Eletromagnetismo I

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2º Semestre 2014

Preparo: Diego Oliveira

Aula 10

Campo Elétrico na Matéria

Até agora discutimos eletrostática no vácuo, ou na presença de condutores perfeitos, em que as cargas livres se localizam somente na superfície e o campo elétrico é nulo dentro do condutor.

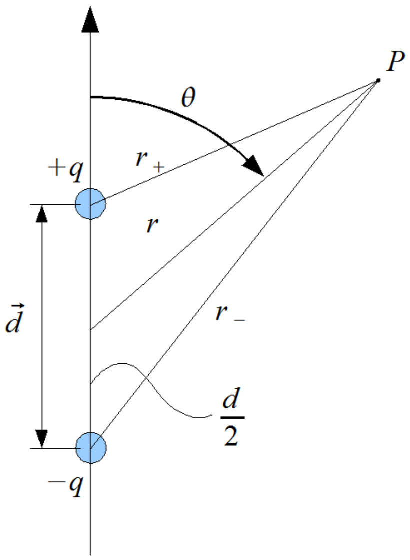
No entanto, para a maioria dos materiais, as cargas elétricas não estão livres, mas sim ligadas em átomos e moléculas. Sabemos que estes meios podem se comportar como isolantes ou condutores, embora não perfeitos, dependendo da separação entre a banda de valência e a de condução. No entanto, mesmo que não haja portadores "livres" de carga dentro do meio, as cargas elétricas ligadas em átomos e moléculas do meio podem modificar um campo elétrico nele aplicado através do mecanismo de polarização, que vamos discutir nesta seção do curso. Mas primeiro vamos relembrar, de Física III, o conceito de dipolo elétrico.

Dipolo Elétrico (seção 3.4.1 do livro texto)

Um dipolo elétrico é caracterizado por duas cargas iguais em módulo, mas com sinais opostos, separadas por uma distância d. Os dipolos são caracterizados pelo vetor momento de dipolo, definido como

$$\vec{p} = q\vec{d} \tag{1}$$

onde o vetor distância $\vec{d}$ vai da carga negativa para a positiva, por definição.



Quando mencionamos um campo elétrico como um campo dipolar, na verdade não estamos apenas interessados no campo das duas cargas, mas na expressão aproximada deste campo para distâncias muito maiores que a separação entre elas, ou seja, $r \gg d$. Para obter a expressão deste campo, vamos considerar um sistema de coordenadas esféricas, com o eixo z ao longo da reta que une as duas cargas e a origem no ponto médio entre elas. Considerando a figura, temos que o potencial no ponto $\vec{r}$ será dado pela soma dos potenciais das cargas pontuais, ou seja,

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \tag{2}$$

Pela lei dos triângulos, temos que

$$\begin{aligned} r_+^2 &= r^2 - 2r\frac{d}{2}cos\theta + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = r^2 - rdcos\theta + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \\ r_-^2 &= r^2 + rdcos\theta + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Para usar estas relações de forma conveniente na condição em que $r \gg d$, podemos escrever

$$\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} = \frac{(r_- - r_+)(r_- + r_+)}{r_+ r_- (r_- + r_+)} = \frac{r_-^2 - r_+^2}{r_+ r_- (r_- + r_+)} = \frac{2rdcos\theta}{r_+ r_- (r_- + r_+)} \tag{4}$$

Mas, na condição $r \gg d$, temos que $r_+ r_-(r_- + r_+) \approx 2r^3$; portanto

$$\phi(\vec{r}) \cong \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{rdcos\theta}{r^3} = \frac{prcos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \qquad \therefore \boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p}.\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}} \tag{5}$$

É interessante notar que o efeito de cancelamento das cargas de sinais opostos faz com que $\phi \sim 1/r^2$ para distâncias $r \gg d$, ou seja, o potencial decresce muito mais rápido que o de uma carga pontual.

