

MECÂNICA QUÂNTICA - AULA 2 - A LÓGICA QUÂNTICA

No final da última aula, estudamos o experimento de Stern-Gerlach que nos permitiu medir, a menos de um fator de proporcionalidade o spin do 47° elétron de um átomo de prata. Aprendemos, em contraponto à expectativa clássica, que a componente z do spin de tal elétron admite apenas dois valores:

$$S_z = \pm \hbar/2.$$

Permitindo-nos, pois, considerar tal sistema como um **sistema de dois níveis**. Nessa aula pretendemos examinar outras consequências do experimento de Stern-Gerlach, que nos mostrarão como a lógica quântica foge às nossas expectativas clássicas.

2.1 - Experimentos de Stern-Gerlach Sequenciais

Consideramos nesta seção o que acontece quando o feixe de átomos de prata passa por diversos aparatos de SG em sequência. Como não há nada de especial na direção $\hat{O}_z$ ao longo da qual alinhamos o campo magnético inhomôneo originalmente, devemos considerar as situações nas quais ele está alinhado em outras direções. Posto que lidamos com um sistema imerso em $\mathbb{R}^3$, basta considerarmos os casos correspondentes ao campo magnético alinhado com os três eixos coordenados: $\hat{O}_x$, $\hat{O}_y$ e $\hat{O}_z$. Denotaremos o aparato de Stern-Gerlach alinhado ao longo do eixo:

* $\hat{O}_x$ por SG_x ;

* $\hat{O}_y$ por SG_y ;

* $\hat{O}_z$ por SG_z .

O primeiro arranjo que consideramos é relativamente simples.

Figura 2.1 " Arranjo experimental .

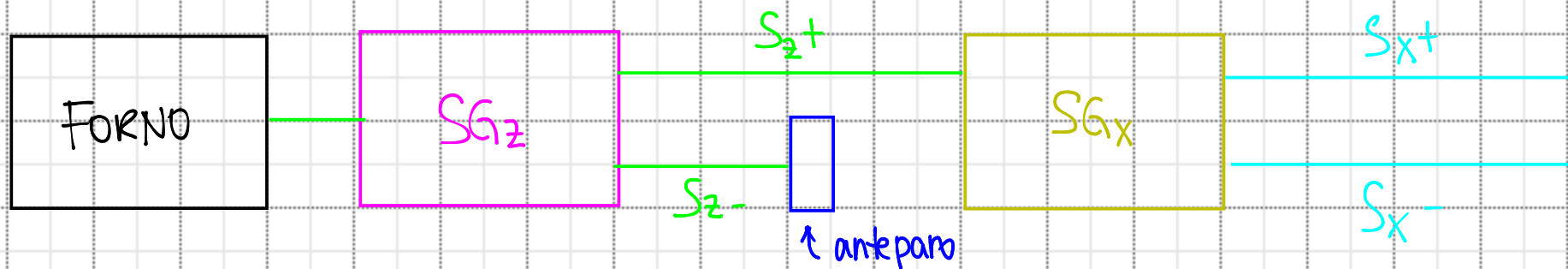


Nele o feixe de átomos de prata passa inicialmente por um SG_z , que divide o feixe em duas componentes S_{z+} e S_{z-} , bloqueamos a componente S_{z-} com um anteparo adequado e medimos o feixe composto apenas pela componente S_{z+} com um segundo aparato SG_z . Desta vez o feixe resultante apresenta apenas a componente S_{z+} .

Tal resultado não é de todo surpreendente, posto que todos os átomos que entraram no segundo aparato tinham spins para cima, S_{z+} , e a menos de fatores externos que rodassem os spins entre os dois aparatos de SG_z , deveriam permanecer os mesmos.

O segundo arranjo experimental que consideramos é, no entanto, mais intrigante.

Figura 2.2 " Arranjo experimental .



