Eletromagnetismo I

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2º Semestre 2014

Preparo: Diego Oliveira

Aula 11

Na aula passada nós definimos o vetor polarização $\vec{P}$ de um meio material como a densidade volumétrica de dipolos elétricos dentro do meio e vimos que o potencial eletrostático produzido pelas cargas de polarização pode ser calculado como o potencial produzido por uma densidade superficial de cargas de polarização.

$$\sigma_p = \vec{P}.\hat{n}, \tag{1}$$

onde $\hat{n}$ é o vetor normal à superfície do meio, e uma densidade volumétrica de cargas de polarização

$$\rho_p = -\nabla.\vec{P} \tag{2}$$

Vimos também que podemos definir o campo vetorial Deslocamento Elétrico como

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} \tag{3}$$

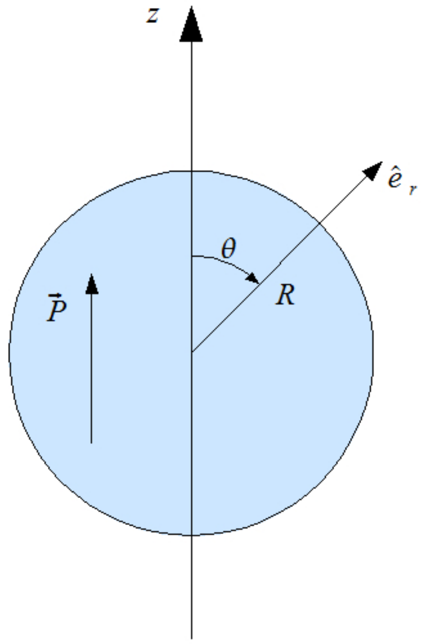
tal que a fonte de fluxo de $\vec{D}$ sejam somente as cargas livres, e não as de polarização, no meio, isto é

$$\nabla.\vec{D} = \rho_l \qquad \therefore \int \vec{D}.\hat{n}dS = q_{livre} \tag{4}$$

Antes de prosseguir, vamos discutir alguns exemplos e problemas do livro texto para consolidar o conceito de $\vec{D}$.

Ex. 4.2: Determinar o campo elétrico produzido por uma esfera uniformemente polarizada.

Como $\vec{P} = const$, $\rho_p = -\nabla.\vec{P} = 0$.
Por outro lado



$$\sigma_p = \vec{P}.\hat{n} \quad (5)$$

ou

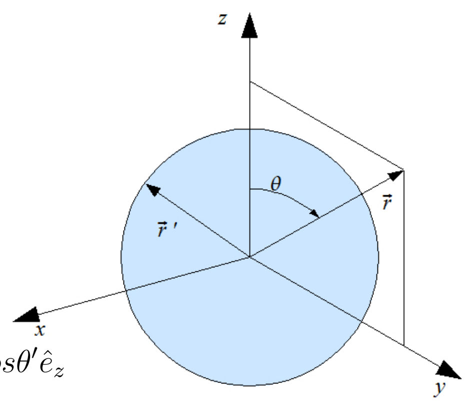
$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \frac{\vec{P}\hat{n}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dS'; \qquad \vec{P}.\hat{n}' = Pcos\theta'$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{R^2P}{4\pi\epsilon}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \frac{sen\theta' cos\theta'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\theta' \quad (6)$$

Antes de resolver este problema pelo método adotado pelo livro (usando o Ex. 3.9), vamos ver como poderíamos determinar o potencial por integração direta. Primeiro, notamos que, como há simetria em torno do eixo z, podemos tomar o ponto onde queremos determinar o potencial no plano $xz(\varphi = 0)$.

Então

$$\vec{r} = r\hat{e}_r = rsen\theta\hat{e}_x + rcos\theta\hat{e}_z \quad (7)$$



Por outro lado, o ponto $\vec{r}'$, onde está a carga de polarização, é qualquer ponto sobre a esfera; então

$$\vec{r}' = R\hat{e}_r = Rsen\theta' cos\varphi'\hat{e}_x + Rsen\theta' sen\varphi'\hat{e}_y + Rcos\theta'\hat{e}_z \quad (8)$$

de forma que

$$\vec{r} - \vec{r}' = (rsen\theta - Rsen\theta' cos\varphi')\hat{e}_x - Rsen\theta' sen\varphi'\hat{e}_y + (rcos\theta - Rcos\theta')\hat{e}_z \tag{9}$$

e

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \left[(rsen\theta - Rsen\theta' cos\varphi')^2 + (Rsen\theta' sen\varphi')^2 + (rcos\theta - Rcos\theta')^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

