MECÂNICA QUÂNTICA - AULA 7 - O PRINCÍPIO DA INCERTEZA DE HEISENBERG

A física do sistema de dois níveis constituído pelo spin do elétron de valência de um átomo de prata, como estudada no experimento de Stern-Gerlach, é extremamente simples. Tornando-o, pois, um exemplo tão conveniente para ilustrar os princípios da MQ. Contudo, tal simplicidade tem o seu preço, posto que muitos fenômenos interessantes não ocorrem em tal sistema. Uma propriedade central de um sistema composto por um único spin, que utilizamos indiscriminadamente, é que seu estado pode ser completamente especificado conhecendo apenas o autovalor de um único observável, ou seja, basta apenas uma única medição experimental para sabermos tudo (o que é possível) sobre o sistema. Adicionalmente, se o valor de um observável, por exemplo S_z, for determinado, não podemos saber nada sobre os demais observáveis, uma vez que qualquer medição de S_x ou S_y destroi qualquer informação obtida anteriormente por uma medição de S_z.

Por outro lado, em sistemas mais complexos podem existir vários observáveis cujos valores possam ser simultaneamente determinados. Por exemplo,

1) Uma partícula livre em movimento: como veremos posteriormente, uma base para o espaço de estados correspondente é determinada pelas possíveis posições da partícula. No entanto, para especificarmos univocamente a posição de uma partícula em $\mathbb{R}^n$ precisamos de n coordenadas. Assim, devemos ser capazes de medir simultaneamente cada uma das n coordenadas: $x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{R}$.

2) Um sistema com dois spins independentes: para descrevermos univocamente um sistema com dois spins independentes, como o dado pelos elétrons de valência de dois átomos de prata, precisamos de dois observáveis: $S_i^{(1)}$ para um dos átomos e $S_j^{(2)}$ para o outro, com $i, j \in \{x, y, z\}$.

Nessas situações precisamos de várias medições, com respeito a observáveis diferentes para completamente caracterizarmos o sistema em questão. Um conceito útil é o seguinte.

Definição 7.1: "Dizemos que dois observáveis são compatíveis se pudermos efetuar suas medições experimentais simultaneamente."

Portanto, se A e B são dois observáveis compatíveis, a medição de B não interfere com o resultado de uma medição anterior de A. Assim, neste caso, se obtivermos o valor α numa medição de A e medirmos em seguida B, obtendo o resultado β, qualquer medição subseqüente de A ou B fornecerá α e β respectivamente. O conteúdo físico da definição 6.1 é bastante claro, contudo, não é muito prático na hora de computarmos qualquer quantidade fisicamente relevante. No que se segue procuramos por uma forma matematicamente precisa e que seja conveniente para futuros cálculos.

Seja um sistema físico cujo espaço de estados é descrito pelo espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e considere dois observáveis compatíveis $A, B : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, autoadjuntos. O axioma 2 nos diz que os possíveis resultados experimentais de uma medição de A são elementos de seu espectro, $\alpha \in \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Claramente, um resultado similar vale para o operador B, por concreteza, $\beta \in \sigma(B) \subseteq \mathbb{R}$. Analisemos, inicialmente o caso de espectros não degenerados; i.e, quando os espectros coincidem com os respectivos conjuntos de autovalores, cada qual com multiplicidade algébrica igual a 1.

Suponha que o sistema se encontre inicialmente no estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, cuja representação em termos de uma base de autoestados ortonormais de A é:

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha \in \sigma(A)} |\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle .$$

O axioma 3 nos diz que existe uma probabilidade $|\langle\alpha|\psi\rangle|^2$ de obtermos o valor $\alpha \in \sigma(A)$ numa medição do observável A. Assim, ao medirmos o valor α sabemos que o sistema se encontra no estado $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}$, i.e.,

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha\in\sigma(A)} |\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle \xrightarrow[\text{de } A]{\text{medição}} |\alpha\rangle .$$

