Instituto de Física USP

Física Moderna Aula 25

Professora: Mazé Bechara

Aula 25 – A equação de Schroedinger para estados estacionários ligados. Aplicação no movimento unidimensional.

1. **Aplicação 2: os auto estados de energia de uma partícula na “caixa” ou no ”poço” de potencial unidimensional (continuação):**
   1. As equações e as soluções (matemáticas) das auto-funções de energia dos estados ligados na mecânica de Schroedinger. As condições impostas pelo significado físico das funções de onda e as soluções físicas. A densidade de probabilidade e as posições possíveis para a partícula segundo a mecânica de Schroedinger - o efeito de “penetração na parede”.
   2. A aproximação para o **potencial infinito** (potencial muito maior do que as energias): as auto-funções “matando” a “penetração na parede”. A validade do princípio de incerteza.
   3. Os auto-valores das energias. Comparação com onda de de Broglie. A validade do princípio de complementaridade.

2. **Discussão da 2ª prova e apresentação dos critérios de correção.**

A equação de Schroedinger independente do tempo e os estados estacionários

$$\{-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + U(\vec{r})\}\varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r})$$

$$\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + U(x)\}\varphi(x) = E\varphi(x)$$

$$\{ih\frac{d}{dt}\}T(t) = ET(t)$$

$$\frac{dT}{T} = -i\frac{E}{\hbar}dt \rightarrow \int_{T_o}^{T}\frac{dT}{T} = \int_{0}^{t} -i\frac{E}{\hbar}dt \rightarrow T(t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