Tendo o potencial, podemos calcular o campo elétrico

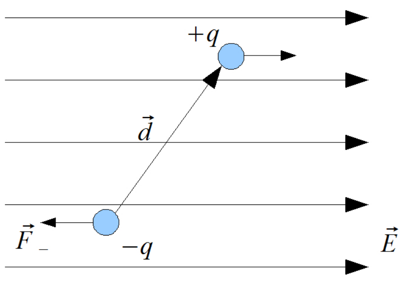
$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\therefore \boxed{\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2cos\theta\hat{e}_r + sen\theta\hat{e}_\theta)} \tag{6}$$

Exercício: fazer um gráfico vetorial da direção de $\vec{E}$, para $r = const.$

Dipolo em um campo elétrico externo

Suponhamos que coloquemos um dipolo elétrico em um campo elétrico externo, como mostra a figura. O campo fará uma força em um sentido na carga positivo e no sentido oposto na carga negativa. Portanto, a força resultante sobre o dipolo será nula, Mas, como elas estão separadas de uma distância d, formarão um binário, aplicando torque sobre o dipolo, fazendo-o girar em torno de seu centro.

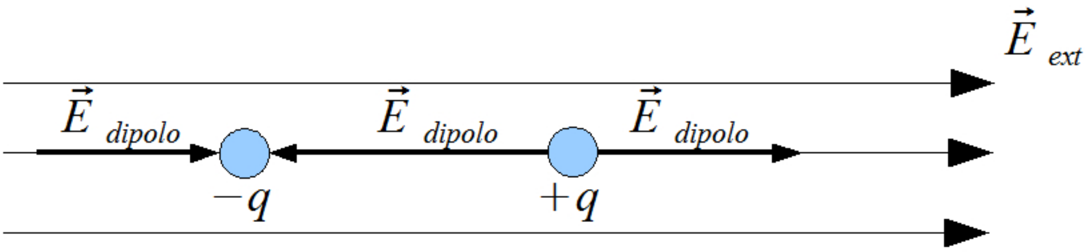


O torque aplicado pelo binário é

$$\vec{N} = (\vec{r}_+ \times \vec{F}_+) + (\vec{r}_- \times \vec{F}_-) = \left[\frac{\vec{d}}{2} \times q\vec{E}\right] + \left[-\frac{\vec{d}}{2} \times (-q\vec{E})\right] \tag{7}$$

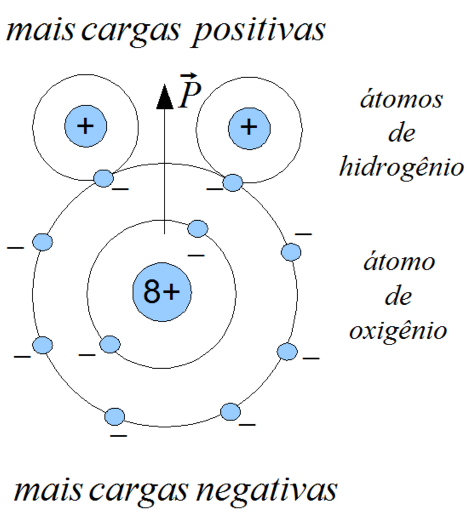
$$\therefore \vec{N} = q\vec{d} \times \vec{E} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E}}$$

Portanto o campo elétrico uniforme tende a alinhar o dipolo em sua direção. Quando o dipolo se alinha ao campo externo, ele tende a aumentar o campo para $r > d$ e a diminuí-lo para $r < d$.



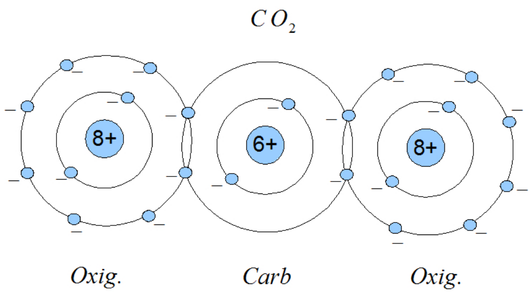
Dipolo em Meios Materiais

Nos meios materiais, os elétrons e íons estão ligados entre si em átomos e estes em moléculas. Em alguns casos, o arranjo dos átomos em uma molécula pode ocasionar um dipolo elétrico permanente. Neste caso, a molécula se torna uma molécula polar, cujo exemplo paradigmático é a molécula d'água. De fato, se calcularmos a estrutura de cargas em moléculas de H_2O, a condição de equilíbrio apresenta um dipolo permanente bastante intenso



