Eletromagnetismo I

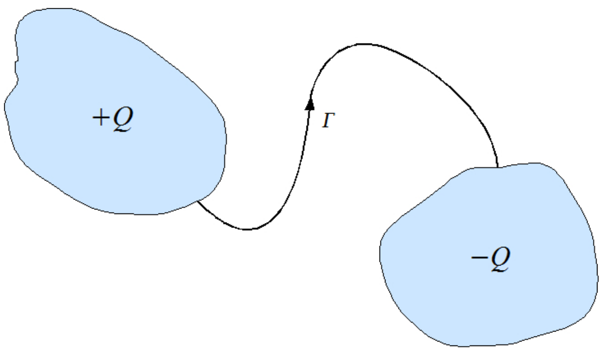
Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2º Semestre 2014

Preparo: Diego Oliveira

Aula 7

Condutores e Capacitores

Suponhamos que tenhamos dois condutores (perfeitos) e coloquemos uma carga Q em um e $-Q$ em outro. Como dentro do condutor $\vec{E} = 0$, temos $\nabla\phi = 0$ e $\phi = const$ dentro dos condutores. Portanto os dois condutores terão potenciais constantes, mas com valores distintos. Mas, como o campo elétrico é conservativo, podemnos definir de forma unívoca a diferença de potencial entre os condutores



$$V = \phi_+ - \phi_- = -\int_{(-)\,\Gamma}^{(+)} \vec{E}.d\vec{l}, \qquad (1)$$

ao longo do percurso Γ. Mas o campo elétrico é proporcional à carga, $|E| \propto |Q|$ e, portanto, $|V| \propto |Q|$. Portanto podemos definir uma grandeza que só depende da geometria da configuração dos condutores, denominada Capacitância

$$\boxed{C = \frac{|Q|}{|V|} \qquad [C] = \frac{C}{V} = f : \text{Farad}}. \qquad (2)$$

Por outro lado, a energia armazenada nos capacitores pode também ser expressa em termos de C:

$$W = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\phi(\vec{r})d\tau = \frac{1}{2}(\phi_+ - \phi_-)\underbrace{\int \rho(\vec{r})d\tau}_{|Q|}$$

$$\therefore \boxed{W = \frac{1}{2}|Q|V = \frac{1}{2}CV^2} \tag{3}$$

Equação de Laplace e Poisson

Na maior parte dos problemas de eletrostática de interesse prático, a distribuição de cargas não é especificada e sim o potencial aplicado em diferentes superfícies, principalmente superfícies condutoras. Nestes casos, os métodos vistos anteriormente para calcular o campo elétrico não são adequados; ao invés temos que utilizar um método que permita calcular o potencial eletrostático em todo o espaço, dadas condições de contorno em algumas superfícies (e, em alguns casos, também distribuições de carga). Para isso utilizaremos as Equações de Poisson e Laplace.

Consideraremos a primeira equação de Maxwell:

$$\nabla.\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{4}$$

Aplicando $\vec{E} = -\nabla\phi$, temos

$$\nabla.(\nabla\phi) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \boxed{\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \tag{5}$$

que é a Equação de Poisson, onde

$$\nabla^2 = \nabla.\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{6}$$

Se a densidade de cargas for nula em uma região do espaço, obtemos a Equação de Laplace

$$\boxed{\nabla^2\phi = 0} \tag{7}$$

Formalmente, essas equações são equações de derivadas parciais de segunda ordem do tipo elíptica. O problema típico em que a Equação de Laplace é utilizada é dado por um conjunto de superfícies condutoras, onde o valor do potencial é especificado, e se resolve a equação na região externa às superfícies impondo-se como condições de contorno os valores dos potenciais. As distribuições de cargas nas superfícies condutoras não são conhecidas e devem ser determinadas com as soluções.

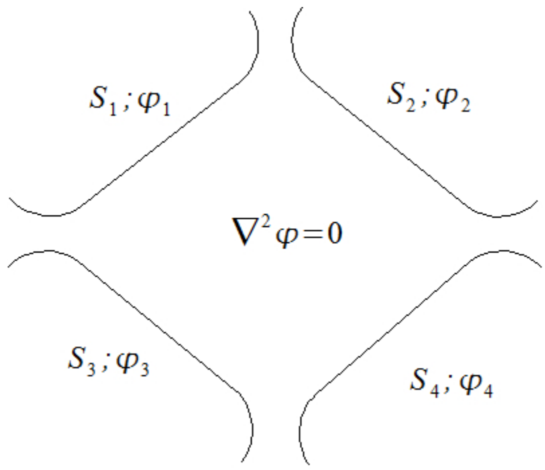
Unicidade da Solução

Uma questão importante, do ponto de vista formal, é se a solução da equação de Laplace, com imposição das condições de contorno em superfícies fixas, é única.

