Mecânica Quântica - Aula 4 - Estados Quânticos

O conceito de estado (de um sistema) na mecânica clássica, conforme discutimos anteriormente, envolve todo o conhecimento necessário para podermos prever o futuro do sistema univocamente. Contudo, como verificamos no exemplo do spin de um elétron através do experimento de Stern-Gerlach, sistemas quânticos não são completamente predizíveis. De uma certa forma podemos dizer que conhecer um estado quântico envolve saber tanto quanto o possível sobre como o sistema foi preparado. Uma importante questão que surge neste contexto é a seguinte:

"Será que a imprevisibilidade do resultado de uma medição quântica é devida a uma descrição incompleta do sistema?"

Existem diversas opiniões correntes sobre a resposta a tal pergunta, as mais relevantes são:

(1) Sim, a noção de estado quântico é <u>incompleta</u>, ou seja, existem variáveis ocultas, cujo conhecimento permitiria uma completa predibilidade dos resultados experimentais. Há duas hipóteses distintas sobre a natureza destas variáveis ocultas:

(a) As variáveis ocultas são experimentalmente acessíveis, porém sua medição é extremamente difícil;

(b) As variáveis ocultas não são experimentalmente acessíveis devido a restrições impostas pela MQ.

(2) Não, a MQ é naturalmente imprevizível.

A despeito de sua aparente importância não há um consenso sobre a resposta derradeira. Ademais, não sabemos se quer se tal pergunta está bem posta ou se sua resposta será realmente útil. Adotaremos o ponto de vista mais pragmático e simples proposto pela segunda asserção. Dessa forma a MQ é tão completa quanto um cálculo de probabilidades permite e nossa tarefa como físicos é aprender as regras deste jogo.

De uma forma mais concreta, adotaremos a hipótese de que quando um aparato SG_z atua sobre o spin eletrônico e mede $S_z = +\frac{\hbar}{2}$ ou $S_z = -\frac{\hbar}{2}$, não há mais nada que se possa saber sobre o estado do sistema. Naturalmente, o mesmo deve ser válido se considerarmos o aparato SG alinhado ao longo de qualquer outro eixo.

4.1 - Estados Quânticos para o Spin

Nosso objetivo nesta seção é construir uma representação para os estados de spin que exiba todas as peculiaridades evidenciadas pelos experimentos de Stern-Gerlach. Para tanto necessitaremos empregar algumas das noções matemáticas introduzidas na aula passada.

Posto que podemos orientar o aparato de SG ao longo de qualquer direção e o resultado de qualquer medição experimental será sempre $\pm\frac{\hbar}{2}$, comecemos rotulando os possíveis estados do spin quando o aparato de SG estiver alinhado com um dos eixos coordenados. Quando o aparato de SG está alinhado com o eixo $\hat{O}_k$, $k = x, y, z$, podemos preparar o sistema em dois estados distintos, correspondendo aos valores $\pm\hbar/2$, que denotamos por $|S_k +\rangle$ e $|S_k -\rangle$. Mais explicitamente,

* SG_z: $+\frac{\hbar}{2} \longrightarrow |S_z +\rangle$: spin para cima;

  $-\frac{\hbar}{2} \longrightarrow |S_z -\rangle$: spin para baixo;

* SG_x: $+\frac{\hbar}{2} \longrightarrow |S_x +\rangle$: spin para a direita;

$-\frac{\hbar}{2} \longrightarrow |S_x -\rangle$: spin para esquerda ;

$* SG_y : +\frac{\hbar}{2} \longrightarrow |S_y +\rangle$: spin para dentro ;

$-\frac{\hbar}{2} \longrightarrow |S_y -\rangle$: spin para fora .

Quando não houver ambigüidade sobre o eixo que consideramos denotaremos tais estados simplesmente por $|+\rangle \equiv |\uparrow\rangle$ e $|-\rangle \equiv |\downarrow\rangle$.