$$|p| = 6,1 \times 10^{-30} C\, m \qquad (8)$$

Há, no entanto, outras moléculas também formadas por configurações covalentes que não possuem momento polar na configuração de equilíbrio. O caso mais conhecido é o da molécula de CO_2.



Portanto, quando aplicarmos um campo elétrico em um meio, a sua resposta dependerá fortemente da configuração de equilíbrio de seus átomos e moléculas.

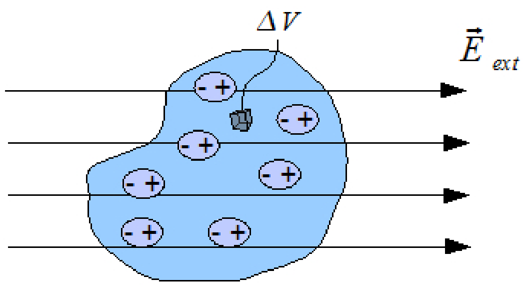
Se o meio for constituído de moléculas polares, o efeito será de uma rotação dos dipolos moleculares, tentando se alinhar com o campo externo. No entanto, é bom ter em mente que, antes da aplicação do campo, a agitação térmica das moléculas faz com que seus dipolos permanentes fiquem orientados de forma aleatória, e assim elas não apresentam uma polarização eletrostática permanente, como os imãs magnéticos.

Mesmo que o meio não seja constituído de moléculas polares, a aplicação do campo elétrico externo faz com que estas moléculas sofram uma pequena deformação, com as cargas positivas se deslocando no sentido do campo e as negativas no sentido contrário.

De qualquer forma, seja pela alteração da orientação dos dipolos moleculares ou pela distribuição das moléculas não polares, na presença de um campo elétrico externo vão surgir dipolos induzidos no meio que alteram o próprio campo externo. Vamos agora determinar o campo elétrico na presença desses dipolos.

Campo de Polarização em um Dielétrico

Suponhamos que apliquemos um campo elétrico em um meio dielétrico (não condutor) e que, em resposta, surja uma distribuição de pequenos dipolos no meio, seja devido à rotação dos dipolos das moléculas



polares ou polarização das não polares.

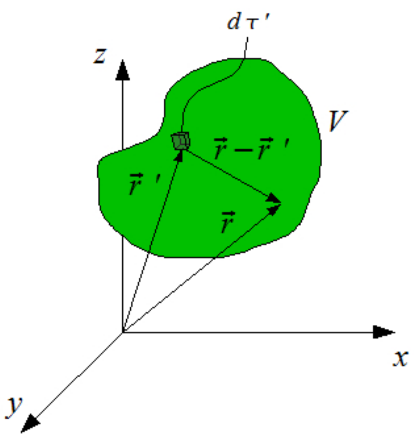
Definimos o Vetor de Polarização $\vec{P}$ como o momento de dipolo por unidade de volume no meio, ou seja, se tivermos N moléculas em um pequeno volume ΔV,

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{n=1}^{N}\vec{p}_n, \tag{9}$$

onde os $\vec{p}_n$ são os momentos de dipolo das moléculas dentro do volume. Em geral, o meio pode não ser uniforme, de forma que tanto N como $\vec{P}$ dependam da posição dentro do meio.

Vamos agora calcular o campo produzido por estes dipolos, considerando que estamos interessados apenas em um campo médio, para distâncias aos dipolos muito maiores que suas dimensões, de forma que a expressão para o potencial de um dipolo possa ser empregado.

