LABORATÓRIO E APLICAÇÕES DA MECÂNICA DOS FLUIDOS (PME 3332)
Gabarito Prova de Recuperação - 2016

1ª Questão (3,0 puntos) Uma bomba centrífuga operando com água (massa específica ρ_w) e com uma rotação N_w tem a seguinte curva de potência mecânica no eixo W_w:

$$W_w = A_w + B_w Q_w$$

onde A_w e B_w são constantes dimensionais de ajuste e Q_w é a vazão volumétrica de água.

a) Encontrar os parâmetros adimensionais dos quais depende o problema, supondo que as variáveis envolvidas são a potência W, vazão Q, massa específica ρ, diâmetro D e rotação N. (0,5 pontos)

b) Demonstrar que uma bomba geometricamente semelhante com $k_D = \dfrac{D_o}{D_w}$ conhecido que utilizará óleo (massa específica ρ_o) e terá uma rotação N_o possui uma curva de altura de de potência mecânica no eixo W_w da forma:

$$W_o = A_o + B_o Q_o$$

onde Q_o é a vazão volumétrica de óleo. Supondo que, como estabelecido no item anterior, a viscosidade dinâmica não seja uma variável do problema, determinar as constantes A_o e B_o em função dos fatores de escala das diferentes variáveis $k_\varphi = \dfrac{\varphi_o}{\varphi_w}$. (1 ponto)

c) Determinar os fatores de escala de pressão $k_{\Delta P} = \dfrac{\Delta P_o}{\Delta P_w}$ e de torque no eixo $k_T = \dfrac{T_o}{T_w}$. (0,5 pontos)

d) Supondo que para a bomba com água a vazão para o ponto de melhor eficiência (*bep* ou *best efficiency point*) resulta $(Q_w)_{bep}$, achar a vazão $(Q_o)_{bep}$ para o *bep* correspondente à bomba com óleo. (0,5 pontos)

e) A hipótese de independência da viscosidade, realizada nos pontos anteriores, é válida para altos números de Reynolds. Para baixos Reynolds, a viscosidade deve ser acrescentada como variável envolvida na descrição do problema. Neste caso, é possível escolher de maneira independente a rotação e o diâmetro na bomba de óleo? Por quê? (0,5 pontos)

Solução:

a) Por análise dimensional (ou aplicando o teorema Pi, ou da experiência de bombas), considerando que μ (ou seja o número de Reynolds) não é uma variável do problema, resulta $C_W = C_W(C_Q)$, onde:

$$C_W = \frac{W}{\rho N^3 D^5} \qquad \text{(coeficiente de potência)}$$

$$C_Q = \frac{Q}{N D^3} \qquad \text{(coeficiente de vazão)}$$

b) Da igualdade dos números adimensionais para as bombas com água e óleo:

$$\frac{W_w}{\rho_w N_w^3 D_w^5} = \frac{W_o}{\rho_o N_o^3 D_o^5} \quad \Rightarrow \quad W_w = W_o \left(\frac{\rho_o}{\rho_w}\right)^{-1} \left(\frac{N_o}{N_w}\right)^{-3} \left(\frac{D_o}{D_w}\right)^{-5} = W_o\, k_\rho^{-1}\, k_N^{-3}\, k_D^{-5}$$

$$\frac{Q_w}{N_w D_w^3} = \frac{Q_o}{N_o D_o^3} \quad \Rightarrow \quad Q_w = Q_o \left(\frac{N_o}{N_w}\right)^{-1} \left(\frac{D_o}{D_w}\right)^{-3} = Q_o\, k_N^{-1}\, k_D^{-3}$$

onde $k_N = \dfrac{N_o}{N_a}$ e $k_D = \dfrac{D_o}{D_a}$. Substituindo na curva da bomba de água, resulta:

$$W_o\, k_\rho^{-1}\, k_N^{-3}\, k_D^{-5} = A_w + B_w Q_o\, k_N^{-1}\, k_D^{-3} \quad \Rightarrow \quad W_o = k_\rho\, k_N^3\, k_D^5\, A_w + k_\rho\, k_N^2\, k_D^2\, B_w Q_o^2$$