"Poço" de potencial finito unidimensional

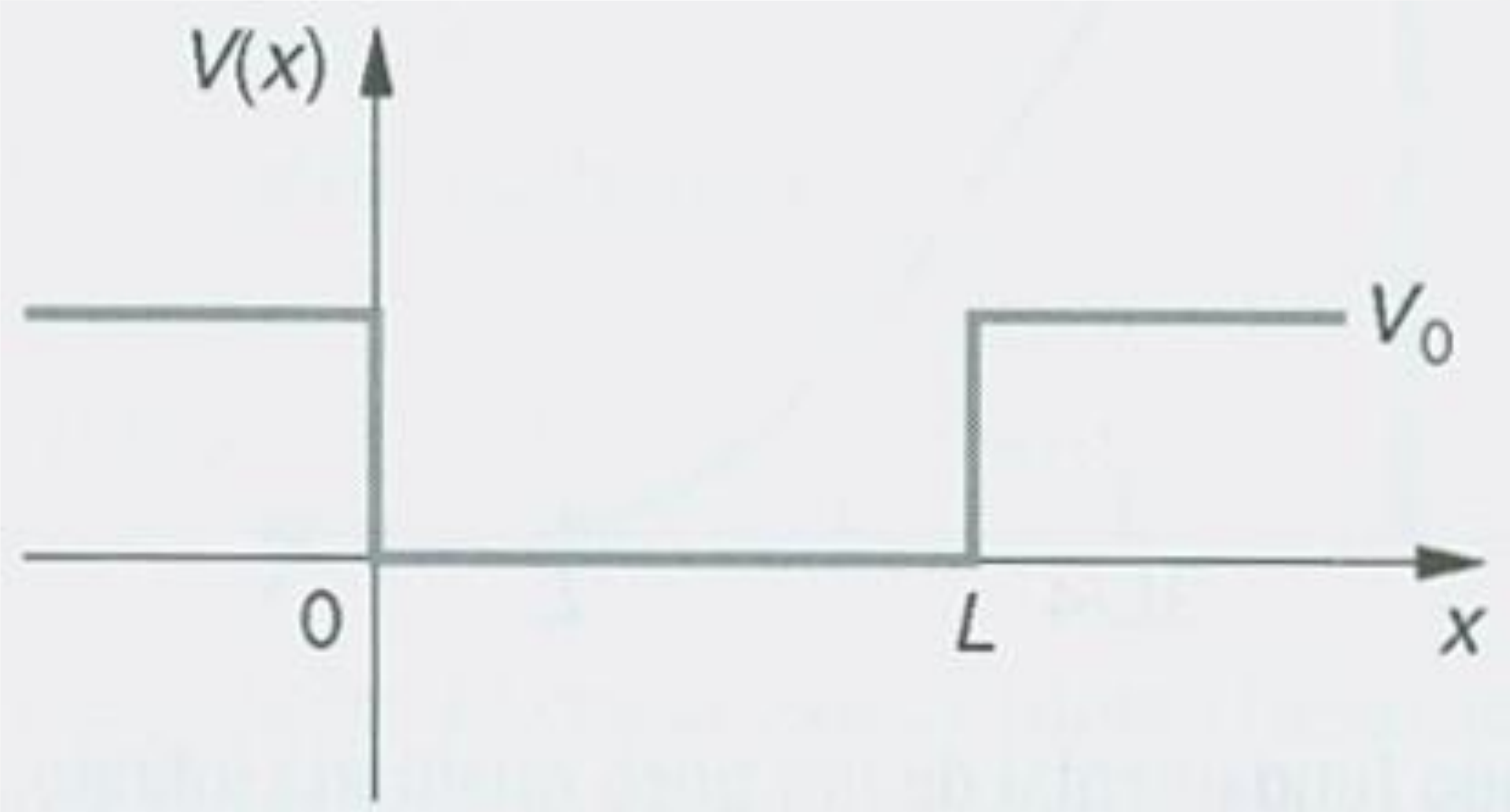


Figura do Modern Physics for Scientists and Engineers – S. Thornton, A. Rex

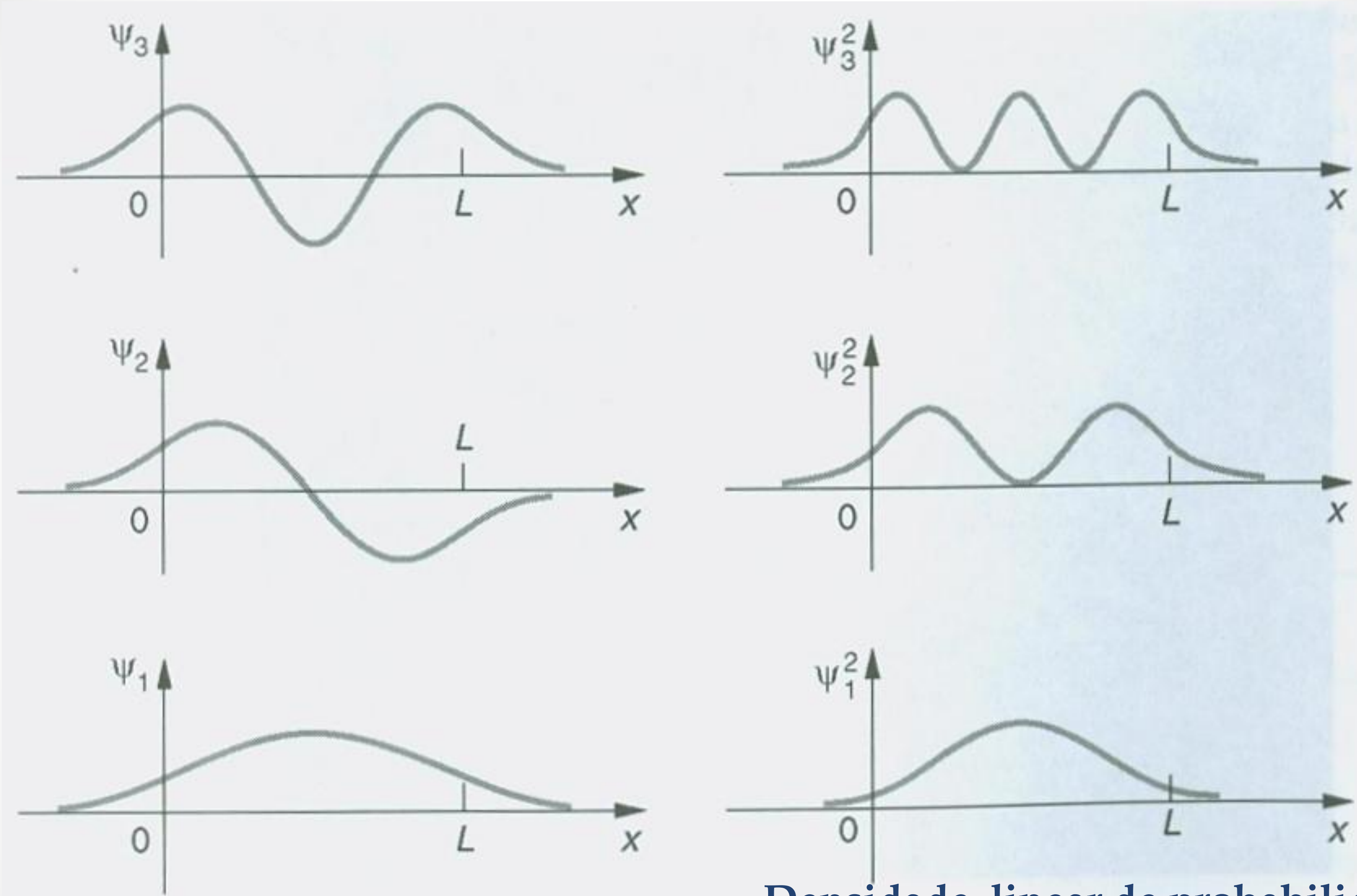
Física Clássica → Quântica

- **Para $T=E-V(x)>0$ → $E>V(x)$ para todo x**
- **$0<E<V_o$**
- Física Clássica: $0<x<L$ → trajetórias finitas
    - **Quântica: estados ligados → posições possíveis:** $|\Psi(\vec{r},t)|^2$.

    - **$E>V_o$**
- Física Clássica: $-\infty<x<+\infty$ → trajetórias infinitas

- **Quântica: estados não ligados (ou de espalhamento no caso geral que é de transmissão e reflexão no caso unidimensional) → posições possíveis:** $|\Psi(\vec{r},t)|^2$.

Estados de E=cte do "poço" de potencial finito unidimensional



- Funções de onda

Densidade linear de probabilidade