Desenvolvendo os quadrados e combinando os ternos, temos

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \left[r^2 + R^2 - 2rR(sen\theta sen\theta' cos\varphi' + cos\theta cos\theta')\right]^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

e

$$\phi(\vec{r}) = \frac{R^2 P}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \frac{sen\theta' cos\theta' d\theta'}{[r^2 + R^2 - 2rR(sen\theta sen\theta' cos\varphi' + cos\theta cos\theta')]^{\frac{1}{2}}} \tag{12}$$

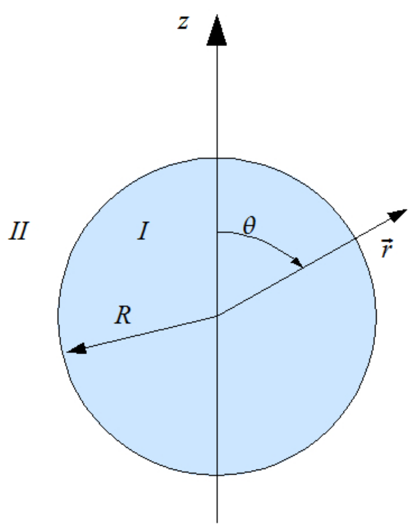
Esta integral pode ser feita, mas involve o conceito de integrais elípticas, que está fora do conhecimento básico para este curso. Vamos então utilizar o método do livro texto, que é bastante instrutivo, mas o vamos discutir de uma forma mais simples.

Primeiro, notamos que

$$\sigma_p = \vec{P}.\hat{n} = Pcos\theta \tag{13}$$

Portanto, o problema equivale a calcular o potencial de uma distribuição superficial de carga variando com $cos\theta$. Mas nós sabemos que, fora da superfície da esfera, como não há cargas, o potencial tem que satisfazer a Equação de Laplace,

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{14}$$



cuja solução geral em coordenadas esféricas, é

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right] P_l(cos\theta) \tag{15}$$

No entanto, como a superfície da esfera está carregada, há uma descontinuidade no campo elétrico e a solução na região interna da esfera (região I) não necessita ser a mesma da região externa (região II). Vamos então considerar primeiro a solução na região interna.

Região I $$\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_{I\,l} r^l + \frac{B_{I\,l}}{r^{l+1}} \right] P_l(cos\theta) \tag{16}$$

Mas, como o ponto $r = 0$ está na região I, para evitar potencial divergente na origem, temos que impor $B_{I\,l} = 0$, então

$$\phi_I(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l \right] P_l(cos\theta) \tag{17}$$

Região II $$\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_{II\,l} r^l + \frac{B_{II\,l}}{r^{l+1}} \right] P_l(cos\theta) \tag{18}$$

Mas, neste caso, para evitar divergência do potencial quando $r \to \infty$, temos que impor $A_{II\,l} = 0$; portanto

$$\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{B_{II\,l}}{r^{l+1}} \right] P_l(cos\theta) \tag{19}$$

Condições de Contorno

Potencial

Naturalmente, na superfície da esfera o potencial tem que ser contínuo, ou seja,

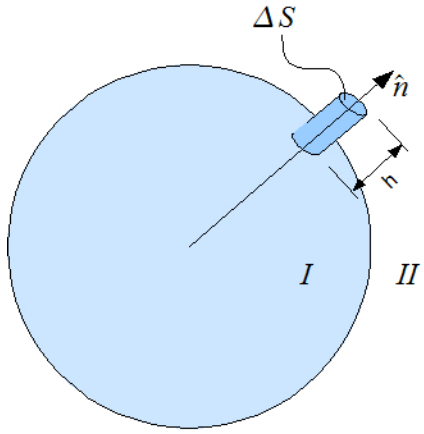
$$\sum_{l=0}^{\infty} A_{I\,l} R^l P_l(cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_{II\,l}}{R^{l+1}} P_l(cos\theta) \tag{20}$$

portanto

$$B_{II\,l} = A_{I\,l} R^{2l+1} \tag{21}$$

Campo Elétrico

Repetindo um argumento que já vimos antes, vamos considerar uma pequena superfície cilíndrica atravessando a superfície da esfera. Pela Lei de Gauss, temos



$$\oint_S \vec{E}.\hat{n}dS = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \tag{22}$$

ou seja,

$$\int_{\text{base inf.}} \vec{E}.\hat{n}\, dS + \int_{\text{sup. lat}} \vec{E}.\hat{n}\, dS + \int_{\text{base sup.}} \vec{E}.\hat{n}dS = \frac{\int \sigma_p\, dS}{\epsilon_0} \tag{23}$$