Consideremos um volume elementar τ', na posição $\vec{r}\,'$ dentro do meio dielétrico. Supondo que dentro deste volume o momento de dipolo seja $d\vec{p}\,'$, temos que o potencial $d\phi$ produzido em outro ponto $\vec{r}$ no meio será dado por



$$d\phi(\vec{r}) = \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,').d\vec{p}\,'}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \tag{10}$$

mas

$$d\vec{p}\,' = \vec{P}d\tau' \quad \Rightarrow \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\vec{P}(\vec{r}\,').(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}d\tau' \tag{11}$$

Vimos, na revisão de Cálculo Vetorial, que

$$\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = -\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \tag{12}$$

Naturalmente, se tomarmos o gradiente com relação a $\vec{r}\,'$, ou seja,

$$\nabla' = \hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x'} + \hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y'} + \hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z'} \tag{13}$$

obtemos o mesmo resultado, mas com o sinal trocado, ou seja,

$$\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)=\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \tag{14}$$

Utilizando este resultado, podemos escrever

$$\vec{P}(\vec{r}').\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}=\vec{P}(\vec{r}').\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)=\nabla'.\left[\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]-\frac{\nabla'.\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{15}$$

onde também utilizamos a identidade vetorial $\nabla.(g\vec{f})=\vec{f}.\nabla g+g\nabla.\vec{f}$.

Substituindo este resultado na expressão para $\phi(\vec{r})$, temos

$$\phi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \nabla'.\left[\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]d\tau'-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\nabla'.\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\tau' \tag{16}$$

Aplicando o Teorema de Gauss, obtemos, finalmente

$$\boxed{\phi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\vec{P}(\vec{r}'),\hat{n}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dS'+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{-\nabla'.\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\tau'} \tag{17}$$

Portanto

O potencial eletrostático produzido por uma distribuição volumétrica de momentos de dipolo, caracterizada pelo Vetor Polarização $\vec{P}$, pode ser considerado como produzido por uma distribuição superficial de cargas de polarização

$$\sigma_p \equiv \vec{P}.\hat{n} \tag{18}$$

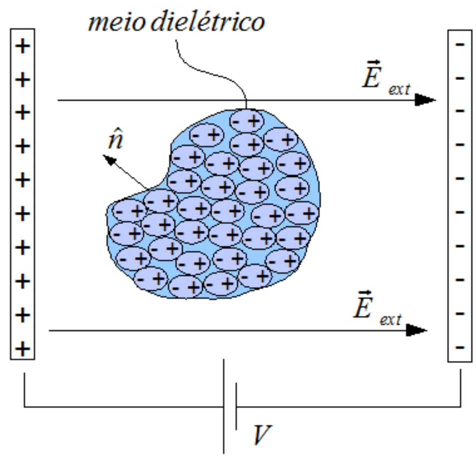
e por outra distribuição volumétrica de cargas de polarização

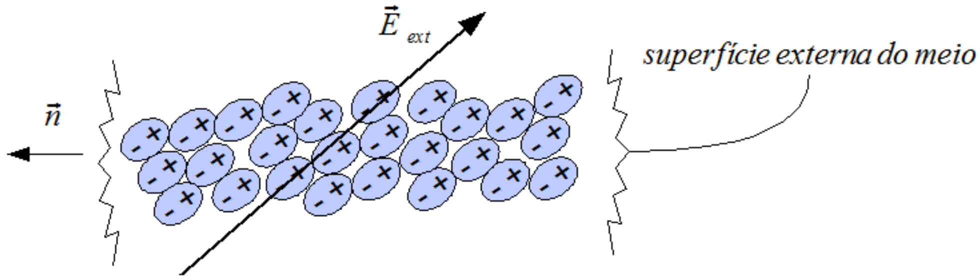
$$\rho_p \equiv -\nabla.\vec{P} \tag{19}$$

(Note que ρ_p só é diferente de zero se $\vec{P}$ não for constante).