Equações, soluções e interpretações em aula

- Figura do Modern Physics for Scientists and Engineers – S. Thornton, A. Rex

Características

Funções de onda e densidades de probabilidades:

1. oscilações na região do centro do potencial e tendendo a zero quando $x \to \infty$
2. **Normalizáveis**
3. **Probabilidades não nulas** em regiões classicamente proibidas, que no caso da "caixa" de potencial, significa que passou pela "parede".
4. **As condições de continuidade mais a normalização** vão restringir os valores de **energia: AGUARDEM!**

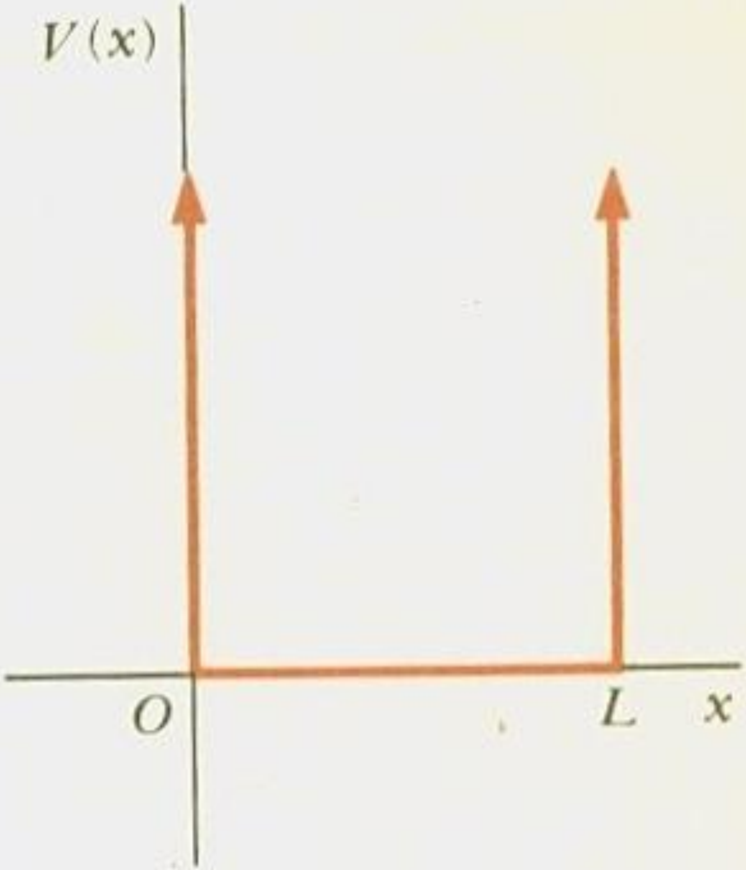


Fig. 6.1 Energia potencial de poço quadrado infinito. Para $0 < x < L$, a energia potencial $V(x)$ é nula. Fora dessa região, $V(x)$ é infinita. A partícula está confinada à região no poço $0 < x < L$.