Por sua vez $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}$ pode ser escrito como uma superposição dos autoestados de B:

$$|\alpha\rangle = \sum_{\beta\in\sigma(B)} |\beta\rangle\langle\beta|\alpha\rangle .$$

Consequentemente, invocando o axioma 3 novamente, sabemos que obtemos experimentalmente o valor $\beta\in\sigma(B)$ com uma probabilidade $|\langle\beta|\alpha\rangle|^2$ enquanto que o sistema colapsa para o estado $|\beta\rangle$:

$$|\alpha\rangle = \sum_{\beta\in\sigma(B)} |\beta\rangle\langle\beta|\alpha\rangle \xrightarrow[\text{de } B]{\text{medição}} |\beta\rangle .$$

Agora, como A e B são observáveis compatíveis, sabemos que a medição experimental de B não pode alterar o nosso conhecimento prévio do observável A. Portanto, se medirmos A novamente, devemos necessariamente obter o valor $\alpha\in\sigma(A)$. Decompondo $|\beta\rangle$ em uma base de autoestados de A:

$$|\beta\rangle = \sum_{\alpha\in\sigma(A)} |\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle$$

sabemos do axioma 3 que a probabilidade de medirmos α é $|\langle\alpha|\beta\rangle|^2$. Por outro lado, a nossa consideração anterior nos diz que tal probabilidade é 1. Logo,

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = 1 \Rightarrow |\alpha\rangle = \gamma|\beta\rangle \quad \text{com} \quad |\gamma|^2 = 1 .$$

Portanto, o axioma 1 nos diz que os vetores $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ correspondem ao mesmo estado de $\mathcal{H}$. Finalmente, usando que tanto $|\alpha\rangle$ quanto $|\beta\rangle$ eram vetores arbitrários das bases de autoestados de A e B respectivamente, concluímos que tais bases são idênticas. Posto de outra forma, acabamos de mostrar que se A e B são observáveis compatíveis, existe uma base de autoestados simultâneos de A e B.

Notamos que apesar de termos deduzido o resultado acima para o caso onde não há degenerescência, tal fato é válido em geral. No contexto do teorema espectral, essa afirmação é equivalente a dizer que dois observáveis compatíveis têm decomposições espectrais com respeito à mesma medida com valores em projeções ortogonais. Assim, de uma forma bem geral, se $A, B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ são dois operadores autoadjuntos, existem duas bases ortonormais de $\mathcal{H}$ constituídas pelos autovetores de A e B:

$$A|\alpha_i\rangle = \alpha|\alpha_i\rangle, \quad \alpha \in \sigma(A), \quad i \in I \subseteq \mathbb{R},$$

$$B|\beta_j\rangle = \beta|\beta_j\rangle, \quad \beta \in \sigma(B), \quad j \in J \subseteq \mathbb{R},$$

onde I e J são dois conjuntos arbitrários de índices, introduzidos para levar em conta as possíveis degenerescências dos espectros de A e B. Se tais observáveis forem compatíveis, existe uma base simultânea de autovalores de A e B, ou seja, um conjunto

$$\{|\alpha_i, \beta_j\rangle \in \mathcal{H}, \; i \in I \subseteq \mathbb{R}, \; j \in J \subseteq \mathbb{R}\}$$

que gera $\mathcal{H}$ e cujos elementos satisfazem:

$$A|\alpha_i, \beta_j\rangle = \alpha|\alpha_i, \beta_j\rangle,$$

$$B|\alpha_i, \beta_j\rangle = \beta|\alpha_i, \beta_j\rangle.$$

Naturalmente, tal notação envolvendo os elementos dos espectros de A e de B simultaneamente é um tanto quanto desnecessária quando não há degenerescência, pois, como vimos anteriormente, ao especificarmos α como o resultado de uma medição de A, sabíamos que uma medição de B só poderia retornar o valor β. Contudo, quando há degenerescência, tal notação se torna particularmente útil, ao permitir que melhor caracterizemos o estado no qual o sistema se encontra.