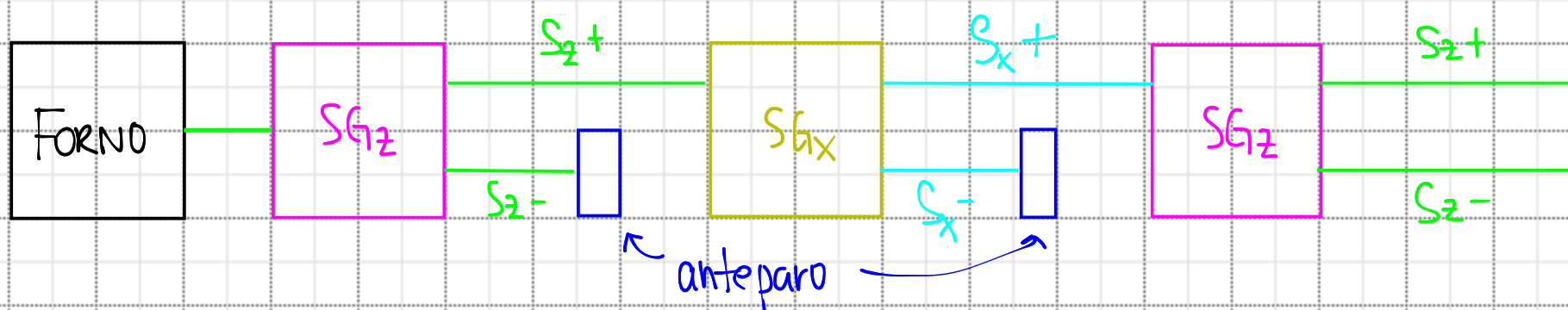
Nele trocamos o segundo aparato SG_z por um SG_x . O resultado: apesar de entrar em SG_x um feixe composto unicamente por átomos com S_{z+} , o feixe resultante é

novamente dividido em duas componentes com igual intensidade que denominamos S_{x+} e S_{x-} .

"Como podemos explicar esse comportamento?"

Classicamente, esperaríamos que tal resultado significasse que os átomos no feixe com S_z+ fossem compostos 50% por átomos com S_z+ e S_{x+} , enquanto que os 50% remanescentes apresentariam S_z+ e S_{x-} . Entretanto, conforme demonstrado pelo nosso próximo aparato experimental a nossa intuição clássica não poderia estar mais errada.

Figura 2.3: "Aparato experimental."



No experimento ilustrado na figura 2.3 adicionamos um segundo aparato SG_z . É observado experimentalmente que não uma, mas **duas** componentes emergem do segundo aparato SG_z ; i.e., o feixe que sai do segundo aparato SG_z apresenta tanto a componente S_z+ quanto a componente S_z- . É importante enfatizar que apesar de termos completamente bloqueado a componente S_z- após o primeiro aparato SG_z , ela reaparece após a segunda medição de SG_z . Portanto, fica claro que a expectativa clássica de os átomos serem caracterizados simultaneamente por S_z+ e S_{x+} não

pode estar correta.

A sequência de experimentos de Stern-Gerlach que consideramos ilustra uma característica central da MQ, a existência de quantidades que não podem ser determinadas simultaneamente para um dado sistema. No exemplo em questão ao medirmos a componente S_x destruímos qualquer informação que tínhamos sobre a componente S_z . É essencial, no entanto, enfatizar que a impossibilidade encontrada na determinação simultânea de S_z e S_x não é devida a nenhuma limitação de caráter experimental, ou seja, não importa o quanto melhorarmos as técnicas de detecção, não conseguiremos eliminar a componente S_z^- que emerge do segundo aparato SG_z . Tal limitação é de fato inerente ao próprio experimento e subjaz o **princípio da incerteza**.

Os experimentos de Stern-Gerlach sequenciais nos ensinaram diversos fatos centrais da natureza quântica do sistema de dois níveis constituído pelo spin de um elétron. Para maior clareza da discussão posterior resumiremos tais resultados abaixo:

- 1) Dado um elétron não temos como saber a priori a componente S_z de seu spin, contudo, uma vez medida como sendo S_z^+ ou S_z^- quaisquer futuras medições de S_z confirmarão o resultado inicial. Logo, sempre podemos preparar o estado do nosso sistema como sendo S_z^+ ou S_z^- .
- 2) Tendo preparado nosso sistema com S_z^+ uma subsequente medida de S_x , produz valores $+1$ (S_x^+) e -1 (S_x^-) com igual probabilidade de 50%.