Se considerarmos ΔS bem pequeno, e levando em conta que $\hat{n} = -\hat{e}_r$ na base inferior e $\hat{n} = \hat{e}_r$ na base superior, temos

$$-E_{I\,r}\Delta S + \int_{\text{sup. lat}} \vec{E}.\hat{n}dS + E_{II\,l}\Delta S = \frac{\sigma_p \Delta S}{\epsilon_0} \tag{24}$$

onde $E_{I\,r}$ e $E_{II\,r}$ são as componentes radiais do campo elétrico, Finalmente, tomando o limite $h \to 0$, a integral na superfícies lateral se cancela e

$$E_{II\,r} - E_{I\,r} = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} \tag{25}$$

Mas

$$\begin{aligned} E_{I\,r} &= -\frac{\partial \phi_I}{\partial r} = -\sum_{l=0}^{\infty} l A_{I\,l} R^{l-1} P_l(cos\theta) \\ E_{II\,r} &= -\frac{\partial \phi_{II}}{\partial r} = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{B_{II\,l}}{R^{l+2}} P_l(cos\theta) \end{aligned} \tag{26}$$

Então

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left[l A_{I\,l} R^{l-1} + \frac{B_{II\,l}}{R^{l+2}} \right] P_l(cos\theta) = \frac{P cos\theta}{\epsilon_0} \tag{27}$$

ou, usando a relação entre $B II\, l$ e $A_{I\,l}$

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)A_{I\,1}R^{l-1}P_l(cos\theta) = \frac{P_l(cos\theta)}{\epsilon_0} \tag{28}$$

Mas polinômios de Legendre são funções ortogonais e $P_1(cos\theta) = cos\theta$. Então todos os $A_{I\,l}$ tem que ser nulas, exceto para $l = 1$ e

$$A_{I\,l} = \frac{P}{3\epsilon_0} \tag{29}$$

O potencial fica então

$$\phi(r,\theta) = \begin{cases} \frac{P}{3\epsilon_0} r cos\theta; & r \leq R \\ \\ \frac{P}{3\epsilon_0}\frac{R^3}{r^2} cos\theta; & r \geq R \end{cases} \tag{30}$$

Já o campo elétrico

$$\vec{E}(r,\theta) = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta \tag{31}$$

fica, dentro

$$\vec{E}_{\mp}(r,\theta) = -\frac{P}{3\epsilon_0}\left[cos\theta\hat{e}_r - sen\theta\hat{e}+\theta\right] = -\frac{P}{3\epsilon_0}\hat{e}_z \qquad \therefore \vec{E}_{\mp} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}, \tag{32}$$

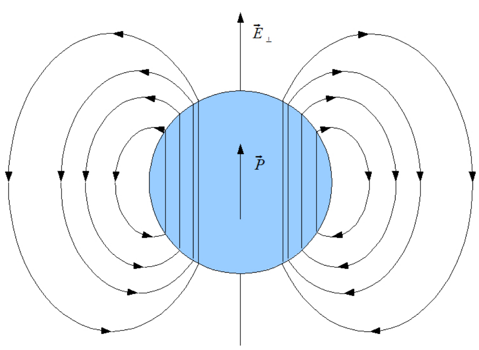
ou seja, o campo elétrico dentro da esfera é constante!

Fora da esfera o campo fica

$$\vec{E}_{II}(r,\theta) = -\frac{PR^3}{3\epsilon_0}\left[-\frac{2}{r^3}cos\theta\hat{e}_r - \frac{1}{r^3}sen\theta\hat{e}+\theta\right] \tag{33}$$

$$\therefore \vec{E}_{II}(r,\theta) = -\frac{P}{3\epsilon_0}\frac{R^3}{r^3}\left[2cos\theta\hat{e}_r + sen\theta\hat{e}+\theta\right] \tag{34}$$

que é exatamente o campo de um dipolo! Note que o sentido do campo dentro da esfera é oposto ao do campo fora da esfera, como deve ser para um dipolo.



