Eletromagnetismo I

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2º Semestre 2014

Preparo: Diego Oliveira

Aula 6

Na aula passada derivamos a expressão do potencial produzido por uma distribuição de cargas

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d\tau' \tag{1}$$

onde a integral é feita sobre o volume que contém as cargas. O potencial foi então calculado para uma distribuição superfícial de cargas sobre uma superfície esférica.

Vamos agora fazer uma problema não trivial que permitirá ver uma aplicação ilustrativa do cálculo do campo elétrico que não poderia ser feito diretamente de forma fácil.

Prob. 2.26

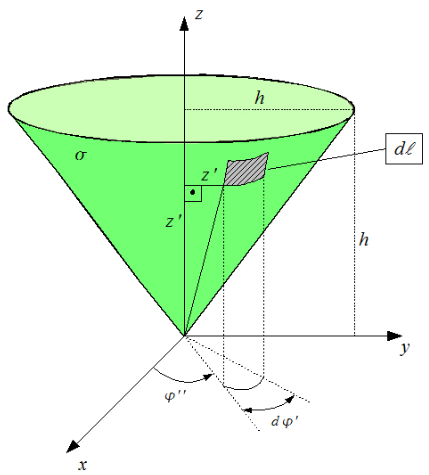
Considere uma superfície cônica de altura h e raio da base também igual a h, carregada com uma densidade de carga constante σ.

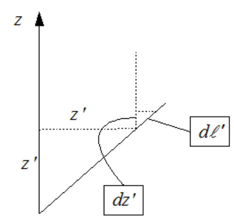
Calcule a expressão do campo elétrico e do potencial eletrostático ao longo do eixo da suferfície cônica.

Como a densidade de carga é superficial

$$\rho(\vec{r}\,')d\tau' = \sigma(\vec{r}\,')dS' = \underset{\substack{\uparrow \\ cte}}{\sigma}\, dS' \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \vec{r} &= z\hat{e}_z \\ \vec{r}\,' &= z'cos\phi'\hat{e}_x + z'sen\phi'\hat{e}_y + z\hat{e}_z \end{aligned} \tag{3}$$





$$dS' = (z'd\phi')d\ell'; \quad d\ell' = \sqrt{2}dz' \qquad \therefore dS' = \sqrt{2}z'dz'd\phi' \tag{4}$$

Das expressões de $\vec{r}$ e $\vec{r}$, temos

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = [z'^2 cos^2\phi' + z'^2 sen^2\phi' + (z-z')^2]^{\frac{1}{2}} = [z'^2 + (z-z')^2]^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore \phi(z) &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h \frac{\sqrt{2}z'dz'}{[z'^2+(z-z')^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}\epsilon_0}\int_0^h \frac{z'dz'}{[z'^2+(z-z')^2]^{\frac{1}{2}}} \\ \therefore \phi(z) &= \frac{\sigma}{\sqrt{2}\epsilon_0}\int_0^h \frac{z'dz'}{[2z'^2 - 2zz' + z^2]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \tag{6}$$

Tabela de Integrais

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{a} - \frac{b}{2a\sqrt{a}} ln|2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + 2ax + b| \tag{7}$$

No nosso caso: $a = 2$; $b = -2z$; $c = z^2$

$$\begin{aligned} &\therefore \textstyle\int_0^h \frac{z'dz'}{[2z'^2-2zz'+z^2]^{\frac{1}{2}}} = \left[\frac{\sqrt{2z^2-2zz'+z^2}}{2} + \frac{z}{2\sqrt{2}} ln[2\sqrt{2}\sqrt{2z'^2-2zz'+z^2} + 4z' - 2z]\right]_0^h = \\ &\left[\frac{\sqrt{2h^2-2hz+z^2}}{2} + \frac{z}{2\sqrt{2}} ln[2\sqrt{2}\sqrt{2h^2-2zh+z^2} + 4z' - 2z] - \frac{|z|}{2} - \frac{z}{2\sqrt{2}} ln[2\sqrt{2}|z| - 2z]\right] \end{aligned} \tag{8}$$

$$\boxed{\therefore \phi(z) = \left[\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{2}\epsilon_0}\frac{1}{2}\sqrt{2h^2-2hz+z^2} - \frac{|z|}{2} + \frac{z}{2\sqrt{2}} ln\left(\frac{2\sqrt{2}\sqrt{2h^2-2zh+z^2}+4h-2z}{2(\sqrt{2}|z|-z)}\right)\right]} \tag{9}$$