A hipótese de que não existem variáveis ocultas significa que dada uma orientação fixa para o aparato de SG, podemos preparar o sistema em apenas dois estados: $|+\rangle$ e $|-\rangle$. Assim, o espaço de estados pode ser matematicamente representado como um espaço vetorial $\mathcal{H}$ bidimensional. Encontremos uma base para $\mathcal{H}$. Como $\dim \mathcal{H} = 2$, toda base de $\mathcal{H}$ é constituída por dois vetores linearmente independentes de V. Como ao fixarmos SG_z, os estados $|S_z +\rangle$ e $|S_z -\rangle$ são fisicamente distintos, i.e., se prepararmos o sistema com spin para cima, a probabilidade de medirmos $S_z = -\frac{\hbar}{2}$ é nula, podemos com uma certa segurança tomá-los como linearmente independentes. Portanto, consideremos

$$\mathcal{B} = \{ |S_z +\rangle, |S_z -\rangle \} \subseteq \mathcal{H}$$

uma base. Conseqüentemente, qualquer vetor de $\mathcal{H}$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$|a\rangle = \alpha_+ |S_z +\rangle + \alpha_- |S_z -\rangle ; \quad \alpha_+ , \alpha_- \in \mathbb{C} .$$

Supomos inicialmente que $\mathcal{H}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, pois perdemos menos generalidade com tal hipótese, posto que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Constataremos mais tarde, contudo, que somos forçados a tal escolha.

Naturalmente, podemos considerar o dual de $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$. Como $\dim \mathcal{H} = 2$ é finita, segue imediatamente que $\dim \mathcal{H}' = \dim \mathcal{H} = 2$ e que o conjunto

$$\mathcal{B}' = \{ \langle S_z+|, \langle S_z-| \} \subset \mathcal{H}'; \ \langle S_z\pm|S_z\mp\rangle = 0, \ \langle S_z\pm|S_z\pm\rangle = 1$$

constitui uma base de $\mathcal{H}'$. Assim, pela correspondência dual:

$$\mathcal{H} \ni |a\rangle \xleftrightarrow{D.C.} \langle a| = \bar{\alpha}_+ \langle S_z+| + \bar{\alpha}_- \langle S_z-| \in \mathcal{H}'.$$

Adicionalmente, a correspondência dual induz o seguinte produto interno em $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}\times\mathcal{H} \ni (|a\rangle, |b\rangle) \longmapsto \langle a|b\rangle = \bar{\alpha}_+\beta_+ + \bar{\alpha}_-\beta_- \in \mathbb{C}.$$

Com respeito ao qual os vetores da base $\mathcal{B}$ são ortonormais, justificando a posteriori tal escolha.

Claramente, tal produto interno permite escrevermos as componentes de um vetor $|a\rangle \in \mathcal{H}$ arbitrário da seguinte forma:

$$|a\rangle = \alpha_+|S_z+\rangle + \alpha_-|S_z-\rangle \iff \alpha_+ = \langle S_z+|a\rangle, \ \alpha_- = \langle S_z-|a\rangle.$$

O vetor $|a\rangle \in \mathcal{H}$ representa um estado do sistema arbitrário, ou seja, um estado no qual o spin foi preparado de alguma maneira arbitrária. A próxima questão importante que devemos considerar é a seguinte:

"Qual é a interpretação física das componentes $\alpha_+, \alpha_- \in \mathbb{C}$ de um estado (vetor) arbitrário?"

Uma outra maneira de formular tal questão é a seguinte:

"Como relacionamos a representação matemática de um estado por um vetor $|a\rangle \in \mathcal{H}$, com o resultado de medições experimentais?"

Consideremos inicialmente um estado preparado, por exemplo, com o spin para cima,

$$|a\rangle = 1\,|S_z+\rangle.$$

Sabemos que qualquer medição de SG_z tem probabilidade 1 de fornecer o valor

$\hbar/2$, valor que usamos para rotular o estado $|S_z+\rangle$. Isso sugere que interpretemos a componente $\alpha_+ = \langle a|S_z+\rangle$ como a probabilidade de observarmos o sistema no estado $|S_z+\rangle$ após uma medição de SG_z. Contudo, tal interpretação possui um pequeno defeito, pois supomos que $\alpha_+ \in \mathbb{C}$ e, naturalmente, qualquer probabilidade $p \in [0,1] \subset \mathbb{R}$

Por outro lado sabemos que dado um número complexo qualquer $\alpha \in \mathbb{C}$, a combinação $\bar{\alpha}\cdot\alpha \in \mathbb{R}$. Logo, resolvemos o problema da realidade das probalidades interpretanto $\bar{\alpha}_+\alpha_+ = \langle S_z+|a\rangle\langle a|S_z+\rangle = 1$ como a probabilidade de observarmos o sistema com spin para cima após uma medição de SG_z.