Consideramos a seguir que condições a compatibilidade, e conseqüentemente, a existência de uma base simultânea de autoestados impõem sobre os dois observáveis compatíveis A e B que temos considerado. Para tanto, atuamos com o produto AB sobre um elemento arbitrário $|\alpha_i, \beta_j\rangle$ da base de autovetores simultâneos:

$$(AB)|\alpha_i, \beta_j\rangle = A(B|\alpha_i, \beta_j\rangle) = A(\beta|\alpha_i, \beta_j\rangle) = \beta(A|\alpha_i, \beta_j\rangle)$$

$$\Rightarrow (AB)|\alpha_i, \beta_j\rangle = \beta\,\alpha\,|\alpha_i, \beta_j\rangle.$$

Como, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ é óbvio que ele comutam, portanto, se invertermos a ordem com a qual atuamos os operadores, obtemos:

$$(BA)|\alpha_i, \beta_j\rangle = \alpha\beta\,|\alpha_i, \beta_j\rangle.$$

Logo,

$$(AB)|\alpha_i, \beta_j\rangle = (BA)|\alpha_i, \beta_j\rangle \Rightarrow [A, B]|\alpha_i, \beta_j\rangle = 0.$$

Usando o fato de que o resultado acima é válido para qualquer elemento da base de autoestados simultâneos de A e B de $\mathcal{H}$, podemos concluir que:

$$[A, B]|\psi\rangle = 0, \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}.$$

Ora, isso nos diz que o comutador $[A, B]$ se anula. Assim, provamos que se A e B são dois observáveis compatíveis, então eles comutam entre si. Adicionalmente, é possível demonstrar a recíproca, ou seja, que se dois observáveis comutarem, então eles são compatíveis. Com isso obtemos o seguinte teorema, que caracteriza de uma forma matematicamente precisa e útil a compatibilidade de dois observáveis.

Teorema 7.2: "Dois observáveis são compatíveis, se e somente se, comutarem entre si."

Naturalmente, o resultado, que acabamos de discutir, pode ser generalizado para o caso onde existem $n \in \mathbb{N}$ observáveis mutualmente compatíveis, ou seja, observáveis:

$$A^{(k)} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad 1 \leq k \leq n$$

tais que:

$$[A^{(k)}, A^{(l)}] = 0, \quad 1 \leq k, l \leq n. \qquad (*)$$

Definição 7.3: "Dizemos que o conjunto de observáveis $\{A^{(k)} : \mathcal{H} \to \mathcal{H},\ 1 \leq k \leq n\}$ é um conjunto completo (ou maximal) de operadores compatíveis se não pudermos adicionar nenhum operador $A^{(n+1)}$ a tal conjunto sem violar a condição $(*)$."

Dessa forma, mesmo que o espectro dos observáveis $A^{(k)}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ sejam individualmente degenerados, uma combinação específica $\{\alpha^{(k)} \in \sigma(A^{(k)})\}$ permite que determinemos univocamente um dos elementos da base de autoestados simultâneos de $A^{(k)}$. Tais valores $\alpha^{(k)} \in \sigma(A)$, $1 \leqslant k \leqslant n$ são usualmente denominados números quânticos.

É importante notar que o problema do (engenheiro) físico não é, em geral, o de encontrar o conjunto maximal de observáveis comutantes para uma dada álgebra operatorial, mas sim o contrário. Dos dados experimentais ele deve determinar quantos números quânticos (ou seja, quantos observáveis compatíveis) são necessários para completamente caracterizar o sistema em estudo e quais são os seus valores possíveis (ou seja, o espectro de tais observáveis). Com isso, ele pode conjecturar um conjunto de operadores que através do axioma 3 forneçam valores e distribuições de probabilidade que reproduzam seus dados experimentais.