Explicação Física para σ_p e ρ_p

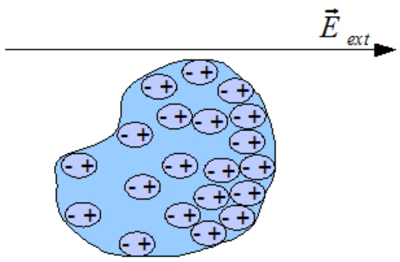
Consideremos um meio dielétrico dentro de um capacitor de placas planas carregado. A densidade superficial de cargas de polarização σ_p aparece simplesmente porque os dipolos, ao se alinharem ao campo externo têm um efeito nulo dentro do meio, mas não em suas superfícies externas, caso $\vec{P}$ seja uniforme





Se $\vec{P}$ não for uniforme, mesmo dentro do meio, aparece um desbalanço no efeito da orientação dos dipolos. Consideremos, por exemplo, um caso em que a densidade de moléculas cresça da esquerda para a direita.

Quando os dipolos se orientarem na direção do campo, não haverá um cancelamento perfeito entre as cargas positivas dos dipolos, numa seção transversal do meio, e a de seus vizinhos à direita, dando um efeito equivalente a ter mais cargas de polarização negativas nesta seção dentro do meio. Por isso o sinal da densidade de carga de polarização é oposto à divergência de $\vec{P}$.



.1 Lei de Gauss em um Dielétrico. Vetor Deslocamento $\tilde{\mathrm{D}}$

A Lei de Gauss para o campo elétrico é

$$\nabla.\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{20}$$

A densidade de carga é a densidade de carga total. Suponhamos que estejamos dentro de um dielétrico que tenha cargas livres nele colocadas, cuja densidade vamos representar por ρ_l. As cargas de polarização também vão produzir um campo eletrostático e vimos que seu efeito, dentro da aproximação de dipolos, pode ser representado pela densidade de cargas de polarização total

$$\rho_p = -\nabla.\vec{P} \tag{21}$$

Substituindo as duas densidades de carga na Equação de Poisson, temos

$$\epsilon_0\nabla.\vec{E} = \rho_l - \nabla.\vec{P} \qquad \Rightarrow \qquad \therefore \nabla.(\epsilon_0\vec{E} + \vec{P}) = \rho_l \tag{22}$$

onde $\vec{E}$ é o campo elétrico total, devido as cargas livres e as de polarização.

Escrita dessa forma, a Lei de Gauss indica que $\epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ são uma grandeza vetorial cuja fonte de fluxo é dada pelas cargas livres somente; a esta grandeza damos nome de Vetor Deslocamento Elétrico

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}; \qquad \nabla.\vec{D} = \rho_l} \tag{23}$$

A unidade de$\vec{D}$ é a mesma de $\vec{P}$: $\frac{C}{m^2}$.

A introdução de $\vec{D}$ facilita alguns cálculos, mas muitas vezes leva a erros conceituais. Por isso, é bom realçar os seguintes pontos sobre o vetor deslocamento elétrico.

- As fontes de fluxo $\vec{D}$ são as cargas líquidas (ou livres) do meio (ou do vácuo); as cargas de polarização não dão origem a $\vec{D}$

- Apesar de a forma integral da equação para $\vec{D}$ ser

$$\oint_S \vec{D}.\hat{n}dS = q_l \tag{24}$$

(correspondendo a $\nabla.\vec{D} = \rho_l$), não existe Lei de Coulomb para $\vec{D}$, ou seja

$$\vec{D}(\vec{r}) \neq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} d\tau' \tag{25}$$

Isto é porque, em geral, $\nabla \times \vec{D} \neq 0$. De fato, $\nabla \times \vec{D} = \epsilon_0 \nabla \times \vec{E} + \nabla \times \vec{P}$, e o vetor polarização pode ter rotacional não nulo!

- Mesmo sendo as fontes de fluxo de $\vec{D}$ somente as cargas livre, $\vec{D}$ pode ser alterado na presença de dielétricos. De fato, como veremos mais adiante, a componente normal de $\vec{D}$ é continua na interface de um dielétrico, mas não a componente tangencial.