Figura do Tipler & Llewellyn

“Poço” de potencial infinito unidimensional

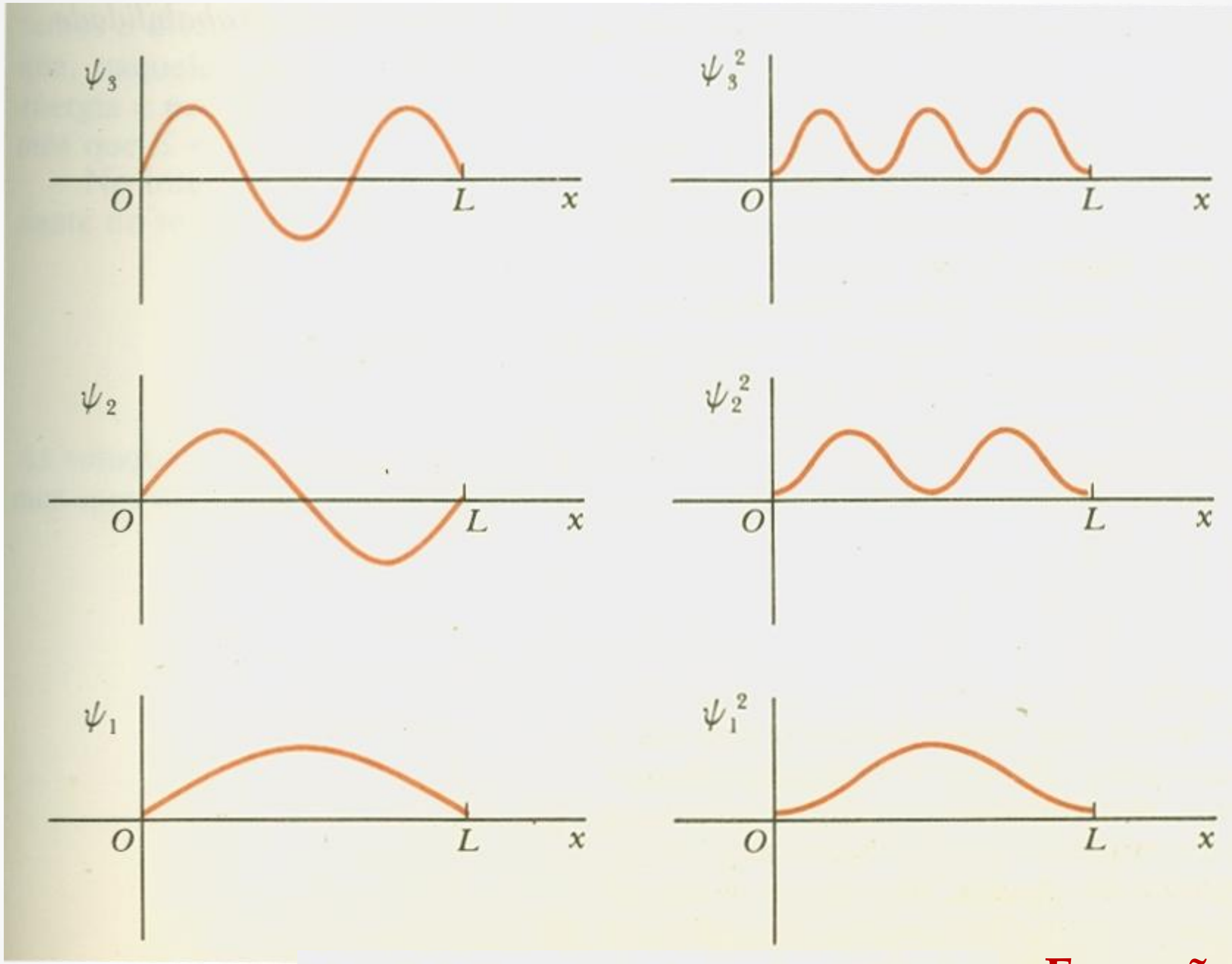
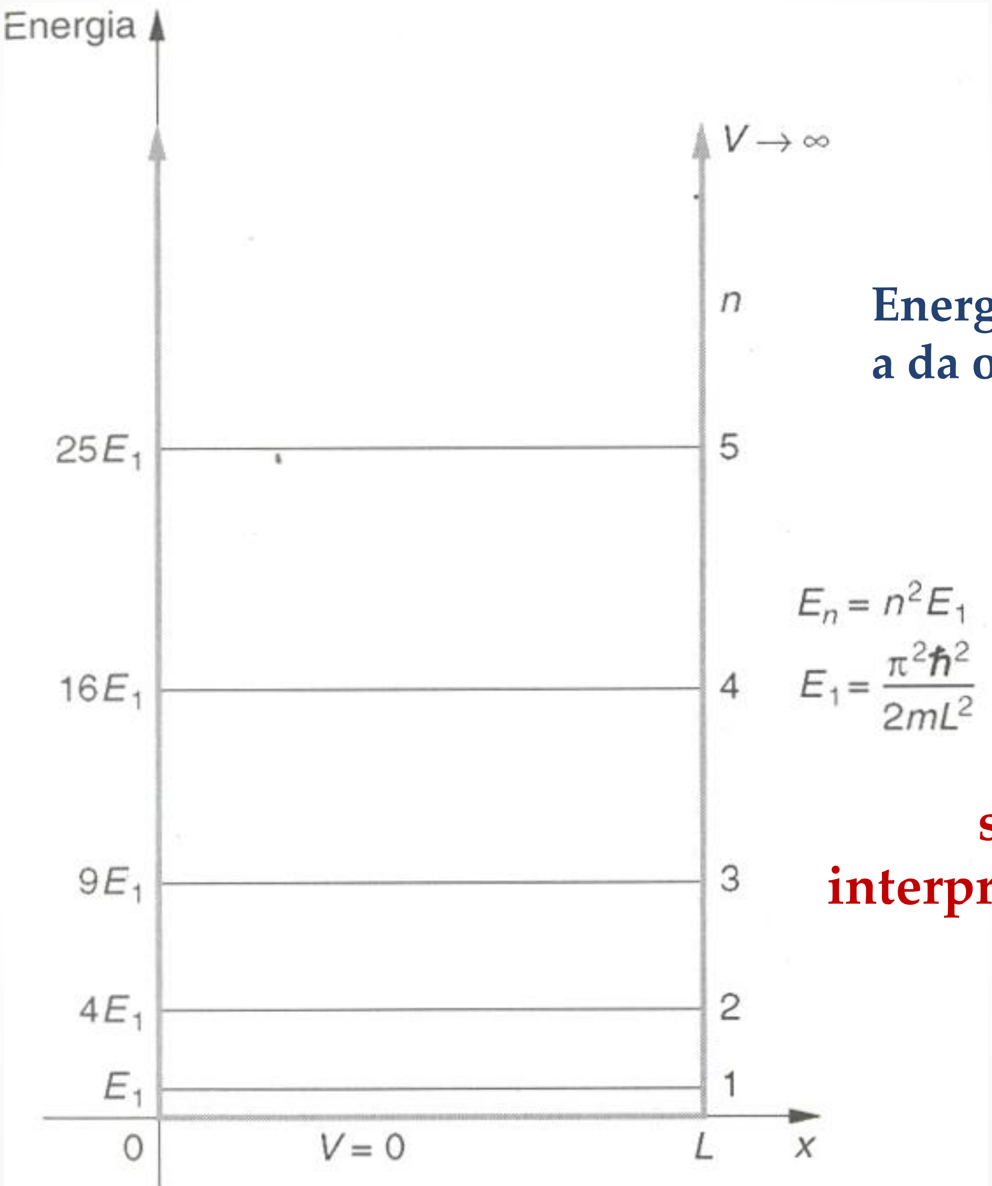