Portanto, as questões:

* Qual é um conjunto maximal de operadores compatíveis para um dado sistema?
* Quando um conjunto de operadores compatíveis para um dado sistema está completo?

são problemas físicos e não matemáticos. Se um dado experimento fornece mais valores dos que os obtíveis a partir de um certo conjunto de operadores comutantes, então tal conjunto está incompleto. Sendo, pois, necessário, introduzir um novo número quântico, correspondendo ao aumento do conjunto de operadores comutantes.

7.1 - Observáveis Incompatíveis

Nesta seção analisamos a relação que existe entre a incompatibilidade de dois observáveis e o fato dos operadores que os representam não comutarem. Comecemos com uma breve consideração envolvendo o nosso exemplo favorito: o spin do elétron de valência de um átomo de prata no contexto do experimento de Stern-Gerlach. Aprendemos em aulas passadas que o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de tal sistema é um subespaço de $\mathbb{C}^2$, de forma que todo observável $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ pode ser representado por uma matriz de $\mathrm{Mat}(2\times 2, \mathbb{C})$, autoadjunta. Adicionalmente, sabemos que o conjunto $\{\mathbb{1}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ é uma base de $\mathrm{Mat}(2\times 2, \mathbb{C})$ constituída apenas por matrizes autoadjuntas. Logo, qualquer observável de spin pode ser escrito como:

$$A = a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z + d\mathbb{1} \quad ; \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}.$$

Determinemos um conjunto maximal de observáveis compatíveis. Claramente, o operador $\mathbb{1}$ é autoadjunto e comuta com qualquer outro operador, de forma que deveria pertencer a tal conjunto. Contudo, por se tratar de um operador deveras trivial, $\sigma(\mathbb{1}) = \{1\}$ e qualquer vetor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ é seu autovetor, não o consideramos doravante. Dessa forma, nosso problema se reduz a determinar qual é o subconjunto maximal de $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ que contém apenas operadores comutantes. Usando que:

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z \quad , \quad [\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x \quad , \quad [\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y \, ,$$

verificamos, que tal conjunto completo é constituído por no máximo uma das matrizes de Pauli. Portanto, o teorema 7.2 nos diz que nenhum par de componentes do spin podem ser simultaneamente medidas experimentalmente, de acordo com a nossa discussão do experimento de Stern-Gerlach.

De uma forma geral, dizemos que dois observáveis são incompatíveis se suas representações operatoriais não comutarem. Adicionalmente, é fácil verificar o seguinte resultado.

Teorema 7.4: "Sejam $A, B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operadores autoadjuntos incompatíveis, então não existe uma base de autovetores simultâneos de A e B."

Demonstração: Suponha por absurdo que exista tal base, i.e., o conjunto

$$\{|\alpha_i,\beta_j\rangle \in \mathcal{H} \mid A|\alpha_i,\beta_j\rangle = \alpha|\alpha_i,\beta_j\rangle, B|\alpha_i,\beta_j\rangle = \beta|\alpha_i,\beta_j\rangle, \alpha \in \sigma(A), \beta \in \sigma(B), i \in I \subseteq \mathbb{R}, j \in J \subseteq \mathbb{R}\}$$

é uma base de $\mathcal{H}$. Então

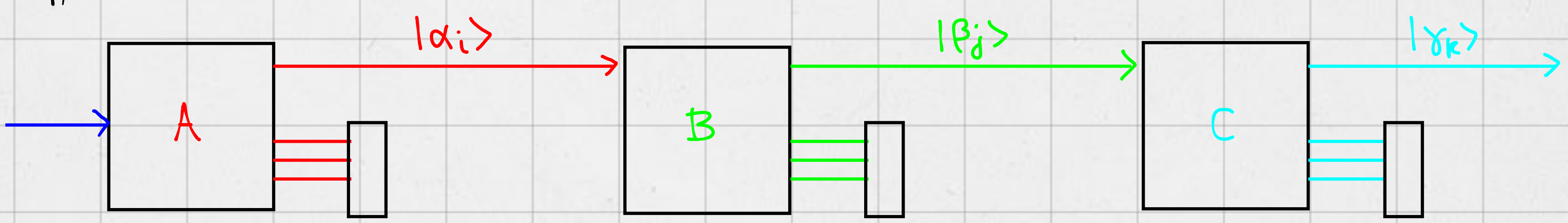
$$AB|\alpha_i,\beta_j\rangle = \alpha\beta|\alpha_i,\beta_j\rangle = BA|\alpha_i,\beta_j\rangle \Rightarrow [A,B] = 0,$$

