

- A) Escrever na FP
- B) Resolver graficamente

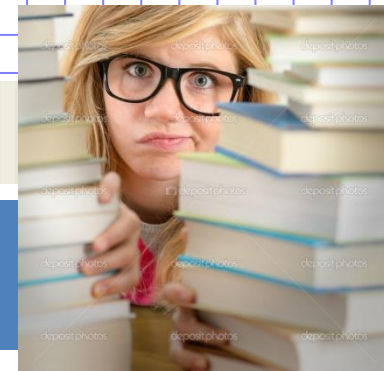
$-x_1 + x_2 + x_3 = 0$
 $x_1 - x_4 = 4$
 $x_i \geq 0$

Solução ilimitada

max
 $f = +\infty$

min
 $x_1 = 4, x_2 = 0, f = 4$

Solução única



Resolução Gráfica

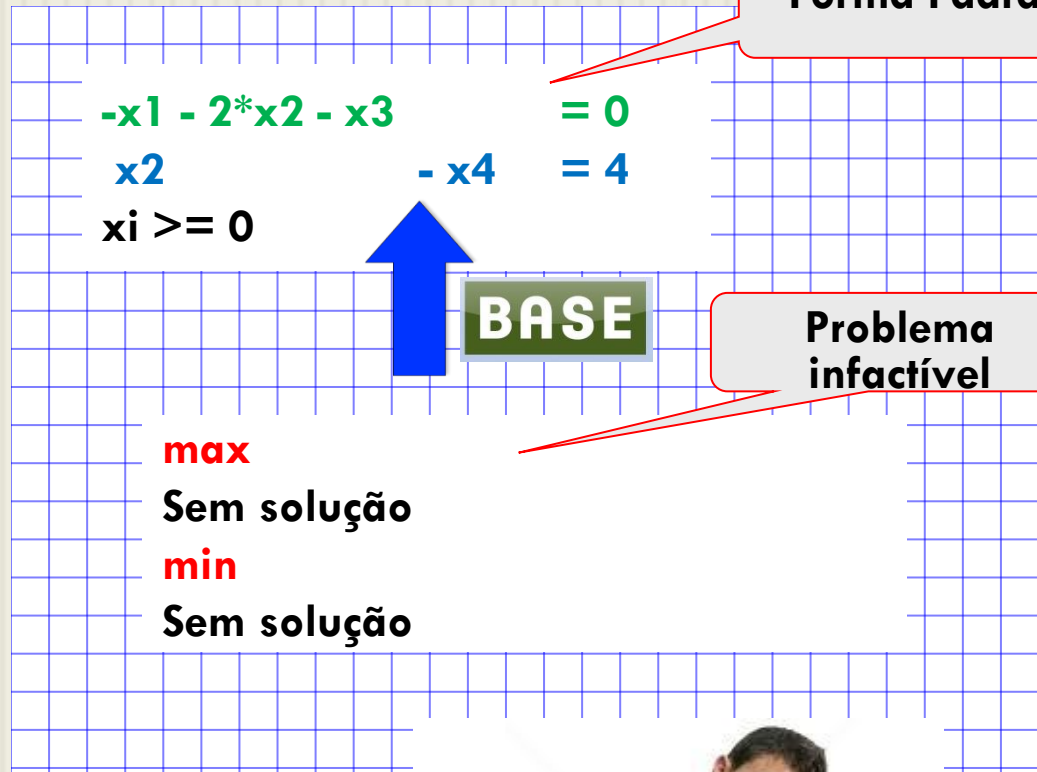
➤ EXERCÍCIO 3



3-17

$$\begin{aligned} \max \min f &= x_1 + 2x_2 \\ \text{s/a} \quad -x_1 - 2x_2 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- A) Escrever na FP
- B) Resolver graficamente



Resolução Gráfica

➤ EXERCÍCIO 4

3-18

Forma Padrão

$$\begin{aligned} \max \min f &= x_1 - 2x_2 \\ \text{s/a} \quad x_1 + x_2 &\geq 2 \\ -x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- A) Escrever na FP
- B) Resolver graficamente

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ -x_1 + x_2 - x_4 &= 1 \\ x_2 + x_5 &= 3 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

BASE

Solução Única

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 = 0.5, x_2 = 1.5, f = -2.5 \\ \min \quad & x_1 = 0, x_2 = 3, f = -6 \end{aligned}$$



Capítulo 3



Resolução Gráfica

➤ EXERCÍCIO 5

3-19



Forma Padrão

$$\begin{aligned} \max \min f &= x_1 - 2x_2 \\ \text{s/a} \quad -x_1 + x_2 &\geq 1 \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- A) Escrever na FP
- B) Resolver graficamente

BASE



$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_5 &= 3 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Solução única

$$\begin{aligned} \max \\ x_1 = 0, x_2 = 1, f &= -2 \\ \min \\ x_1 = 3, x_2 = 5, f &= -7 \end{aligned}$$



Capítulo 3



Resolução Gráfica

EXERCÍCIO 6



Forma Padrão

$$\begin{array}{ll} \text{max min } f = x_1 - x_2 & \\ \text{s/a} & -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

- A) Escrever na FP
- B) Resolver graficamente



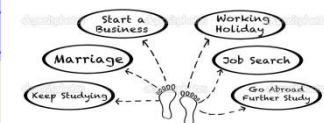
$$\begin{array}{rcl} -x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 6 \\ x_1 + x_2 & - & x_4 = 1 \\ x_1 & + & x_5 = 3 \\ x_i & \geq & 0 \end{array}$$

BASE



Solução Única

$$\begin{array}{ll} \text{max} & \\ x_1 = 3, x_2 = 0, f = 3 & \\ \text{min} & \\ x_1 = 0, x_2 = 2, f = -2 & \end{array}$$



Resolução Gráfica

➤ EXERCÍCIO 7



3-21

Forma Padrão

max min $f = x_1 + x_2$
s/a $-x_1 + x_2 \geq 2$
 $7x_1 + 3x_2 \geq 49$
 $x_1 \geq 1$
 $x_1 \leq 4$
 $x_1, x_2 \geq 0$

- A) Escrever na FP
B) Resolver graficamente

$-x_1 + x_2 - x_3 = 6$
 $7x_1 + 3x_2 - x_4 = 1$
 $x_1 + x_5 = 3$
 $x_1 + x_6 = 4$
 $x_i \geq 0$

BASE

Solução ilimitada

max
 $f = +\infty$

min
 $x_1 = 4, x_2 = 7, f = 11$

Solução única



Capítulo 3

