

Eletromagnetismo I

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2º Semestre 2014

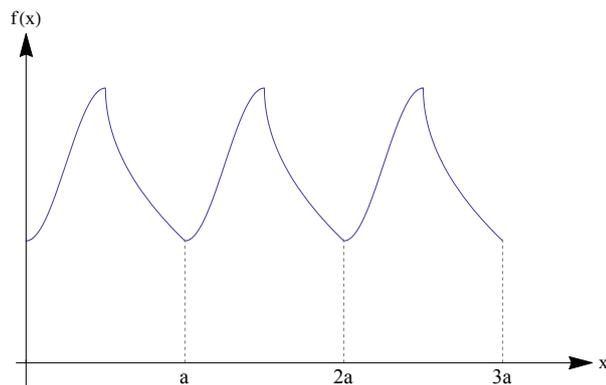
Preparo: Diego Oliveira

Aula 8

Revisão Série de Fourier

Suponhamos que tenhamos uma função $f(x)$ periódica, de período a , como mostrado na figura.

O objetivo da série de Fourier é representar funções periódicas por séries de senos e cossenos, cujo período fundamental seja a :



$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{a}\right) \quad (1)$$

Determinação dos coeficientes

a_0 :

$$\int_{-a/2}^{a/2} f(x)dx = \int_{-a/2}^{a/2} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{2\pi nx}{a}\right) dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-a/2}^{a/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nx}{a}\right) dx \quad (2)$$

Mudança de variável: $\theta = \frac{2\pi x}{a}$; $dx = \frac{a}{2\pi} d\theta$;

$$\int_{-a/2}^{a/2} f(x)dx = a_0 \cdot a + \frac{a}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta) d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(n\theta) d\theta \quad (3)$$

$$\therefore a_0 = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(x)dx = \overline{f(x)} : \text{valor médio da função no período} \quad (4)$$

a_n :

$$\begin{aligned} \int_{-a/2}^{a/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) dx &= \int_{-a/2}^{a/2} a_0 \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi nx}{a}\right) dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nx}{a}\right) dx \end{aligned} \quad (5)$$

Fazendo a mesma mudança de variável¹:

$$\begin{aligned} \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi nx}{a}\right) dx &= \frac{a}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\theta) \cos(n\theta) d\theta \\ &= \frac{a}{4\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos((m+n)\theta) d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)\theta) d\theta \right] \\ &= \begin{cases} 0; & m \neq n \\ 2\pi; & m = n \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

¹onde foi usada a seguinte relação trigonométrica $\cos(a)\cos(b) = [\cos(a+b) + \cos(a-b)]/2$.

$$\therefore \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi nx}{a}\right) dx = \frac{a}{2} \delta_{mn} \quad (7)$$

Da mesma forma, usando a identidade $\sin(a)\cos(b) = [\sin(a+b) + \sin(a-b)]/2$, podemos mostrar que

$$\int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi nx}{a}\right) dx = 0 \quad (8)$$

Obtemos então:

$$\int_{-a/2}^{a/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{a}{2} \delta_{mn} = \frac{a}{2} a_m \quad (9)$$

ou (trocando m por n):

$$\boxed{a_n = \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{a}\right) dx} \quad (10)$$

b_n :

Este coeficiente se obtém fazendo a integral

$$\begin{aligned} \int_{-a/2}^{a/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) dx &= \int_{-a/2}^{a/2} a_0 \cancel{\sin\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)} dx + \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-a/2}^{a/2} \cancel{\sin\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)} \cos\left(\frac{2\pi nx}{a}\right) dx &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-a/2}^{a/2} \sin\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi nx}{a}\right) dx \end{aligned} \quad (11)$$

$$\int_{-a/2}^{a/2} \sin\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi nx}{a}\right) dx =$$

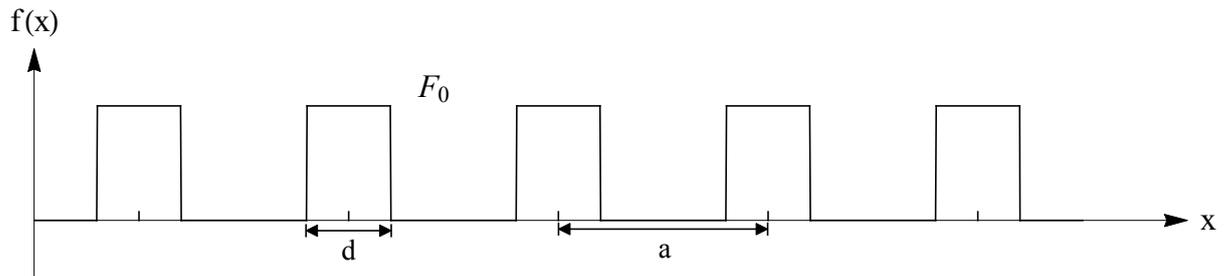
$$\frac{1}{2} \left[\int_{-a/2}^{a/2} \sin((n+m)x) dx + \int_{-a/2}^{a/2} \sin((n-m)x) dx \right] = 0 \quad (12)$$