De uma forma geral, seja o estado:

$$|a\rangle = \alpha_+|S_z+\rangle + \alpha_-|S_z-\rangle \in \mathcal{H}$$

as quantidades

* $P_+ = \bar{\alpha}_+\alpha_+ = \langle S_z+|a\rangle\langle a|S_z+\rangle$
* $P_- = \bar{\alpha}_-\alpha_- = \langle S_z-|a\rangle\langle a|S_z-\rangle$

representam as probabilidades de que numa medição de SG_z obtenhamos o spin para cima e para baixo, respectivamente. Dois pontos precisam ser clarificados. As quantidades $\langle S_z+|a\rangle$ e $\langle S_z-|a\rangle$, denominadas amplitudes de probabilidade, NÃO são probabilidades! Antes de efetuarmos a medição de SG_z NADA pode ser afirmado sobre o valor de S_z além de que existe uma probabilidade P_+ de medirmos $+\frac{\hbar}{2}$ e P_- de medirmos $-\frac{\hbar}{2}$. Consequentemente, o vetor $|a\rangle$ contém a informação completa sobre as probabilidades das possíveis medições, mas não dos valores de tais medições.

Outra condição necessária para podermos interpretar $\bar{\alpha}_+\alpha_+$ e $\bar{\alpha}_-\alpha_-$ como probabilidades é que a probabilidade de obtermos qualquer valor, $\pm\hbar/2$, seja igual a 1, i.e.,

$$\bar{\alpha}_+\alpha_+ + \bar{\alpha}_-\alpha_- = 1.$$

Note que tal condição é equivalente a:

$$\langle a|a\rangle = \left(\bar{\alpha}_+\langle S_z+| + \bar{\alpha}_-\langle S_z-|\right)\left(\alpha_+|S_z+\rangle + \alpha_-|S_z-\rangle\right) = \bar{\alpha}_+\alpha_+ + \bar{\alpha}_-\alpha_- = 1,$$

ou seja de que o vetor $|a\rangle \in \mathcal{H}$ que representa o estado do sistema é normalizado.

Sumarizemos nossas conclusões sobre como representar um estado quântico.

"O estado de um sistema (quântico) é representado por um vetor normalizado de um espaço vetorial dotado de um produto interno."

4.2- Ao Longo do Eixo $\hat{O}x$

Como $\mathcal{B} = \{|S_z+\rangle, |S_z-\rangle\} \subset \mathcal{H}$ é uma base do espaço de estados do spin $\mathcal{H}$ devemos ser capazes de expressar qualquer estado como uma combinação linear de elementos de $\mathcal{B}$. Em particular, os vetores que representam os estados de spin alinhados ao longo do eixo $\hat{O}x$ devem ser:

$$|S_x+\rangle = x_+|S_z+\rangle + x_-|S_z-\rangle, \quad x_+, x_- \in \mathbb{C};$$

$$|S_x-\rangle = \xi_+|S_z+\rangle + \xi_-|S_z-\rangle, \quad \xi_+, \xi_- \in \mathbb{C}.$$

Nossa tarefa consiste então em determinar as componentes $x_+, x_-, \xi_+, \xi_- \in \mathbb{C}$ de forma a reproduzir as probabilidades das medições de SG_x.