A seguir, no problema original é pedido para calcular $\phi(h) - \phi(0)$, que não é uma informação tão útil. Mais importante é utilizar esta expressão para o potencial para calcular o campo elétrico ao longo do eixo z. Sabendo que $\vec{E} = -\nabla\phi$, temos que

$$E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{10}$$

e, portanto

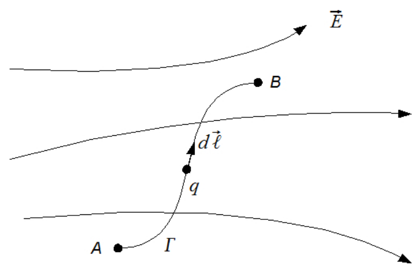
$$E_z = -\frac{\sigma}{\sqrt{2}\epsilon_0}\frac{d}{dz}\left[\frac{\sqrt{2h^2-2hz+z^2}}{2} - \frac{|z|}{2} + \frac{z}{2\sqrt{2}}\,ln(2\sqrt{2}\sqrt{2h^2-2hz+z^2}+4h-2z)\right.$$
$$\left. - \frac{z}{2\sqrt{2}}\,ln(2\sqrt{2}|z|-2z)\right] \tag{11}$$

Esta derivada é longa, mas pode ser feita sem dificuldade. Fica para os alunos a fazerem e verificarem o comportamento de E_z como função de z/h.

A expressão para o potencial pode ser obtida também para pontos fora do eixo z. No entanto, neste caso a integral só pode ser obtida em termos das integrais elípticas, que discutiremos mais tarde.

Trabalho realizado em um campo eletrostático

Suponhamos que numa região do espaço exista um campo elétrico $\vec{E}$. Qual seria o trabalho que uma força externa $\vec{F}$ teria que realizar para mover uma carga q de A até B, ao longo de uma trajetória Γ qualquer, na presença do campo? Naturalmente o trabalho seria dado por



$$W_{ext} = \int_{A,\ \Gamma}^{B} \vec{F}_{ext}.d\vec{\ell} \tag{12}$$

Se a carga for deslocada sem aceleração, em cada ponto da trajetória ela deve estar em equilíbrio, de forma que

$$\vec{F}_{ext} = -q\vec{E} \tag{13}$$

em todos os pontos da trajetória; assim

$$W_{ext} = -q\int_A^B \vec{E}.d\vec{\ell} = q\int_A^B \nabla\phi.d\vec{\ell} = q\int_A^B \frac{d\phi}{d\ell}d\ell = q\int_A^B d\phi = q[\phi(B)-\phi(A)] \tag{14}$$

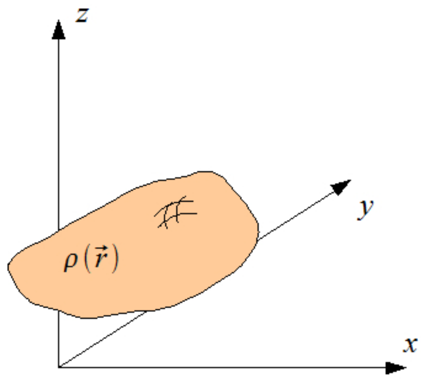
Portanto:

A diferença de potencial eletrostático entre dois pontos é igual ao trabalho por unidade de carga que uma força externa deve fazer para mover uma carga entre esses pontos.