A outra integral pode ser feita fazendo a mesma transformação de variável e usando a identidade trigonométrica: $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$, o resultado é

$$b_n = \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{a}\right) dx \quad (13)$$

Exemplo

Função de impulsos periódicos

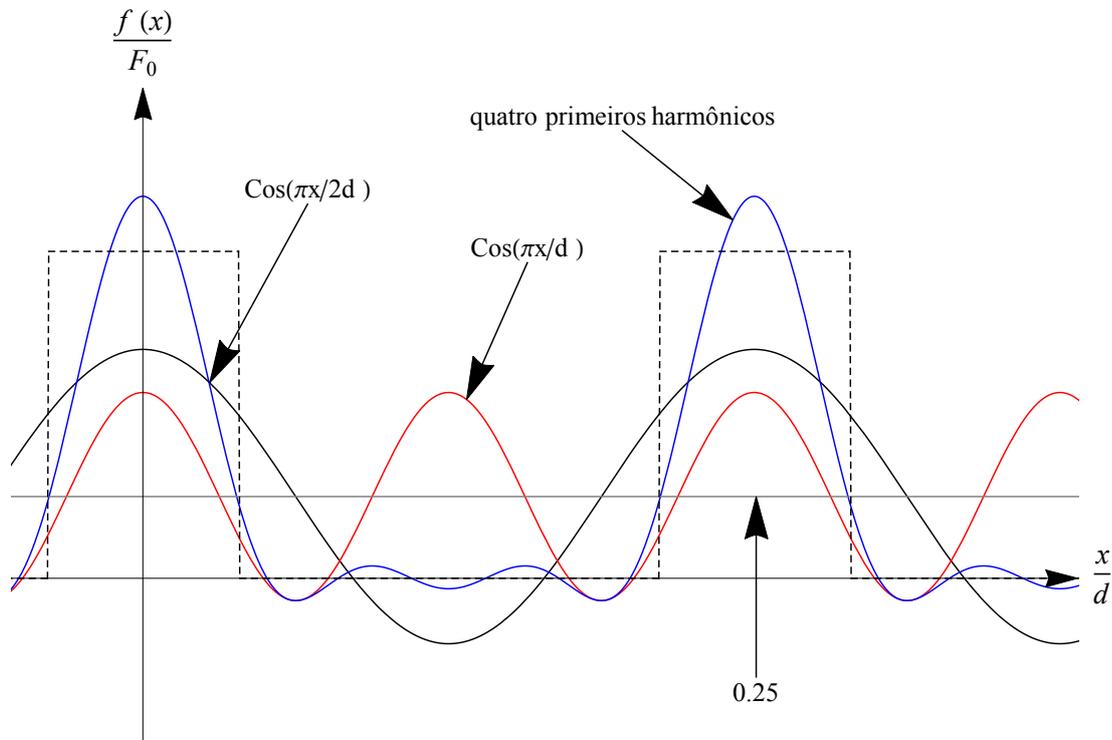


$$a_0 = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(x) dx = \frac{F_0}{a} \int_{-d/2}^{d/2} dx = \frac{d}{a} F_0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{a}\right) dx \\ &= \frac{2F_0}{a} \int_{-d/2}^{d/2} \cos\left(\frac{2\pi nx}{a}\right) dx = \frac{2F_0}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi nd}{a}\right) \end{aligned} \quad (14)$$