Consequentemente, apesar do resultado da medição da componente S_x de um sistema preparado com $S_z +$ ser aleatoriamente ± 1 , o valor médio de tais medições é nulo, pois ambos os resultados têm o mesmo peso estatístico. Com isso concluímos que S_z , S_x e também S_y não constituem as componentes de um "vetor clássico" que representa direção no espaço, como, por exemplo, as componentes do campo magnético $\mathbf{B}$. Afinal, se o fossem, para um sistema preparado com $S_z +$, a componente S_x (ou S_y) deveria ser necessariamente nula. Contudo, recuperamos a expectativa clássica ao considerarmos o valor médio das medições de S_x . Assim, o determinismo clássico é violado, mas de uma forma que recuperamos o resultado clássico ao considerarmos as médias de nossas medições.

3) Existe um limite superior para o nosso conhecimento sobre um certo estado de um dado sistema.

2.2 - Experimentos São Sempre Invasivos

A nossa última conclusão revela uma disparidade fundamental entre os mundos clássico e quântico. Conforme já dissemos, todo experimento envolve um pelo menos um segundo sistema além do que está sob estudo, a saber, o aparato que realiza as medições e anota os resultados. Para tanto é imprescindível que tal aparato interaja com o sistema sob escrutínio. Posto desta forma, é óbvio que todo experimento é invasivo.

Contudo, do ponto de vista clássico raramente nos preocupamos com tal sutileza. O motivo para tanto é que classicamente um aparato experimental ideal provoca um efeito tão desprezível quanto se queira sob o sistema analisado. Experimentos clássicos podem ser arbitrariamente gentis e ainda assim efetuar medições com enorme precisão. Por exemplo, para sabermos em qual estado a nossa moeda se encontra podemos inidir luz arbitrariamente fraca e ainda assim seremos capazes de formar uma imagem nítida o suficiente para distinguir entre cara e coroa. Em outras palavras o processo de medição clássico envolve quantidades arbitrariamente pequenas de energia.

Por outro lado na MQ qualquer interação que é suficientemente forte para determinar alguma característica do sistema em estudo, é necessariamente também forte o suficiente para alterar algum outro aspecto do sistema. Portanto, de uma maneira geral, não podemos aprender nada sobre um sistema quântico sem alterá-lo de alguma forma.

2.3 - Proposições Clássicas e Quânticas

Nesta seção analisamos brevemente as diferenças entre as lógicas da MC e da MQ. Como vimos anteriormente o espaço de estados clássico é representado por um conjunto. Por exemplo,

1) Para uma moeda: $S = \{+1, -1\}$;

2) Para um d6: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

A lógica subjacente à teoria dos conjuntos é denominada **lógica booleana**. Um conceito central neste contexto é o de **veracidade** de uma proposição. Claramente, uma proposição pode apenas ser **falsa** ou **verdadeira**.

Definição 2.4: "Seja S um conjunto, uma proposição P separa S em duas componentes disjuntas:

$$S = V \cup F, \quad V \cap F = \emptyset.$$

Dizemos que a proposição P é **verdadeira** para os elementos de $V \subseteq S$ e **falsa** para os elementos de seu complementar $F = S \setminus V \subseteq S$."

Exemplo 2.5: "Seja $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o espaço de estados de um d6, dois exemplos de proposições são:

* P_1 : O dado mostra uma face com um número ímpar,

$$V = \{1, 3, 5\}, \quad F = \{2, 4, 6\};$$

* P_2 : O dado mostra um número menor do que 4,

$$V = \{1, 2, 3\}, \quad F = \{4, 5, 6\}."$$

Existem certas operações com as quais podemos atuar sobre as proposições:

1) **Negação**: Dada uma proposição P representada pelo conjunto $V \subseteq S$ onde ela é verdadeira, representamos a sua negação, ou seja, **não- P** ou $\neg P$ pelo complementar de V com respeito ao conjunto S , i.e., $S \setminus V \subseteq S$.