Como discutimos anteriormente quando estudamos experimentos de Stern-Gerlach seqüenciais, se o aparato SG_x inicialmente prepara o sistema em um estado $|S_x+\rangle$, medições imediatas de SG_z produzem $S_z = \pm \hbar/2$ com iguais probabilidades. Logo,

$$\bar{x}_+ x_+ = \bar{x}_- x_- = 1/2 .$$

Uma escolha que satisfaz tal condição é:

$$x_+ = x_- = 1/\sqrt{2} ,$$

que corresponde ao vetor:

$$|S_x+\rangle = 1/\sqrt{2}\, |S_z+\rangle + 1/\sqrt{2}\, |S_z-\rangle .$$

Claramente, existem outras escolhas possíveis para x_+ e x_-, entretanto, como veremos posteriormente, tal ambiguidade está relacionada com a liberdade de escolha das direções dos eixos $\hat{O}_x$ e $\hat{O}_y$ com respeito ao eixo $\hat{O}_z$ já fixado.

Já para determinarmos as componentes do vetor que representa o estado $|S_x-\rangle$, notamos inicialmente que as probabilidades de obtermos $S_z = \pm \hbar/2$ também são iguais:

$$\bar{\xi}_+ \xi_+ = \bar{\xi}_- \xi_- = 1/2 .$$

Contudo, para fixarmos ξ_+ e ξ_- necessitamos de mais uma condição, a saber, que se prepararmos o sistema no estado $|S_x+\rangle$ a probabilidade de medirmos $S_x = -\hbar/2$ é nula, e vice-versa. Matematicamente, tal condição equivale à ortogonalidade de $|S_x+\rangle$ e $|S_x-\rangle$, i.e.,

$$\langle S_x \pm | S_x \mp \rangle = 0 .$$

Com isso conseguimos determinar:

$$\xi_+ = -\xi_- = 1/\sqrt{2} ,$$

de forma que:

$$|S_x-\rangle = 1/\sqrt{2}\, |S_z+\rangle - 1/\sqrt{2}\, |S_z-\rangle$$

Exercício 4.1: "Demonstre que as representações escolhidas para $|S_x \pm\rangle$ são ortonormais."

O leitor arguto deve ter notado que também temos uma certa ambigüidade na escolha das componentes $\xi_+, \xi_- \in \mathbb{C}$. De fato, se tivessemos multiplicado ambas as componentes pela fase $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\widetilde{|S_x -\rangle} = e^{i\theta}|S_x -\rangle = e^{i\theta}/\sqrt{2}\,|S_z +\rangle - e^{i\theta}/\sqrt{2}\,|S_z -\rangle \in \mathcal{H}$$

também satisfaz as condições:

(1) $|\widetilde{\langle S_x -}|S_z \pm\rangle|^2 = 1/2$;

(2) $\langle S_x +\widetilde{|S_x -\rangle} = 0$.

(3) $\widetilde{\langle S_x -}\widetilde{|S_x -\rangle} = 1$

Exercício 4.2: "Verifique as afirmações (1)-(3) acima."

Essa ambigüidade é denominada ambigüidade de fase. Veremos posteriormente que nenhuma quantidade fisicamente observável é sensível a tal fator de fase global. Logo, podemos ignorá-lo, quando especificamos um estado.

4.3 - Ao longo do Eixo $\hat{O}y$

Resta encontrarmos uma representação dos estados $|S_y +\rangle$ e $|S_y -\rangle$ em termos da base $\mathcal{B} = \{|S_z +\rangle, |S_z -\rangle\}$, i.e., determinar as componentes $y_+, y_-, \chi_+, \chi_- \in \mathbb{C}$ tais que:

$$|S_y +\rangle = y_+|S_z +\rangle + y_-|S_z -\rangle \;;$$

$$|S_y -\rangle = \chi_+|S_z +\rangle + \chi_-|S_z -\rangle \,.$$

Sabemos de nossos experimentos com o aparato de SG que os estados $|S_y +\rangle$ e

$|S_y -\rangle$ são fisicamente distinguíveis. Portanto, devem ser representados por estados ortogonais:

$$\langle S_y + | S_y - \rangle = 0 .$$

Por outro lado sabemos que se prepararmos o sistema em $|S_z +\rangle$ a probabilidade de medirmos $S_y = \pm \hbar/2$ é $1/2$. O mesmo é válido se prepararmos o sistema em $|S_z -\rangle$. Logo,

$$|\langle S_z + | S_y + \rangle|^2 = 1/2 \; ;$$
$$|\langle S_z + | S_y - \rangle|^2 = 1/2 \; ;$$
$$|\langle S_z - | S_y + \rangle|^2 = 1/2 \; ;$$
$$|\langle S_z - | S_y - \rangle|^2 = 1/2 .$$