contradizendo a hipótese de incompatibilidade entre A e B. ∎

Exploramos mais algumas conseqüências não triviais da incompatibilidade entre observáveis no contexto de medições seletivas como as consideradas nos experimentos seqüênciais de Stern-Gerlach.

Exemplo 7.5: "Seja um sistema com espaço de estados $\mathcal{H}$ e considere três observáveis arbitrários $A, B, C : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ não necessariamente compatíveis. Denote por $|\alpha_i\rangle, |\beta_j\rangle, |\gamma_k\rangle \in \mathcal{H}$ $i \in I \subseteq \mathbb{R}$, $j \in J \subseteq \mathbb{R}$, $k \in K \subseteq \mathbb{R}$ os elementos das respectivas bases ortonormais de autovetores de A, B e C. Analisemos os seguintes arranjos experimentais:

1)



Um primeiro filtro A seleciona algum estado particular $|\alpha_i\rangle$, rejeitando todos os demais, em seguida um segundo filtro B, que seleciona um estado $|\beta_j\rangle$ e rejeita os demais, e finalmente, um terceiro filtro C seleciona o estado $|\gamma_k\rangle$ e descarta os demais.

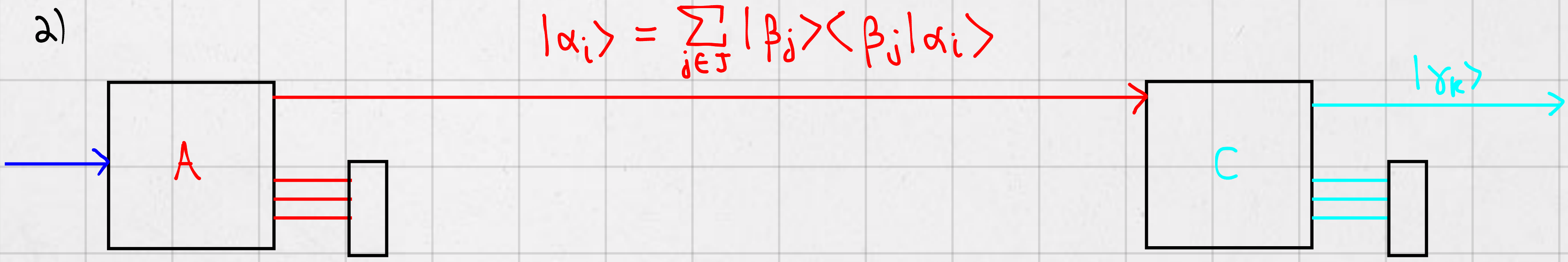
Estamos interessados em calcular a probabilidade de obtermos tal estado $|\gamma_k\rangle$, supondo que feixe deixe o filtro A normalizado. Como as probabilidades são multipli_ cativas, obtemos:

$$|\langle \gamma_k|\beta_j\rangle|^2\,|\langle \beta_j|\alpha_i\rangle|^2.$$

Somemos então sobre todos os possíveis $|\beta_j\rangle$ para obtermos a probabilidade de passarmos através de todas as possíveis rotas de B:

$$\sum_{j\in J}|\langle \gamma_k|\beta_j\rangle|^2|\langle \beta_j|\alpha_i\rangle|^2 = \sum_{j\in J}\langle \gamma_k|\beta_j\rangle\langle \beta_j|\alpha_i\rangle\langle \alpha_i|\beta_j\rangle\langle \beta_j|\gamma_k\rangle$$

2)