Fig. 6.3 Funções de onda $\psi_n(x)$ e densidades de probabilidade $P_n(x) = \psi_n^2(x)$ para $n = 1, 2$ e 3 para o potencial de poço quadrado infinito.

Equações, soluções e interpretações em aula

Figura do Tipler & Llewellyn

Energias do “poço” de potencial infinito



Energia coincidente com a da onda de de Broglie

soluções e interpretações em aula

Figura do Tipler & Llewellyn

Questão 1 da prova 2

(0,5) (a) (0,25) pelo esquema do vetores dos momentos lineares (iguais em módulo e direção e sentidos opostos) do elétron e pósítron antes da aniquilação **(veja solução na aula)**

(0,25) pelo esquema do vetores dos momentos lineares em qualquer outra direção, desde que ambos os vetores estejam com mesmo módulo e sentidos opostos **(veja solução na aula)**.

(1,0) (b) Da conservação de energia :

$$E = 2\mathrm{m_o}c^2 + 2\mathrm{T} = 1{,}022 + 0{,}88 = 1{,}822\,\mathrm{MeV} = \varepsilon_{\mathrm{f1}} + \varepsilon_{\mathrm{f2}}$$

Da conservação de energia:

$$\vec{\mathrm{p}}_{e+} + \vec{\mathrm{p}}_{e-} = \vec{\mathrm{p}}_{\mathrm{f1}} + \vec{\mathrm{p}}_{f2} = 0 \quad \Rightarrow \vec{\mathrm{p}}_{\mathrm{f1}} = -\vec{\mathrm{p}}_{f2} \quad \text{e como } \varepsilon_{\mathrm{f}} = p_f c \quad \Rightarrow \varepsilon_{\mathrm{f1}} = \varepsilon_{\mathrm{f2}} = \frac{1{,}822}{2} = 0{,}911\,MeV$$

Questão 2 da prova 2

(1,0) (a) **0,1** por cada item pedido: trajetórias, parâmetros de impacto, ângulos de espalhamento, distância de máxima aproximação corretas qualitativamente (maior distância para menor ângulo) e **0,05** por cada **vetor** velocidade da alfa incidente (iguais!) e na entrada de cada detector, com a observação de que os módulos são iguais a de incidência. **(veja solução na aula)**

(0,75) (b) Para espalhamento na mesma folha, detectado no mesmo sistema, com feixe de mesma intensidade, mas com energia diferente, pode-se escrever:

$$\frac{\dfrac{dN(60^o,8MeV)}{dt}}{\dfrac{dN(60^o,10MeV)}{dt}} = \frac{\dfrac{d\sigma(\alpha,Cu,60^o,8MeV)}{d\Omega}\mathrm{I_o N_n \Delta\Omega_{det}}}{\dfrac{d\sigma(\alpha,Cu,60^o,10MeV)}{d\Omega}\mathrm{I_o N_n \Delta\Omega_{det}}} = \frac{10^2}{8^2} = 1{,}56$$

$$\frac{dN(60^o,8MeV)}{dt} = 15\times 1{,}56 = 23{,}4\, part/dt$$

Questão 2 da prova 2

(0,75) (c) **(0,55)** Vale Rutherford para todos os ângulos com energias até 16MeV. Como a 180graus se tem a menor distância entre a alfa e o núcleo de cobre, a máxima aproximação (mínima distância) sem que as partículas se interpenetrem é :

$$r_{\min}(180^o, 16MeV) = \frac{2\times 29\times(1{,}6\times 10^{-19})^2\, 9\times 10^9\ Jm}{16\times 10^6\times 1{,}6\times 10^{-19}\ J} = 5{,}22\times 10^{-15} m$$

(0,20) Como supostamente as duas esferas: alfa (núcleo de He) e núcleo de cobre se tocam nessa condição, e como os núcleos têm a mesma ordem de grandeza, esta distância é igual a duas vezes o raio nuclear:

$$r_{NCu} \sim 2{,}5\times 10^{-15} m = 2{,}5\, fm$$

Questão 3 da prova 2

(0,75) (a) (0,25) O fóton só será absorvido se a sua energia for igual à diferença entre o estado do Hidrogênio com n=1 e outro estado com n inteiro:

$$-13{,}60+12{,}75=-\frac{13{,}60}{n^2} \qquad n^2=\frac{13{,}60}{0{,}85}=16$$

(0,20) O fóton é absorvido, e a energia de excitação é igual a energia do fóton: 12,75eV

(0,20) O estado atômico é o de n=4 e portanto a energia do estado atômico é de -0,85eV (n=4).

(0,10) O momento angular deste estado atômico é $4\hbar$

Na verdade a amostra continua com átomos no estado fundamental mais átomos no estado atômico com as características acima (n=4)

Questão 3 da prova 2

(1,0) (b) **Solução na aula. 0,4** pelas energias, momentos angulares e n corretos. **(0,1)** por cada diferente transição.