Comparando com a curva característica da bomba de óleo, resultam: $A_o = k_\rho\, k_N^3\, k_D^5\, A_w$ e $B_o = k_\rho\, k_N^2\, k_D^2\, B_w$.

c) Os incrementos de pressão se adimensionalizam como $\dfrac{\Delta p}{\rho N^2 D^2}$, resultando:

$$\frac{\Delta P_w}{\rho_w N_w^2 D_w^2} = \frac{\Delta P_o}{\rho_o N_o^2 D_o^2} \quad \Rightarrow \quad k_{\Delta P} = \frac{\Delta P_o}{\Delta P_a} = k_\rho \, k_N^2 \, k_D^2$$

onde $k_\rho = \dfrac{\rho_o}{\rho_a}$. Os torques se adimensionaliza como $\dfrac{T}{\rho N^2 D^5}$, resultando:

$$\frac{T_w}{\rho_w N_w^2 D_w^5} = \frac{T_o}{\rho_o N_o^2 D_o^5} \quad \Rightarrow \quad k_T = \frac{T_o}{T_w} = k_\rho \, k_N^2 \, k_D^5$$

d) Da igualdade do coeficiente de vazão para a *bep*, resulta:

$$\frac{(Q_w)_{bep}}{N_w D_w^3} = \frac{(Q_o)_{bep}}{N_o D_o^3} \quad \Rightarrow \quad (Q_o)_{bep} = k_N \, k_D^3 \, (Q_w)_{bep}$$

e) Se a viscosidade é acrescentada como variável envolvida na descrição do problema, não é possível escolher de maneira independente a rotação e o diâmetro na bomba de óleo, pois deve ser satisfeita a igualdade de número de Reynolds $\dfrac{\rho N D^2}{\mu}$ para modelo e protótipo:

$$\frac{\rho_w N_w D_w^2}{\mu_w} = \frac{\rho_o N_o D_o^2}{\mu_o} \quad \Rightarrow \quad k_\rho \, k_N \, k_D^2 \, k_\mu^{-1} = 1$$

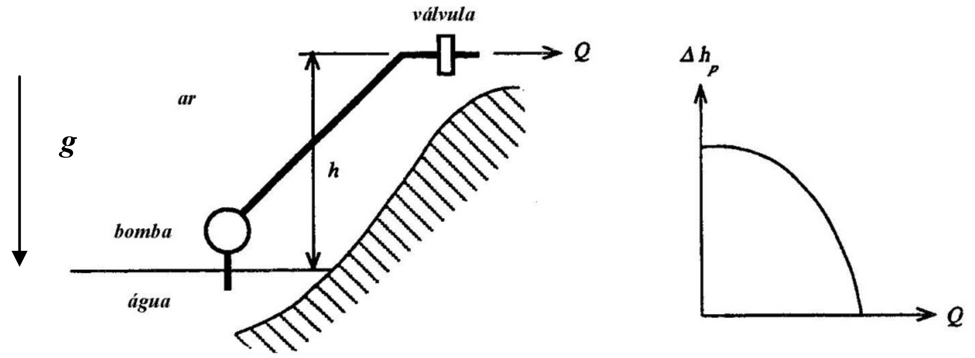
2ª Questão (2,0 puntos) Uma bomba fornece água (de massa específica ρ) com uma vazão volumétrica Q à atmosfera, através de um conduto de diâmetro D e comprimento total L com uma válvula parcialmente aberta de constante de perda K_v na saída, como mostra a figura. A saída está localizada a uma altura h acima da superfície do reservatório de onde é extraída a água. A altura de carga da bomba Δh_p está relacionada com a vazão como segue:

$$\Delta h_p = A - B Q^2$$

onde A e B são constantes dimensionais. A eficiência da bomba η_p é independente da vazão. O número de Reynolds na tubulação é suficientemente grande como para que o fator de atrito f seja constante. Nestas condições, deduzir uma expressão para a vazão volumétrica em regime permanente Q e a potência de bombeamento W_p em função dos parâmetros ρ, A, B, D, f, L, aceleração gravitacional g, h, e K_v.