2) **E**: Sejam P_1 e P_2 duas proposições representadas respectivamente pelos subconjuntos onde são verdadeiras, $V_1 \subseteq S$ e $V_2 \subseteq S$. Dizemos que a

P_1 e P_2 é verdadeira no subconjunto $V_1 \cap V_2 \subseteq S$.

3) Ou: Por outro lado, dizemos que P_1 ou P_2 é verdadeira no subconjunto $V_1 \cup V_2 \subseteq S$.

É importante ressaltar que o operador lógico ou que definimos acima é conhecido como **ou inclusivo**, de forma que P_1 ou P_2 é verdadeira quando:

- * apenas P_1 é verdadeira;
- * apenas P_2 é verdadeira;
- * P_1 e P_2 são simultaneamente verdadeiras.

Exemplo 2.6: " Sejam P_1 e P_2 como no exemplo 2.5. Neste caso os subconjuntos onde as afirmações P_1 , P_2 , P_1 e P_2 e P_1 ou P_2 são verdadeiras são:

- * P_1 : O dado não mostra uma face com um número ímpar

$$V_{P_1} = \{2, 4, 6\};$$

- * P_2 : O dado não mostra um número menor do que 4:

$$V_{P_2} = \{4, 5, 6\};$$

- * P_1 e P_2 : o dado mostra um número ímpar e menor do que 4:

$$V_{P_1 \text{ e } P_2} = V_{P_1} \cap V_{P_2} = \{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 3\};$$

- * P_1 ou P_2 : o dado mostra um número par ou menor do que 4:

$$V_{P_1 \text{ ou } P_2} = V_{P_1} \cup V_{P_2} = \{1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 5\}. "$$

Testando Proposições Clássicas

Consideramos agora um "análogo" clássico para o spin, que, como vimos anteriormente constitui um sistema quântico de dois níveis. Posto que classicamente poderíamos saber

simultaneamente o valor de cada componente S_x, S_y e S_z , concluímos que um "análogo" clássico para o spin é dado por um sistema de três moedas com as variáveis σ_x, σ_y e σ_z podendo assumir os valores ± 1 .

Dois possíveis proposições sobre o nosso spin clássico são as seguintes:

- * $P_1: \sigma_z = +1;$

- * $P_2: \sigma_x = +1.$

É claro que cada uma dessas afirmações possui um sentido físico, pois podem ser individualmente observadas. Suas negações também estão bem definidas:

- * $\neg P_1: \sigma_z = -1;$

- * $\neg P_2: \sigma_x = -1.$

Podemos, ademais considerar as seguintes proposições:

- * $P_1 \text{ ou } P_2: \sigma_z = +1 \text{ ou } \sigma_x = +1;$

- * $P_1 \text{ e } P_2: \sigma_z = 1 \text{ e } \sigma_x = 1.$

A seguir consideramos como poderíamos testar classicamente a proposição $P_1 \text{ ou } P_2$:

- * Primeiramente meça σ_z . Se o valor for $+1$, verificamos que $P_1 \text{ ou } P_2$ é verdadeira! Se $\sigma_z = -1$, prosseguimos para o próximo passo;

- * Meça σ_x , se o valor for $+1$, então a proposição $P_1 \text{ ou } P_2$ é verdadeira. Se $\sigma_x = -1$, então a proposição $P_1 \text{ ou } P_2$ é falsa!

Naturalmente, poderíamos considerar um procedimento experimental que meça inicialmente σ_x e depois σ_y , ou seja, considerar a proposição $P_2 \text{ ou } P_1$. Se representarmos o conjunto onde P_1 é verdadeira por V_1 e o conjunto onde P_2 é verdadeira por V_2 , temos

que o conjunto onde P_2 ou P_1 é verdadeira corresponde a $V_2 \cup V_1$. Como a união de conjuntos é comutativa $V_2 \cup V_1 = V_1 \cup V_2$, logo, somos forçados a concluir que as afirmações P_2 ou P_1 e P_1 ou P_2 são **equivalentes**. Experimentalmente, tal constatação reflete o fato de que medições clássicas podem ser arbitrariamente gentis, de modo que não afetam medições subsequentes.