No segundo arranjo experimental, removemos o segundo filtro, B. Neste caso, a probabilidade de medirmos $|\gamma_k\rangle$ no terceiro filtro é simplesmente:

$$|\langle \gamma_k|\alpha_i\rangle|^2.$$

Contudo, como

$$\sum_{j\in J}|\beta_j\rangle\langle\beta_j| = \mathbb{1},$$

podemos escrever tal probabilidade da seguinte forma:

$$\begin{aligned}|\langle \gamma_k|\alpha_i\rangle|^2 &= \Big|\sum_{j\in J}\langle \gamma_k|\beta_j\rangle\langle\beta_j|\alpha_i\rangle\Big|^2\\ &= \sum_{j\in J}\sum_{\ell\in J}\langle \gamma_k|\beta_j\rangle\langle\beta_j|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|\beta_\ell\rangle\langle\beta_\ell|\gamma_k\rangle.\end{aligned}$$

Note que as probabilidades obtidas nos experimentos 1) e 2) são diferentes em geral.

O ponto não-trivial que estes dois experimentos exemplificam é que o resultado da medição feita no filtro C depende de efetuarmos ou não uma medição intermediária no filtro B. No primeiro caso, determinamos experimentalmente qual dos auto_ valores de B é de fato medido, enquanto que no segundo caso, simplesmente decompomos $|\alpha_i\rangle$ em autoestados de B. Em outras palavras, o simples fato de tomarmos conhecimento das probabilidades de passarmos por cada uma das possíveis rotas de B altera completamente o resultado mesmo que somemos sobre todos os possíveis resultados de uma medição de B.

Note, contudo, que caso A e B ou B e C sejam observáveis compatíveis, as probabilidades calculadas anteriormente coincidem. Ilustramos, pois, que esse fenômeno peculiar é uma característica intrínseca de observáveis incompatíveis."

7.2- A Relação de Incerteza de Heisenberg

O caráter não-determinístico da MQ se manifesta experimentalmente na descrição dos resultados experimentais por distribuições probabilísticas centradas no valor de expectativa. A largura de tais distribuições fornece uma estimativa de quão longe da média, um dado resultado experimental pode ser. Posto de outra forma, a largura de tais distribuições fornece uma noção de precisão da medição experimental. Para caracterizarmos essa dispersão dos valores experimentais, introduzimos o seguinte operador:

$$\Delta A := A - \langle A\rangle \mathbb{1},$$

onde $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é algum observável e seu valor médio é tomado com respeito a um estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ arbitrário. O valor médio de $(\Delta A)^2$ é definido como a dispersão do observável A com respeito ao estado $|\psi\rangle$. Notando que:

$$\langle(\Delta A)^2\rangle = \langle A^2 - 2\langle A\rangle A + \langle A\rangle^2 \mathbb{1}\rangle = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2,$$

obtemos uma definição alternativa para a dispersão, que também é denominada

Variância ou desvio padrão.

Consideremos a dispersão de um observável $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ com respeito a um de seus autovetores, $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}$, $A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle (\Delta A)^2 \rangle &= \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \\
&= \langle \alpha | A^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | A | \alpha \rangle^2 \\
&= \alpha \langle \alpha | A | \alpha \rangle - (\alpha \langle \alpha | \alpha \rangle)^2 \\
&= \alpha^2 \langle \alpha | \alpha \rangle - \alpha^2 \langle \alpha | \alpha \rangle^2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois $\langle \alpha | \alpha \rangle = 1$. Concluímos, pois, que a dispersão de um observável com respeito a um de seus autoestados é nula. Notamos que a recíproca deste resultado também é válida, ou seja, a dispersão de um observável só se anula quando o sistema se encontra em um de seus autoestados. Esse resultado vai ao encontro da interpretação que demos da dispersão como a distância entre um resultado experimental arbitrário e o valor esperado do observável em questão.

Exemplo 7.6: "Qual é a dispersão de S_x quando o sistema se encontra no estado $|S_z+\rangle$?