Para provar isto, vamos supor que o valor do potencial seja espeficicado nas superfícies $S_i \quad \forall \quad i = 1, 2, ...,$ e que ao resolver a equação de Laplace encontramos duas soluções ϕ_a e ϕ_b, isto é,

$$\nabla^2 \phi_a = 0 \qquad \nabla^2 \phi_b = 0 \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \phi_{a1} = \phi_{b1} = \phi_1; \phi_{a2} = \phi_{b2} = \phi_2; \ldots \\ \ldots \phi_{aN} = \phi_{bN} = \phi_N; \end{aligned} \tag{9}$$



Vamos agora definir uma função escalar dada pela diferença entre as duas soluções e uma função vetorial dada pelo seu gradiente, isto é,

$$g = \phi_a - \phi_b; \qquad \vec{f} = \nabla(\phi_a - \phi_b) = \nabla\phi_a - \nabla\phi_b \tag{10}$$

Levando em conta a identidade betorial

$$\nabla.(g\vec{f}) = g\nabla.\vec{f} + \vec{f}.\nabla g \tag{11}$$

temos

$$\nabla.\left[(\phi_a - \phi_b)\nabla(\phi_a - \phi_b)\right] = (\phi_a - \phi_b)\nabla.\left[\nabla(\phi_a - \phi_b)\right] + \nabla[\phi_a - \phi_b].\nabla[\phi_a - \phi_b] \tag{12}$$

$$\therefore \nabla.[(\phi_a - \phi_b)\nabla(\phi_a - \phi_b)] = (\phi_a - \phi_b)[\nabla^2(\phi_a - \phi_b)] + [\nabla(\phi_a - \phi_b)]^2 \tag{13}$$

mas, como as duas soluções satisfazem a equação de Laplace, temos

$$\nabla^2(\phi_a - \phi_b) = \nabla^2\phi_a - \nabla^2\phi_b = 0 \tag{14}$$

Portanto,

$$\nabla[(\phi_a - \phi_b)\nabla(\phi_a - \phi_b)] = [\nabla(\phi_a - \phi_b)]^2 \tag{15}$$

Integrando este resultado sobre todo o volume externo às superfícies condutoras e interno a um superfície no ∞, temos

$$\int \nabla.[(\phi_a - \phi_b)\nabla(\phi_a - \phi_b)]d\tau = \int [\nabla(\phi_a - \phi_b)]^2 d\tau \tag{16}$$

Aplicando agora o Teorema de Gauss, em um volume limitado pelas superfícies condutoras e por uma superfície no infinito, obtemos

$$\int_S (\phi_a - \phi_b)\nabla(\phi_a - \phi_b)dS = 0 \tag{17}$$

porque, em todas as superfícies $\phi_a = \phi_b$, por hipótese. Assim

$$\int [\nabla(\phi_a - \phi_b)]^2 d\tau = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla(\phi_a - \phi_b) = 0 \tag{18}$$

$$\therefore \phi_a - \phi_b = const \tag{19}$$

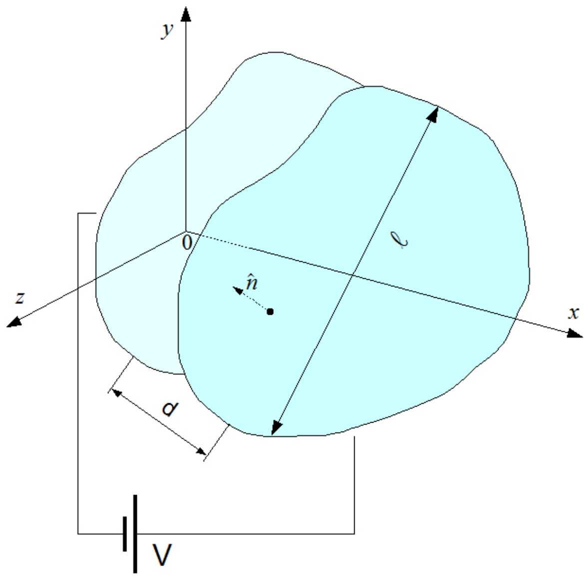
Mas como em todas as superfícies condutoras $\phi_a = \phi_b$, temos que $const = 0$. Isto demonstra que $\phi_a(\vec{r}) = \phi_b(\vec{r})$, ou seja, a solução da Equação de Laplace com as equações de contorno impostas é única.