Conservação da energia: $H_{E1} + H_{maq} = H_{E2} + \sum \Delta H_{perdas}$; Altura de energia: $H = \dfrac{p}{\rho g} + \dfrac{V^2}{2g} + z$;

Perda distribuída: $\Delta h_d = f \dfrac{L}{D}\dfrac{V^2}{2g}$; Perda singular: $\Delta h_S = K \dfrac{V^2}{2g}$; Potência no eixo: $W_P = \dfrac{\rho g Q \Delta h_P}{\eta_P}$



Solução:
Se 1 é o ponto no espelho de água e 2 é o ponto na saída (a jusante da válvula), da conservação da altura de energia, temos:

$$H_{E1} - H_{E2} = -\Delta h_p + \left(K_v + f\frac{L}{D}\right)\frac{V^2}{2g} \tag{1}$$

Considerando a pressão atmosférica e a cota do espelho de água como referências, resultam:

$$H_{E1} = 0 \tag{2}$$

$$H_{E2} = \frac{V^2}{2g} + h \tag{3}$$

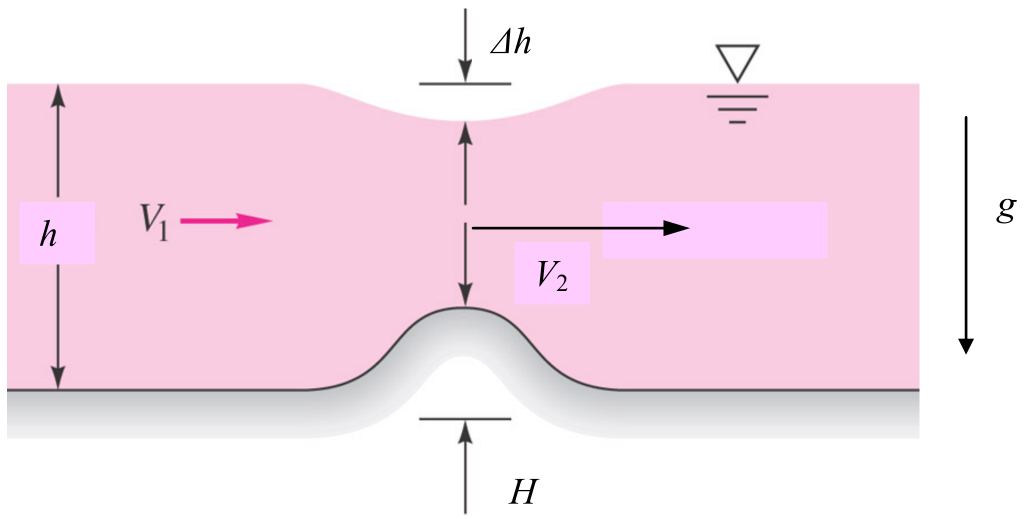
Substituindo (2), (3) e a curva característica da bomba em (1) e considerando que $V = \dfrac{Q}{S}$, onde $S = \pi \dfrac{D^2}{4}$ é a área de passagem do duto, resulta finalmente:

$$\left(B + \frac{1 + K_v + f \dfrac{L}{D}}{2 g S^2} \right) Q^2 - (A - h) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = \left(\frac{A - h}{B + \dfrac{1 + K_v + f \dfrac{L}{D}}{2 g S^2}} \right)^{1/2} = \left[\frac{A - h}{B + \dfrac{8\left(1 + K_v + f \dfrac{L}{D}\right)}{\pi^2 g D^4}} \right]^{1/2} \tag{4}$$

A potência de bombeamento resulta:

$$W_p = \frac{\rho g \Delta h_p Q}{\eta_p} = \frac{\rho g \left(A - B Q^2\right) Q}{\eta_p} \tag{5}$$

3ª Questão (2,0 puntos) Se a velocidade de aproximação não for alta demais, uma saliência de altura H no fundo de um canal de água bi-dimensional de espessura h causará um afundamento Δh do nìvel da água, que pode servir para a medição da vazão Q por unidade de comprimento na direção normal ao papel. Desprezando as perdas e supondo uma velocidade uniforme na seção de passagem, determinar as velocidades V_1, V_2 e a vazão Q em função das variáveis anteriores e da aceleração gravitacional g.
Dica: a superfície livre de água está a pressão atmosférica.