Em geral tomamos a referência de potencial no infinito. Isto só é válido se as fontes de carga que produzem o campo forem finitas. Neste caso

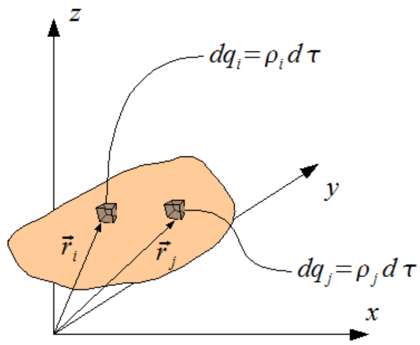
$$W = q\phi(\vec{r}) \tag{15}$$

Energia de uma distribuição de cargas



Suponhamos que tenhamos uma distribuição de cargas aglomeradas num volume V. Como cargas interagem entre sí (se forem todas do mesmo sinal se repelem), é necessário realizar trabalho para "montar" a distribuição de cargas. Este trabalho fica armazenado como energia potencial na distribuição de cargas. Se o processo físico que as mantém unidas (por exemplo, a força nuclear no núcleo) for removido, as cargas simplesmente se separam, utilizando a energia potencial armazenada, e se deslocam para o infinito.

O cálculo da energia armazenada numa dada distribuição de cargar é feito nas seções 2.4.2 e 2.4.3 do livro texto. Nós vamos fazer este cálculo usando um formalismo diferente e é útil os alunos compararem os dois métodos.



Considere a distribuição de cargas dividida em volumes elementares $d\tau'$, cada um com uma carga elementar $dq = \rho(\vec{r}\,')d\tau'$. Suponhamos um processo em que, a cada instante, seja trazida do infinito uma pequena fração $\delta\alpha$ de carga elementar que existe em cada ponto, ou seja,

$$\delta q_\alpha = \delta\alpha\rho(\vec{r}\,')d\tau' \tag{16}$$

Quando houver um fração α de todas as cargas em cada posição, o potencial por elas produzidos deve ser uma fração α do potencial final, ou seja,

$$\phi_\alpha = \alpha\phi(\vec{r}) \tag{17}$$

Para trazer a próxima fração $\delta q_\alpha = \delta\alpha\rho(\vec{r}\,')d\tau'$ ao ponto $\vec{r}\,'$, é necessário realizar um trabalho

$$\delta W = [\delta\alpha\rho(\vec{r})d\tau'][\alpha\phi(\vec{r}')] \tag{18}$$

O trabalho total pode ser então obtido integrando-se sobre todas as cargas e para α variando de 0 a 1, ou seja,

$$W = \int_0^1 \alpha d\alpha \int_V \rho(\vec{r}')\phi(\vec{r})d\tau' \qquad \therefore \boxed{W = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r}')\phi(\vec{r}')d\tau'} \tag{19}$$

Se, ao invés de uma distribuição volumétrica contínua de cargas, tivermos N cargas discretas localizadas nas posições $\vec{r}_i; i = 1, \ldots, N$ podemos representa-las como

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \tag{20}$$

então a expressão para a energia armazenada fica

$$\begin{aligned} W =& \frac{1}{2}\sum_i q_i \int [\delta(\vec{r} - \vec{r}_i)]\phi(\vec{r})d\tau = \frac{1}{2}\sum_i q_i \phi(\vec{r}_i) \\ W =& \frac{1}{2}\sum_i q_i \phi(\vec{r}_i) \end{aligned} \tag{21}$$

que corresponde à expressão 2.42 derivada na seção 2.4.2 do livro texto.