Exemplos de solução da Equação de Laplace

1. Capacitor de placas paralelas, com $\ell \gg d$, onde ℓ é a dimensão característica das placas e d a separação entre elas. Neste caso, podemos considerar as placas como infinitas, de forma que o potencial entre elas só deve depender da variável x, isto é

$$\nabla^2\phi = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0 \tag{20}$$

$$\phi = ax + b \tag{21}$$



Condições de Contorno

$$\begin{aligned} x = 0 : \phi(x) = 0 \quad &\therefore \quad b = 0 \\ x = d : \phi(d) = V \quad &\therefore \quad a = \tfrac{V}{d} \end{aligned} \tag{22}$$

Campo Elétrico

$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\frac{d\phi}{dx}\hat{e}_x \quad \therefore \quad \vec{E} = -\frac{V}{d}\hat{e}_x \tag{23}$$

Carga Superficial

Na superfície condutora da placa, $\vec{E} = \sigma/\epsilon_0 \ \hat{n}$. Considerando a placa em $x = d$, $\hat{n} = -\hat{e}_x$, deforma que

$$-\frac{V}{d} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \therefore \quad \sigma = \epsilon_0 \frac{V}{d}. \tag{24}$$

Capacitância

A carga total em uma área S da placa será

$$Q = \sigma S = \epsilon_0 \frac{V}{d} S, \tag{25}$$

portanto a capacitância será

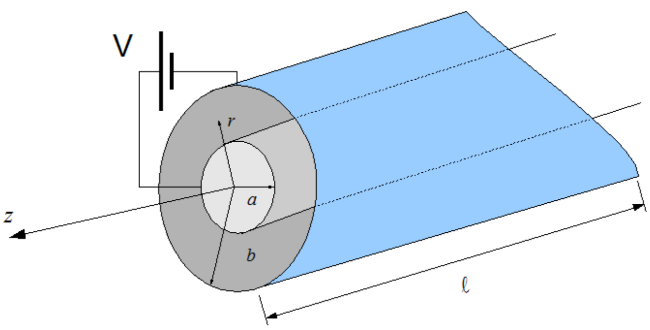
$$C = \frac{Q}{V} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{C}{S} = \frac{\epsilon_0}{d}}, \tag{26}$$

que é a capacitância por unidade de área da configuração de placas paralelas.

2. Cabo Coaxial

Neste caso naturalmente utilizamos coordenadas cilíndricas, de forma que

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \tag{27}$$



Como a configuração tem simetria cilíndrica, naturalmente $\partial \phi / \partial \theta = 0$. Por outro lado, se o cabo for bastante longo, isto é, $\ell \gg b$, podemos desprezar a variação do potencial com a coordenada longitudinal ℓ; então $\phi = \phi(r)$ e

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \phi(r) = c_1 ln \, r + c_2. \tag{28}$$

Condições de Contorno

$$r = b : \phi = 0 \quad \therefore \quad 0 = c_1 ln\, b + c_2 : c_2 = -c_1 ln\, b \tag{29}$$

$$\therefore \phi(r) = c_1 ln\left(\frac{r}{b}\right) \tag{30}$$

$$r = a : \phi = V = c_1 ln\left(\frac{a}{b}\right) \quad \therefore \quad c_1 = \frac{V}{ln\, a/b} \tag{31}$$

$$\therefore \phi(r) = -V\frac{ln\, r/b}{ln\, a/b} \quad \therefore \quad \phi(r) = V\frac{ln\, b/r}{ln\, b/a} \tag{32}$$

Campo Elétrico

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad \therefore \quad \vec{E} = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{e}_r \tag{33}$$

$$\therefore \vec{E} = -\frac{V}{ln\, b/a}\frac{d}{dr}\left[ln\, b - ln\, r\right]\hat{e}_r \quad \therefore \quad \boxed{\vec{E} = \frac{V}{r ln\, b/a}\hat{e}_r} \tag{34}$$

Carga Superficial

Vamos considerar o cilindro interno $\hat{n} = \hat{e}_r$; $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}$

$$\therefore \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{V}{a\, ln\, b/a} \quad \therefore \quad \sigma = \epsilon_0\frac{V}{a\, ln\, b/a} \tag{35}$$

Capacitância

Carga em um comprimento ℓ do cilindro interno:

$$\begin{gathered} Q = \sigma(2\pi a\ell) \quad \therefore \quad Q = \tfrac{2\pi\ell V}{ln\, b/a} \\ \therefore C = \tfrac{Q}{V} = \tfrac{2\pi\epsilon_0\ell}{ln\, b/a} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{C}{\ell} = \frac{2\pi\epsilon_0}{ln\, b/a}} \end{gathered} \tag{36}$$

$\rightarrow$ capacitância por unidade de comprimento de um cabo coaxial.