Similarmente, se prepararmos o sistema em $|S_x +\rangle$ ou $|S_x -\rangle$ obtemos:

$$|\langle S_x + | S_y + \rangle|^2 = 1/2 \; ;$$
$$|\langle S_x + | S_y - \rangle|^2 = 1/2 \; ;$$
$$|\langle S_x - | S_y + \rangle|^2 = 1/2 \; ;$$
$$|\langle S_x - | S_y - \rangle|^2 = 1/2 .$$

Impondo adicionalmente que $|S_y +\rangle$ e $|S_y -\rangle$ estejam normalizados, de forma a garantir a interpretação probabilística:

$$\langle S_y + | S_y + \rangle = 1 \quad \text{e} \quad \langle S_y - | S_y - \rangle = 1 ,$$

concluímos que a menos da ambigüidade de fase os vetores $|S_y +\rangle$ e $|S_y -\rangle$ são dados por:

$$|S_y+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S_z+\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|S_z-\rangle\ ;$$
$$|S_y-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S_z+\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|S_z-\rangle\ .$$

Exercício 4.3: "Verifique que os vetores $|S_y\pm\rangle$ de fato satisfazem as condições que desejamos."

Os estados $|S_y\pm\rangle$ constituem o nosso primeiro exemplo da inevitabilidade de se empregar espaços vetoriais sobre o corpo dos números complexos na MQ. Contudo, da forma que construímos tais vetores não é óbvio que tal necessidade não passa de uma mera conveniência. O próximo exercício fornece um meio para comprovarmos tal necessidade.

Exercício 4.4: " Sejam $|S_y+\rangle = y_+|S_z+\rangle + y_-|S_z-\rangle$ e $|S_y-\rangle = x_+|S_z+\rangle + x_-|S_z-\rangle$,

(a) Use as relações de $|S_y\pm\rangle$ com $|S_z\pm\rangle$ para demonstrar que:
$$y_+\bar{y}_+ = y_-\bar{y}_- = x_+\bar{x}_+ = x_-\bar{x}_- = 1/2 .$$

(b) Use as relações de $|S_y\pm\rangle$ com $|S_x\pm\rangle$ e a relação acima para demonstrar que:
$$y_+\bar{y}_- + \bar{y}_+y_- = x_+\bar{x}_- + \bar{x}_+x_- = 0 .$$

(c) Mostre que $\bar{y}_+y_-,\ \bar{x}_+x_- \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

(d) O que isso nos permite concluir sobre a realidade das componentes y_+, y_-, x_+ e x_- ? "

4.4 - Graus de Liberdade

Um conceito central empregado na descrição de sistemas clássicos foi o de graus de liberdade, que representa o número de variáveis necessárias para descrevermos mate_ maticamente o sistema em estudo. Naturalmente, tal conceito deve ter uma contraparte quântica, cuja análise é fundamental para obtermos uma descrição matemática completa dos fenômenos físicos. Posto de uma forma mais concreta, o número de graus de liberdade de um sistema fornece uma noção do tamanho de seu espaço de estados. Como na MQ, o espaço de estados é um espaço vetorial, o número de graus de liberdade deve estar relacionado com a dimensão do espaço vetorial.

Analisemos inicialmente a dimensão do espaço vetorial $\mathcal{H}$ que construímos nas seções anteriores para representarmos os estados de spin no experimento de Stern-Gerlach. Ao fixarmos a base $\mathcal{B} = \{|S_z+\rangle, |S_z-\rangle\}$ verificamos que os demais estados podiam ser escritos como combinações lineares da forma:

$$|a\rangle = \alpha_+ |S_z+\rangle + \alpha_- |S_z-\rangle \;;\; \alpha_+, \alpha_- \in \mathbb{C}.$$

Assim, de uma forma ingênua precisamos de 2 parâmetros complexos ou 4 reais para completamente determinarmos um estado, correspondendo a