A expressão para a energia de uma distribuição de cargas pode ser escrita de forma ainda mais conveniente como energia armazenada no campo elétrico. Retornando à expressão geral

$$W = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\phi(\vec{r})d\tau \tag{22}$$

e utilizando a primeira equação de Maxwell, $\nabla.\vec{E} = \rho/\epsilon_0$, temos

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int (\nabla.\vec{E})\phi d\tau \tag{23}$$

Mas, utilizando a identidade vetorial $\nabla(g\vec{f}) = \nabla g.\vec{f} + g\nabla.\vec{f}$, onde g é uma função escalar e $\vec{f}$ uma função vetorial, podemos escrever

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\left[\int \nabla.(\phi\vec{E})d\tau - \int \nabla\phi.\vec{E}d\tau\right] \tag{24}$$

Mas $\nabla\phi = -\vec{E}$ e, utilizando o *Teorema de Gauss*, a primeira integral pode ser escrita em uma integral de superfície, ou seja,

$$W = \int_V \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2}\right) d\tau + \int_S \phi \vec{E}.\hat{n} d\tau \tag{25}$$

Para situações em que as cargas estão limitadas a uma região finita do espaço, podemos tomar para S uma superfície esférica de raio $R \to \infty$. Muito distante das cargas, o campo se comporta como o de uma carga pontual, ou seja

$$R \to \infty \Rightarrow \quad \left. \begin{array}{r} \phi \propto \frac{1}{R} \\ \\ E \propto \frac{1}{R^2} \end{array} \right| \quad \therefore \int \phi \vec{E}.\hat{n} dS = \int \phi E_R R^2 sen\theta \, d\theta d\phi \propto \frac{1}{R} \to 0 \tag{26}$$

Nesta situação a energia armazenada em uma distribuição de cargas pode ser expressa como

$$\boxed{W = \int_V \left[\frac{\epsilon_0 E^2(\vec{r})}{2}\right] d\tau} \tag{27}$$

É importante chamar a atenção para o detalhe importante que, quando utilizamos esta forma de presentar a energia armazenada, a integral é sobre todo o espaço. Já quando utilizamos a expressão.

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d\tau \tag{28}$$

a integral naturalmente é somente sobre o volume onde $\rho(\vec{r}) \neq 0$, porque fora dela se cancela. Qual expressão é melhor utilizar dependerá do problema, mas ambas são equivalentes.

Densidade de Energia no Campo Elétrico

Como a energia produzida por uma configuração de cargas pode ser expressa em termos do campo elétrico por ela produzido,

$$W = \int \left[\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right] d\tau \tag{29}$$

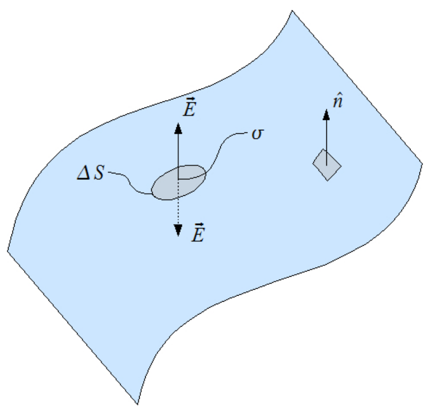
onde a integral de volume é sobre todo o espaço, podemos dizer que o campo tem uma densidade volumétrica de energia a ele associada dada por

$$w = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \tag{30}$$

É interessante notar que energia por unidade de volume tem dimessão de pressão; de fato

$$[w] = \frac{J}{m^3} = \frac{N.m}{m^3} = \frac{N}{m^2} \tag{31}$$

Assim podemos afirmar que o campo elétrico exerce uma pressão dada por $p = \epsilon_0 E^2/2$. Este resultado será discutido de forma rigorosa mais tarde, neste curso. No entanto, podemos mostrar que é válido para o campo elétrico na superfície de uma condutor utilizando o argumento qualitativo discutido na seção 2.5.3 do livro texto.



Consideremos uma superfície qualquer (não precisa ser plana) com uma distribuição superficial de cargas σ. Vamos calcular a força que atua em uma seção muito pequena desta superfície de área ΔS. Suponhamos que ela seja tão pequena que possa ser considerada plana e $\sigma = cte$ sobre ela. Então sabemos que o campo por ela produzido tem módulo $\epsilon_0\sigma/2$, apontando em direções opostas dos dois çadps da superfície.