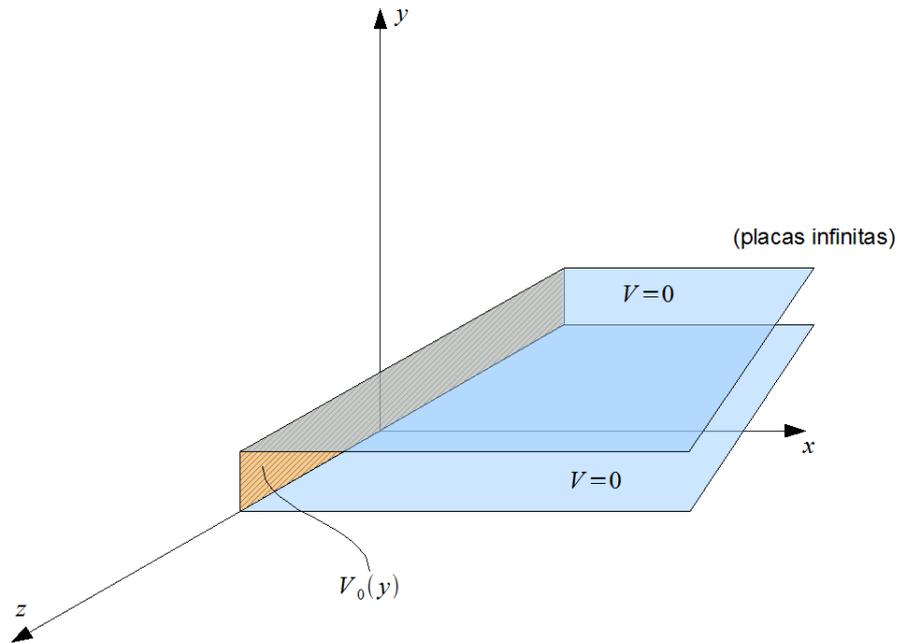
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{a}\right) dx \\ &= \frac{2F_0}{a} \int_{-d/2}^{d/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nx}{a}\right) dx = -\frac{F_0}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{2\pi nd}{a}\right) \right]_{-d/2}^{d/2} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = \frac{d}{a} F_0 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \left(\frac{n\pi d}{a} \right)}{\frac{n\pi d}{a}} \cos \left(\frac{2\pi n x}{a} \right) \right] \quad (15)$$



Relembrada a Série de Fourier, vamos empregá-la na solução de alguns problemas de solução da equação de Laplace em coordenadas cartesianas.

Exemplo 3.3 (Livro texto)



Vamos inicialmente supor que $V_0 = \text{const}$, simplificando um pouco o exemplo do livro texto.

Como as placas são infinitas na direção z , certamente o potencial não deve variar com esta coordenada, de forma que a Equação de Laplace fica

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0; \quad \begin{aligned} \phi(x, 0) &= 0 \\ \phi(x, a) &= 0 \\ \phi(0, y) &= V_0 \end{aligned} \quad \phi(x \rightarrow \infty, y) \rightarrow 0 \quad (16)$$

Temos quatro condições de contorno para uma equação de segundo grau. Como veremos, esta aparente “sobre-determinação” levará a um problema de auto-valor.

Separação de variáveis

$$\phi(x, y) = X(x)Y(y) \quad \therefore \quad Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \quad (17)$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 &\quad \rightarrow \\ \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \alpha^2 & \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \beta^2 & \end{aligned} \right\} \alpha^2 + \beta^2 = 0 \quad (18)$$

$$\therefore X(x) = A_1 \cosh(\alpha x) + B_1 \sinh(\alpha x) \quad (19)$$

$$Y(y) = A_2 \cosh(\beta y) + B_2 \sinh(\beta y)$$

$$\therefore \phi(x, y) = [A_1 \cosh(\alpha x) + B_1 \sinh(\alpha x)][A_2 \cosh(\beta y) + B_2 \sinh(\beta y)] \quad (20)$$

$$\underline{y=0} \rightarrow \phi(x, 0) = 0$$

$$\therefore \phi(x, 0) = [A_1 \cosh(\alpha x) + B_1 \sinh(\alpha x)]A_2 = 0; \text{ x qualquer : } \boxed{A_2 = 0} \quad (21)$$

$$\therefore \phi(x, y) = [A \cosh(\alpha x) + B \sinh(\alpha x)] \sinh(\beta y) \quad (A = A_1 B_2; B = B_1 B_2)$$

$$\underline{y=a} \rightarrow \phi(x, a) = 0$$

$$0 = [A \cosh(\alpha x) + B \sinh(\alpha x)] \sinh(\beta a) \quad (22)$$

Solução trivial : $\beta = 0$; $\rightarrow \phi(x, y) = 0$, que não é uma solução geral

$$\beta = \frac{i n \pi}{a} \rightarrow \sinh\left(i \frac{n \pi a}{a}\right) = i \underset{n \text{ qualquer}}{\text{sen}(n \pi)} = 0$$

$$(\sinh(ix) = i \text{sen}(x))$$

Vemos que esta condição de contorno não definiu A e B , mas sim o período das soluções de y !

Por outro lado, como a solução é válida para qualquer n , temos que tomar a solução geral como a soma de todas as soluções possíveis, já que a Equação de Laplace é linear.

Além disso, vemos que como $\beta = i n \pi / a = \beta_n$ (com um valor para cada n),

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha^2 = -\beta^2 = n^2 \frac{\pi^2}{a^2} \quad \therefore \boxed{a_n = \pm \frac{n \pi}{a}} \quad (23)$$

Então a solução geral fica:

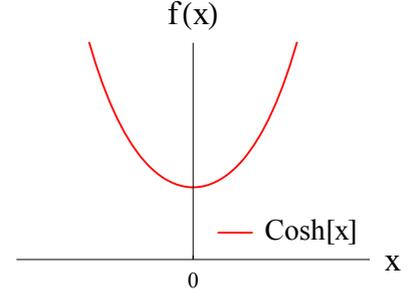
$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cosh(\alpha_n x) + B_n \sinh(\alpha_n x)] \text{sen}\left(\frac{n \pi y}{a}\right) \quad (24)$$

Agora vamos cuidar das condições de contorno em x . A primeira, mais fácil de impor, é a condição assintótica $\phi(x, y) |_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0$.