O vetor $\vec{D}$, dentro da esfera, é então

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$
$$\therefore \vec{D} = -\frac{\vec{P}}{3} + \vec{P} \qquad \therefore \vec{D} = \frac{2}{3}\vec{P} = -2\epsilon_0\vec{E}! \tag{35}$$

Prob. 4.15: Uma esfera espessa, de raio interno a e raio externo b, é feita de um material dielétrico com uma polarização "congelada"

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{k}{r}\hat{e}_r \tag{36}$$

a) Calcule a carga de polarização e determine o campo elétrico por ela produzido, todas as regiões, usando a Lei de Gauss.

$$\sigma_p = \vec{P}.\hat{n} \qquad \therefore \qquad \sigma_p(a) = -\frac{k}{a}; \qquad \sigma_p(b) = \frac{k}{b}$$
$$\rho_p = -\nabla.\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{k}{r}\right) \qquad \therefore \qquad \rho_p = -\frac{k}{r^2}$$

$$\oint_S \vec{E}.\hat{n}dS = \frac{q_{total}}{\epsilon_0}, \qquad \therefore 4\pi r^2 E_r = \frac{q_{total}}{\epsilon_0}$$

$r < a$:

$$q_{total} = 0 \qquad \therefore \boxed{\vec{E}_{dent} = 0} \tag{37}$$

$a < r < b$:

$$q_{total} = -\frac{k}{a}4\pi a^2 + \int_0^r \frac{(-k)}{r^2}4\pi r^2 dr = -4\pi k(a + r - a) = -4\pi kr$$

$$\therefore \boxed{\vec{E} = -\frac{k}{\epsilon_0 r}\hat{e}_r} \tag{38}$$

$b < r$:

$$q_{total} = -\frac{k}{a}4\pi a^2 + \frac{k}{b}4\pi b^2 + \int_0^b \frac{(-k)}{r^2}4\pi r^2 dr = 4\pi(b - a - b + a) = 0$$

$$\boxed{\therefore \vec{E}_{fora} = 0} \tag{39}$$

b) Encontre primeiro $\vec{D}$, depois de $\vec{E}$

$$\oint_s = \vec{D}.d\vec{S} = q_{livre} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{simetria}}}{\Rightarrow} \quad \vec{D} = 0 \text{ em todo o espaço} \tag{40}$$

Portanto:

$$\vec{E}_{dentro} = 0; \quad a < r < b: \ \ \epsilon_0\vec{E} = -\vec{P} \ \ \therefore \ \ \vec{E} = -\frac{k}{\epsilon_0 r}\hat{e}_r; \ \ r > b: \ \ \vec{E} = 0 \tag{41}$$

Materiais dielétricos isotrópicos; susceptibilidade elétrica e constante dielétrica

Em geral, o grau de polarização de um meio dielétrico pode ter uma dependência complicada com o campo elétrico total. Essa dependência pode não ser linear e pode mesmo acontecer que $\vec{P}$ não tenha a mesma direção $\vec{E}$ (dielétricos anisotrópicos). A relação entre $\vec{P}$ e $\vec{E}$ em um meio material é denominada relação constitutiva do meio.

No entanto, existe um grande número de materiais, de interesse prático, para os quais $\vec{P}$ é paralelo a $\vec{E}$. Neste caso, que corresponde aos dielétricos isotrópicos, a relação entre $\vec{P}$ e $\vec{E}$ pode ser escrita como

$$\vec{P} = \epsilon_0\chi(E)\vec{E} \tag{42}$$

onde $\chi(E)$ é a susceptibilidade elétrica do material. Como indicado pela notação usada, em geral χ pode variar com a intensidade do campo elétrico.

Substituindo na expressão para $\vec{D}$, temos

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon(E)\vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r(E)\vec{E} \tag{43}$$

onde

$$\epsilon(E) \equiv \epsilon_0(1 + \chi) \tag{44}$$

é denominada Permissividade Elétrica do meio, e

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon(E)}{\epsilon_0} \tag{45}$$

é denominada Constante Dielétrica ou Permissividade Elétrica Relativa do meio.

Para campos elétricos fracos, $\chi(E)$ é praticamente constante. No entanto, à medida que o campo aumenta sua intensidade, χ passa a depender da intensidade, induzindo a respostas não lineares do meio. Na realidade, se E crescer muito, começará a arrancar os elétrons das últimas camadas atômicas, e o dielétrico pode se tornar um condutor. O campo elétrico máximo que um dielétrico pode suportar sem se romper é conhecido como rigidez dielétrica do material.

Neste curso, vamos considera somente situações em que χ é uma constante para todos materiais.

Recomendação importante sobre a solução de problemas calculando primeiro $\vec{D}$:

- Ler a seção 4.3.2 do livro texto

- Fazer com cuidado o Exemplo 4.5