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} = 2 \;,\; \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H} = 4.$$

Contudo, como discutimos anteriormente não é qualquer par de números complexos α_+, α_- que determina um estado físico. Vimos que para garantir a interpretação probabilística da MQ precisamos lidar apenas com estados <u>normalizados</u>, i.e.,

$$|\langle a|a\rangle|^2 = 1 \Rightarrow \bar{\alpha}_+ \alpha_+ + \bar{\alpha}_- \alpha_- = 1,$$

que fornece um vínculo entre os números complexos α_+, α_-. Conseqüentemente, em vez de termos 4 componentes reais independentes passamos a ter apenas 3 componentes reais independentes. Adicionalmente, aprendemos que um estado físico <u>não</u> pode depender de um fator de fase global. Portanto, dos 3 parâmetros reais, concluímos que mais um é redundante. Logo, para especificarmos um estado físico neste exemplo precisamos de apenas 1 parâmetro complexo ou 2 parâmetros reais, ou seja,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} = 1 \quad , \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H} = 2 .$$

Uma pergunta pertinente neste momento é:

"Há alguma forma independente da representação matemática vetorial adotada de sabermos quantos graus de liberdade (parâmetros reais) precisamos para caracterizar um sistema quântico?"

De uma forma geral a resposta a tal questão é afirmativa, muito embora dependa intrinsecamente do sistema sob análise. Por concreteza, consideremos os nossos experimentos de Stern-Gerlach. A única liberdade que temos ao prepararmos o aparato experimental é a escolha da direção ao longo da qual alinhamos o aparato de SG. Como uma direção espacial é determinada por um vetor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ normalizado, $\|\mathbf{n}\| = 1$, concluímos que apenas dois parâmetros reais são necessários para fixar uma direção no espaço tridimensional. Logo, precisamos de apenas dois graus de liberdade!

Concluímos, pois, que na MQ a dimensão do espaço vetorial que adotamos como o espaço de estados é determinada pelo número de graus de liberdade do sistema.

4.5 - Representações Concretas de Estados de Spin

Ao representarmos abstratamente os estados por vetores da forma:

$$|a\rangle = \alpha_+ |S_z+\rangle + \alpha_- |S_z-\rangle \in \mathcal{H}$$

podemos facilmente nos concentrar nas relações matemáticas entre os diversos estados sem nos preocuparmos com detalhes irrelevantes. No entanto, na hora de calcularmos explicitamente uma dada probabilidade ou amplitude de probabilidade, é mais conveniente adotarmos uma representação concreta em termos de vetores coluna. Naturalmente, devido à ambigüidade de fase, já não devemos em princípio esperar que tais representações sejam únicas. Apesar de aparentemente ser uma limitação, podemos explorar tal ambigüidade para escolhermos sem perda de generalidade a representação mais simples e conveniente.

Por lidarmos com um espaço vetorial, basta fixarmos uma representação concreta para os vetores da base. Fixemos $B = \{|S_z+\rangle, |S_z-\rangle\}$ como a base de $\mathcal{H}$. Precisamos como vetores colunas com $\dim B = 2$ componentes, ortogonais e unitários. De fato, a base canônica de $\mathbb{C}^2$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

satisfaz tais requisitos. Tomemos, pois, sem perda de generalidade:

$$|S_z+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |S_z-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 4.5: "Represente na base B os estados: $|S_x \pm\rangle, |S_y \pm\rangle \in \mathcal{H}$."

4.6 - Axiomas da MQ

Os resultados que discutimos nesta aula para o experimento de Stern-Gerlach exemplificam alguns dos princípios fundamentais da MQ, que por conveniência agrupamos no nosso primeiro axioma:

AXIOMA 1: "O espaço de estados de um sistema quântico é descrito por um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e todo estado físico é descrito por um vetor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. Ademais, dois vetores $|\psi\rangle$ e $c|\psi\rangle$, $c \in \mathbb{C}^*$ representam o mesmo estado."

Conforme aprofundarmos nossos estudos outros princípios fundamentais da MQ serão revelados e compilados nos demais axiomas da MQ.