Neste caso basta calcularmos

$$\langle (\Delta S_x)^2 \rangle = \langle S_x^2 \rangle - \langle S_x \rangle^2 = \langle S_z + | S_x^2 | S_z + \rangle - \langle S_z + | S_x | S_z + \rangle^2$$

Decompondo $|S_z+\rangle$ em autoestados de S_x:

$$|S_z+\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \left(|S_x+\rangle + |S_x-\rangle \right),$$

é fácil verificar que:

$$S_x |S_z+\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{\hbar}{2} \left(|S_x+\rangle - |S_x-\rangle \right),$$

$$S_x^2 |S_z+\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{\hbar^2}{4} \left(|S_x+\rangle + |S_x-\rangle \right),$$

a partir das quais trivialmente calculamos os valores médios desejados:

$$\langle S_x \rangle = \hbar/4 - \hbar/4 = 0,$$

$$\langle S_x^2 \rangle = \hbar^2/8 + \hbar^2/8 = \hbar^2/4,$$

levando-nos à dispersão procurada:

$$\langle (\Delta S_x)^2 \rangle = \hbar^2/4 \text{."}$$

Com isso estamos finalmente em condições de enunciar o princípio da Incerteza de Heisenberg.

Teorema 7.7: " Sejam dois observáveis $A, B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, então

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geqslant \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2,$$

onde as dispersões são calculadas com respeito a um estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ arbitrário. "

Demonstração: Seja $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ um estado arbitrário e considere os estados obtidos pela ação das dispersões de A e B sobre $|\psi\rangle$, i.e.,

$$|\alpha\rangle = \Delta A |\psi\rangle,$$

$$|\beta\rangle = \Delta B |\psi\rangle.$$

Invocando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathcal{H}$,

$$\langle \alpha | \alpha \rangle \langle \beta | \beta \rangle \geqslant |\langle \alpha | \beta \rangle|^2,$$

obtemos:

$$\langle \psi | (\Delta A)^* \Delta A | \psi \rangle \langle \psi | (\Delta B)^* \Delta B | \psi \rangle \geqslant |\langle \psi | (\Delta A)^* \Delta B | \psi \rangle|^2$$

$$\Rightarrow \langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geqslant |\langle \Delta A \, \Delta B \rangle|^2,$$

onde usamos que a dispersão de um operador autoadjunto é autoadjunta. Para avaliar o lado direito da desigualdade acima, notamos que

$$\Delta A\,\Delta B = \frac{1}{2}(\Delta A\Delta B - \Delta B\Delta A + \Delta A\Delta B + \Delta B\Delta A)$$
$$= \frac{1}{2}[\Delta A, \Delta B] + \frac{1}{2}\{\Delta A, \Delta B\},$$

onde o comutador de dois operadores autoadjuntos constitui um operador antiautoadjunto enquanto que o anticomutador, um autoadjunto. Usando que os valores médios de operadores autoadjuntos são reais, e os de operadores antiautoadjuntos são puramente imaginários, podemos escrever que:

$$\langle \Delta A\,\Delta B\rangle = \frac{1}{2}\langle [A,B]\rangle + \frac{1}{2}\langle\{A,B\}\rangle$$

com $\langle\{A,B\}\rangle \in \mathbb{R}$ e $\langle [A,B]\rangle \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Conseqüentemente,

$$\overline{\langle \Delta A\,\Delta B\rangle} = \frac{1}{2}\overline{\langle [A,B]\rangle} + \frac{1}{2}\langle\{A,B\}\rangle.$$

Portanto,

$$|\langle \Delta A\Delta B\rangle|^2 = \overline{\langle \Delta A\,\Delta B\rangle}\langle \Delta A\,\Delta B\rangle = \frac{1}{4}|\langle [A,B]\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle\{A,B\}\rangle|^2$$
$$\geqslant \frac{1}{4}|\langle [A,B]\rangle|^2.$$

Resultando na tese. $\blacksquare$