(1,0) (c) **(0,25)** A transição que emite o fóton de menor energia é a do estado n=4 para n=3, o que significa, é um fóton com a diferença entre as energias atômicas de cada estado: ε_f =-0,85-(-1,51)=0,66eV

(0,25) Sim há conservação de energia. Nela desprezamos a energia de recuo do átomo, ou seja, do seu centro de massa (discutido a seguir) (perdeu **0,10** se não mencionou a energia desprezada)

(0,25) O momento linear do fóton é: $p_f = \varepsilon f/c$=0,66eV/c

(0,25) Sim há conservação do momento linear no decaimento. O momento linear é vetorialmente nulo antes da transição, e portanto o centro de massa do átomo deve ter um momento linear igual ao do fóton em módulo e direção e sentido contrário, uma vez que cada um dos estados n=4 e n=3 estão definidos pelo movimento relativo específico conforme o modelo. Este recuo tem energia cinética desprezível dada a massa do átomo.

Questão 4 da prova 2

(0,75) (a) Poderia calcular a partir da igualdade de força centrípeta com eletrostática + a quantização do momento angular da hipótese de Bohr.

Ou simplesmente lembrar que no movimento relativo a massa é a massa reduzida que no caso do átomo positrônico é de:

$$\mu = \frac{m_e m_2}{m_e + m_e} = \frac{m_e}{2}$$

E usando o raio de Bohr do formulário concluir que é o dobro do raio de Bohr (substitui a massa do elétron por metade da massa do elétron):

$$r_{Bohr} = \frac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_o}{e^2 m_e} = 0{,}529\,\overset{o}{A}$$

O que resulta em 1,058angstrons, ou seja, o dobro do raio do átomo do hidrogênio no estado fundamental.

Questão 4 da prova 2

(0,75) (b) Usando a expressão de energia do formulário, substituir a massa do elétron pela massa reduzida:

$$E_1^{Bohr} = -\left(\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{\mu}{2\hbar^2}\frac{1}{1^2} = -\frac{1}{2}13{,}60 = -6{,}8eV$$

Ou seja, a energia do único e instável estado do átomo positrônico <u>é metade da energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio</u>

Questão 5 da prova 2

(1,0) (a) Se neutron **(0,25)** e fóton **(0,25)** tem o mesmo momento linear, a relação com o comprimento de onda é a mesma para fótons e partículas materiais:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{pc} = \frac{12408 \times 10^{-10} eVm}{60 \times 10^{6} eV} = 2{,}07 \times 10^{-14} m$$

(0,25) A frequencia do fóton é :

$$\nu_f = \frac{\varepsilon_f}{h} = \frac{p_f c}{h} = 60 \frac{Mev}{h} = 1{,}45 \times 10^{22} Hz$$

(0,25) Já para a partícula com velocidade não relativística:

$$\nu_n = \frac{\varepsilon_n}{h} = \frac{p^2}{2m_{on} h} = \frac{p^2 c^2}{2m_{on} c^2 h} = \frac{60^2}{2 \times 998h} = 1{,}803 \frac{MeV}{h} = 4{,}35 \times 10^{20} Hz$$

Questão 5 da prova 2

(0,75) (b) A proposta de de Broglie é de ondas estacionárias "ao redor" da trajetória retilínea de comprimento2 r_N

Condição de onda estacionário mais a relação de de Broglie:

$$2r_N = \frac{n}{2}\lambda = \frac{nh}{2p}$$

(0,25) ou:

$$p = \frac{nh}{4r_N}$$

(1,0)(c) A energia do nêutron seria então quantizada:

$$E_n = \frac{p^2}{2m_n} = n^2 \frac{h^2}{32 m_n r_N^2} = n^2 E_1$$

O princípio de correspondência para a energia diz que para n grande (tendendo a infinito) a energia deve coincidir com o resultado clássico no qual a energia não é quantizada

Questão 5 da prova 2

(c) continuação

Portanto **(0,35)**

$$\frac{\Delta E}{E_n} == \frac{n^2 - (n-\Delta n)^2}{n^2}\frac{E_1}{E_1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n\Delta n}{n^2} \to 0\, pois \Delta n << n$$