A força que vai atuar nesta pequena seção de superfície naturalmente tem que ser o produto $\Delta S \sigma \vec{E}_{outra}$, onde $\vec{E}_{outra}$ é o campo produzido por todas as outras cargas que estão na superfície, já que a carga no elemento considerado não pode atuar nela mesma. Como o campo muda de sentido ao cruzar a placa, podemos escrever

$$\vec{E}_{cima} = \vec{E}_{outra} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n}$$

$$\vec{E}_{baixo} = \vec{E}_{outra} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n} \tag{32}$$

$$\therefore (\vec{E}_{cima} + \vec{E}_{baixo}) = 2\vec{E}_{outra} \qquad \therefore \vec{E}_{outra} = \frac{1}{2}(\vec{E}_{acima} + \vec{E}_{baixo})$$

e a força por unidade de área na superfície será

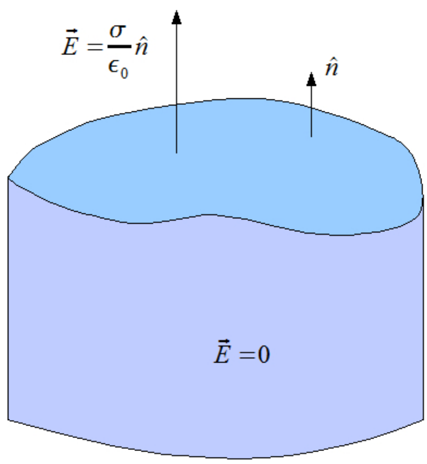
$$\frac{\vec{F}}{\Delta S} = \sigma\frac{1}{2}(\vec{E}_{acima} + \vec{E}_{baixo}) = \sigma\vec{E}_{médio} \tag{33}$$

ou seja, quando o campo em uma superfície é descontínuo, devido a cargas superficias nela, para calcular a força utilizaremos o campo médio entre os valores acima e abaixo da superfície.

Como, no caso de um condutor perfeito, o campo dentro do condutor é nulo e na superfície externa é σ/ϵ_0, temos $\vec{E}_{mdio} = \sigma/2\epsilon_0\ \hat{n}$

$$\frac{\vec{F}}{\Delta S} = \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2}\right)\hat{n} \tag{34}$$

portanto a pressão é dado por $p = \epsilon_0 E^2/2$.



Como aplicação deste resultado, vamos resoltever o Prob. 2.38 pág. 103 do livro texto:

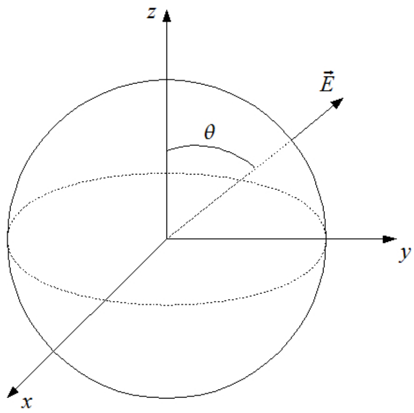
P.2.38: Uma esfera metálica de raio R tem carga total Q. Qual é a força de repulsão entre os hemisférios "norte" e "sul" da esfera?

Utilizando a *Lei de Gauss*, sabemos que o campo na superfície da esfera é equivalente a considerar a carga total na origem,

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\hat{e}_r \tag{35}$$

Portanto a força <u>por unidade de área</u> será

$$\vec{f} = \frac{Q^2}{2 \times 16\pi^2\epsilon_0 R^4}\hat{e}_r \tag{36}$$



Mas esta força é radial e, para separar ps dois hemisférios, é a força na direção z que importa; portanto

$$f_z = \frac{Q^2}{2 \times 16\pi^2\epsilon_0 R^4} cos(\theta) \tag{37}$$

Integrando sobre o hemisfério superior, temos

$$F_z = \frac{Q^2}{2 \times 16\pi^2\epsilon_0 R^4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} R^2 cos\,\theta\, sen\,\theta\, d\theta d\rho = \frac{Q^2}{2 \times 16\pi^2\epsilon_0 R^2} \times \pi \tag{38}$$

$$\therefore \boxed{F_z = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R^2}} \tag{39}$$