Lembrando que tanto $\cosh(x)$ como $\sinh(x)$ divergem quanto $x \rightarrow \infty$, temos que combiná-los para eliminar esta divergência:

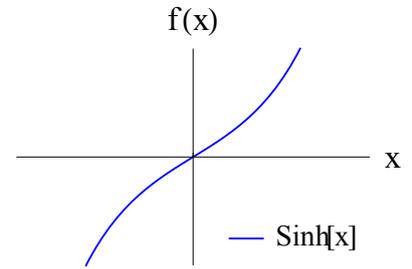
$$\lim_{x \rightarrow \infty} [A_n \cosh(\alpha_n x) + B_n \sinh(\alpha_n x)] \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{A_n}{2} (e^{\alpha_n x} + e^{-\alpha_n x}) + \frac{B_n}{2} (e^{\alpha_n x} - e^{-\alpha_n x}) \right] \rightarrow 0$$



$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (\alpha_n > 0)}} \frac{1}{2} \left[\underbrace{(A_n + B_n)e^{\alpha_n x}}_{\rightarrow \infty} + \underbrace{(A_n - B_n)e^{-\alpha_n x}}_{\rightarrow 0} \right] \rightarrow 0$$

Então, para evitar a divergência para x tendendo para infinito, tomamos $B_n = -A_n$.



Finalmente temos

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \underbrace{[\cosh(\alpha_n x) - \sinh(\alpha_n x)]}_{e^{-\alpha_n x}} \text{sen} \left(\frac{n\pi y}{a} \right) \quad (25)$$

$$\therefore \phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n\pi x}{a}} \text{sen} \left(\frac{n\pi y}{a} \right) \quad (26)$$

Até agora não mencionamos a condição em $x = 0$. Primeiro vamos supor que o potencial seja $V_0 = \text{const.}$ Então

$$x = 0 \rightarrow \phi(0, y) = V_0 \quad (27)$$

$$\therefore V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{sen} \left(\frac{n\pi y}{a} \right) \quad (28)$$

Usando o mesmo procedimento da série de Fourier, temos

$$\int_0^a \text{sen} \left(\frac{m\pi y}{a} \right) dy = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^a \text{sen} \left(\frac{m\pi y}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi y}{a} \right) dy \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^a V_0 \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi y}{a} \right) dy &= V_0 \left(-\frac{a}{m\pi} \right) \cos \left(\frac{m\pi y}{a} \right) \Big|_0^a \\
&= \frac{V_0 a}{m\pi} [1 - \cos(m\pi)] = \begin{cases} 0; & m \text{ par} \\ \frac{2V_0 a}{m\pi}; & m \text{ ímpar} \end{cases} \quad (30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^a \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{a} \right) dy &\stackrel{\theta = \frac{\pi y}{a}}{=} \frac{a}{2\pi} \int_0^a \underbrace{2 \operatorname{sen}(m\theta) \operatorname{sen}(n\theta)}_{\cos[(m-n)\theta] - \cos[(m+n)\theta]} d\theta \\
&= \frac{a}{2\pi} \left[\int_0^\pi \cos[(m-n)\theta] d\theta - \int_0^\pi \cos[(m+n)\theta] d\theta \right] \\
&= \frac{a}{2\pi} \left[\underbrace{\frac{1}{m-n} \operatorname{sen}[(m-n)\theta] \Big|_0^\pi}_{\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen}(x)/x \rightarrow 1} - \frac{1}{m+n} \operatorname{sen}[(m+n)\theta] \Big|_0^\pi \right] \\
&= \begin{cases} 0; & m \neq n \\ \frac{a}{2}; & m = n \end{cases} \quad (31)
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{2V_0 a}{m\pi} \Big|_{m \text{ ímpar}} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{a}{2} \delta_{m,n} = \frac{a C_m}{2} \quad (32)$$

$$\therefore \boxed{C_m = \frac{4V_0}{m\pi}}; \quad m \text{ ímpar}$$

$$\therefore \boxed{\phi(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{ímpar}}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n\pi x}{a}}}{n} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{a} \right)} \quad (33)$$

[O livro informa que esta série pode ser somada, dando

$$\phi(x, y) = \frac{2V_0}{\pi} \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi y}{a} \right)}{\operatorname{senh} \left(\frac{\pi x}{a} \right)} \right]; \quad (34)$$

mas isso não é tão importante]