Eq. de Bernoulli em uma linha de corrente, incompressível e permanente: $p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = \text{cte}$

Conservação de massa, permanente: $0 = \int_A \rho (\boldsymbol{V} . \breve{\boldsymbol{n}}) dA$

(Adaptado de *Mecânica dos Fluidos*, F. M. White, McGraw-Hill, 2011)

Solução:
Da equação de continuidade entre as seções 1 e 2, resulta:

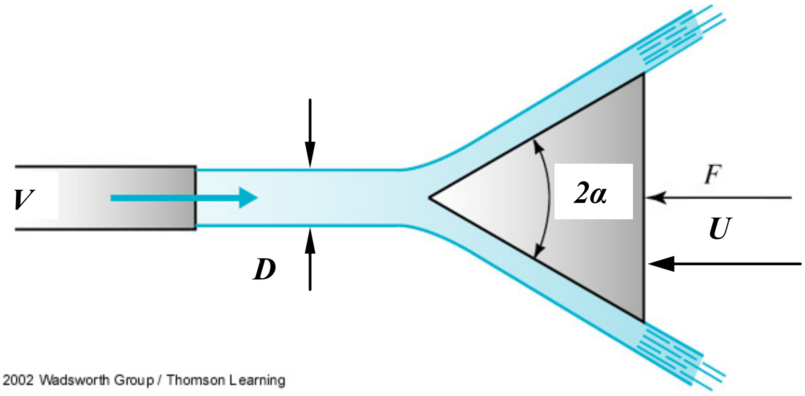
$$V_1 h = V_2 \left(h - \Delta h - H\right) \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{h}{h - \Delta h - H} V_1 = \beta V_1 \text{, onde } \beta = \frac{1}{1 - \dfrac{\Delta h}{h} - \dfrac{H}{h}} \geq 1$$

Da equação de Bernuolli para a linha de corrente da superfície, resulta:

$$p_a + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g h = p_a + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g \left(h - \Delta h\right) \quad \Rightarrow \quad V_2^2 - V_1^2 = 2 g \Delta h$$

Eliminando V_2, resultam $V_1 = \left(\dfrac{2\,g\,\Delta h}{\beta^2 - 1}\right)^{1/2}$, $V_2 = \beta\left(\dfrac{2\,g\,\Delta h}{\beta^2 - 1}\right)^{1/2}$, $Q = V_1\,h = h\left(\dfrac{2\,g\,\Delta h}{\beta^2 - 1}\right)^{1/2}$

4ª Questão (3,0 puntos) Um jato de líquido de massa específica ρ, diâmetro D e velocidade de saída V descarga na atmosfera e incide centrado em um cone de ángulo 2α, como mostra a figura. Desprezando forças volumétricas e perdas, determinar a força F necessária para aproximar o cone com uma velocidade constante U.
Dica: considerar um sistema solidário ao cone e observar que os módulos das velocidades relativas de entrada e saída não mudam (por que?)



Conservação de massa, permanente e incompressível: $0 = \int_A (\boldsymbol{V}.\breve{\boldsymbol{n}})\,dA$

Conservação da quantidade de movimento: $\sum \boldsymbol{F}_{ext} = \int_A \rho\,\boldsymbol{V}\,(\boldsymbol{V}.\breve{\boldsymbol{n}})\,dA$

(Adaptado de *Mecânica dos Fluidos*, M. C. Potter & D. C. Wiggert, Thomson, 2004)

Solução:
No sistema solidário ao cone, o jato está a pressão atmosférica constante. Como não existem perdas, vale a equação de Bernoulli; desprezando as forças volumétricas, deve ser então o módulo da velocidade relativa $c = V + U = cte$. O cone desvia o jato em um ângulo α. Da equação de continuidade, resulta:

$$\dot{m} = \rho\,c\,\frac{\pi\,D^2}{4} = \frac{1}{4}\rho\left(V + U\right)\pi\,D^2 = cte$$

Da equação de conservação do momento linear na direção do escoamento, resulta:

$$-F = \dot{m}\left(c\cos\alpha - c\right) = -\dot{m}\,c\left(1 - \cos\alpha\right) \quad \Rightarrow \quad F = \frac{1}{4}\rho\,\pi\,D^2\left(V + U\right)^2\left(1 - \cos\alpha\right)$$