Testando Proposições Quânticas

A seguir consideramos proposições análogas para o spin real, ou seja, quântico. Sejam

* $Q_1: S_z +$,

* $Q_2: S_x +$.

Queremos verificar se as proposições Q_1 ou Q_2 e Q_2 ou Q_1 são verdadeiras. Para simplificar um pouco a análise, sem contudo perder as consequências relevantes, vamos supor que partimos de um estado preparado com $S_z +$.

* Testando Q_1 ou Q_2 : começamos medindo S_z com um aparato SG_z , como o estado foi inicialmente preparado como $S_z +$, sabemos que qualquer medição subsequente de S_z produzirá o mesmo resultado, ou seja, $S_z +$. Portanto, temos que Q_1 ou Q_2 é necessariamente verdadeira. Não precisamos sequer medir S_x .

* Testando Q_2 ou Q_1 : começamos medindo S_x com um aparato SG_x , como o estado foi inicialmente preparado com $S_z +$, o resultado da medição de S_x é perfeitamente aleatório. Se obtivermos $S_x +$, concluímos pela veracidade

de Q_2 ou Q_1 . Entretanto, se obtivermos S_x- precisamos medir ainda S_z . É imprescindível notar que neste caso, após termos medido S_x , independente do resultado, o sistema **não** se encontra mais no estado original, S_z+ . Logo, qualquer medição subsequente de S_z tem 50% de probabilidade de fornecer S_z+ e 50% de probabilidade de fornecer S_z- . Portanto, de acordo com a MQ há uma probabilidade de $1/4$ de o experimento fornecer S_x- e S_z- , ou seja, há 25% de chance de a proposição Q_2 ou Q_1 ser **falsa**!

Evidentemente, neste exemplo o operador lógico ou **não** é comutativo. A verdade depende da **ordem** na qual as medições são efetuadas, ou seja, da **ordem** na qual verificamos a validade das proposições. Tal contraponto às expectativas clássicas indica que não apenas as leis da MQ são diferentes das da MC, mas suas fundamentações lógicas são também díspares!

Um outro ponto onde as lógicas clássica e quântica colidem surge quando consideramos a proposição P_1 e P_2 e Q_1 e Q_2 . A veracidade da proposição clássica P_1 e P_2 pode ser estabelecida de maneira análoga à utilizada no caso P_1 ou P_2 . Entretanto, como argumentaremos a seguir a proposição quântica Q_1 e Q_2 sequer está bem definida.

Para verificarmos Q_1 e Q_2 , precisamos inicialmente medir S_z . Suponha por simplicidade que obtemos S_z+ . A seguir precisamos medir S_x , suponha adicionalmente que tenhamos observado S_x+ . Claramente, tal resultado é viável, a pergunta relevante é a seguinte:

"Observar S_z+ e subsequentemente S_x+ implica a veracidade de Q_1 e Q_2 ? "

Surpreendentemente, a resposta a tal pergunta é **negativa**. Esclareçamos tal ponto! Em ciência, e especialmente na Física, a veracidade de uma proposição demanda sua confirmação por experimentos posteriores. No contexto clássico, não surge nenhum problema neste ponto, pois os experimentos **não alteram** o estado do sistema, de forma que medições posteriores **não são afetadas** por experimentos prévios. No entanto, aprendemos que na MQ, qualquer medição **altera** o estado do sistema. Assim, ao determinarmos que a componente x do spin é $S_x +$ **destruímos** qualquer informação prévia sobre S_z , posto que o aparato de S_z produzirá um resultado perfeitamente aleatório. Logo, no contexto quântico a proposição Q_1 e Q_2 **não é confirmável**, e portanto, sequer faz sentido!

A consequência prática mais imediata da nossa discussão é que precisamos de uma nova estrutura matemática para descrever os conceitos quânticos de estado e espaço de estados. Tal será o tema de nossa próxima aula.