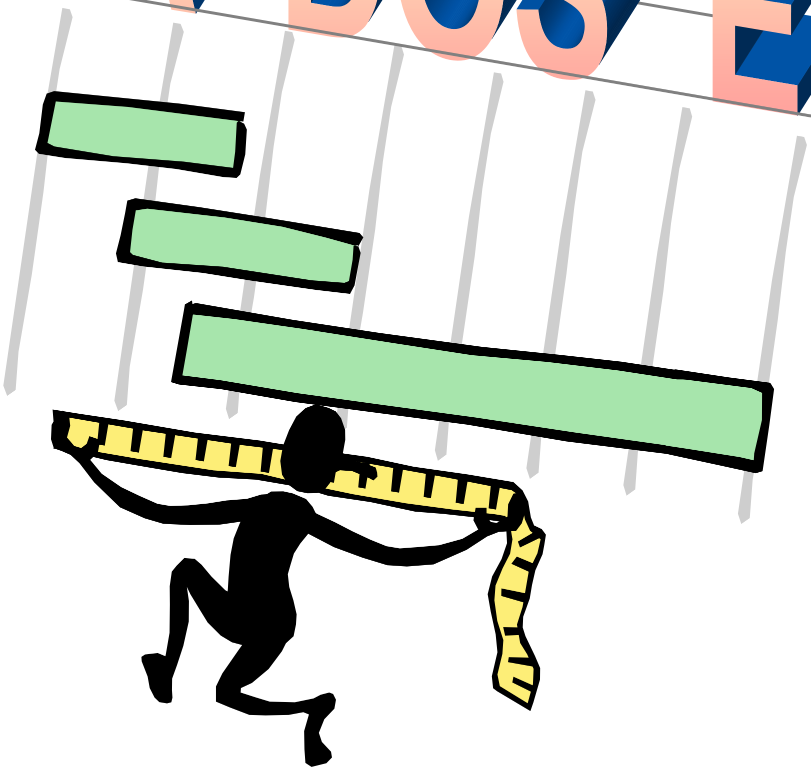
# TEORIA DOS ERROS



# TEORIA DOS ERROS

Na Geodésia e na Topografia se realizam medições de ângulos, distâncias, etc.

- **Medir** uma grandeza significa obter um número associado a uma unidade que represente o valor dessa grandeza.

Tudo o que se pode medir (observar) é denominado observável. Um conjunto de medições de uma grandeza constituem as observações.

# TEORIA DOS ERROS

- **Erro:** é a diferença entre o valor verdadeiro da grandeza física (desconhecido) e o valor obtido na medida.


**Topografia: medição de grandezas espaciais**

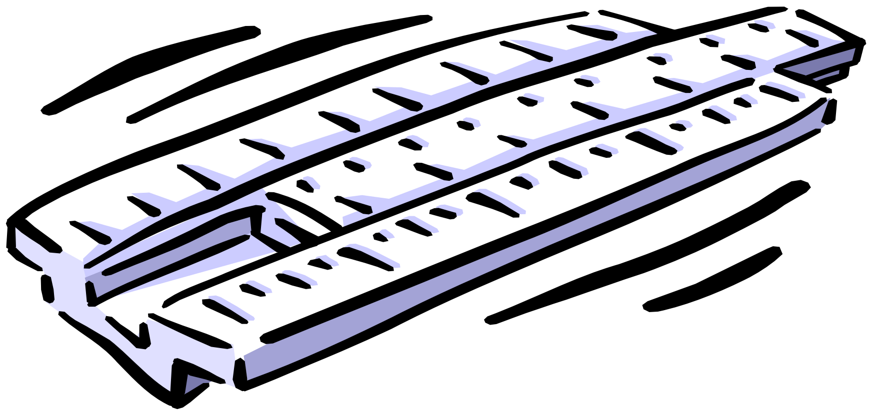
- A **Teoria dos Erros** preconiza que o valor verdadeiro de uma grandeza é desconhecido.

# MEDIÇÃO DE UMA GRANDEZA

Uma grandeza é definida quando se conhece o seu **valor** e a sua **precisão**, considerando somente erros aleatórios.

**Ex.:** 3.278,456 m ± 0,001 m

VALOR PRECISÃO



# MEDIÇÃO DE UMA GRANDEZA

As observações podem ser:

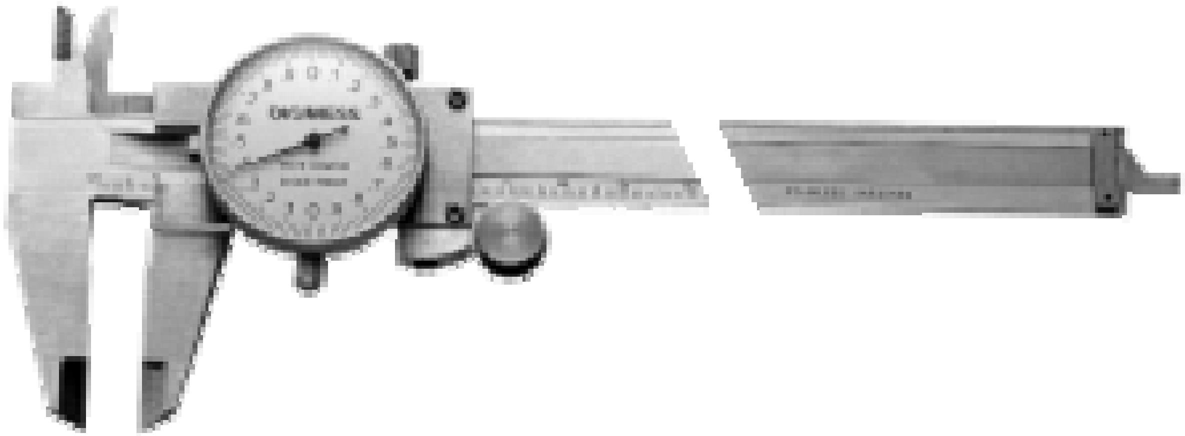
- **Diretas:** A própria grandeza a medir é observada. (Ex.: Ângulos de um triângulo)

- **Indiretas:** Observa-se uma certa grandeza que se relaciona com aquela que se quer obter através de um modelo matemático. (Ex.: Mede-se a distância e o ângulo para se obter as coordenadas).

# MEDIÇÃO DE UMA GRANDEZA

## Fatores que Influenciam uma Observação

- **Operador:** Limitações pessoais
- **Custo da Operação:** Tempo e cuidado exigidos
- **Método de Medição:** Instrumentos, metodologias
- **Dificuldades Técnicas e Operacionais**



# PRECISÃO

Controle do erro máximo, associado ao **Instrumento de Medida.**

Por exemplo: teodolito com *precisão de 10”*

- **Precisão Nominal:** menor divisão da graduação do instrumento.

- **Precisão efetiva:** ***erro médio quadrático***, resultante de uma série de observações, em condições bem caracterizadas.

# PRECISÃO DE UMA MEDIDA

Expressa o grau de aderência das observações umas às outras e à média.

Vincula-se a efeitos aleatórios

Mede a dispersão das observações em torno da média

É estabelecida pelo Desvio Padrão

# EXATIDÃO OU ACURÁCIA

Expressa o grau de aderência do melhor valor para as observações em relação ao **VALOR VERDADEIRO**.

(na prática: compara-se com um valor mais preciso de referência)

Vincula-se a efeitos aleatórios e efeitos sistemáticos.

# PRECISÃO E ACURÁCIA

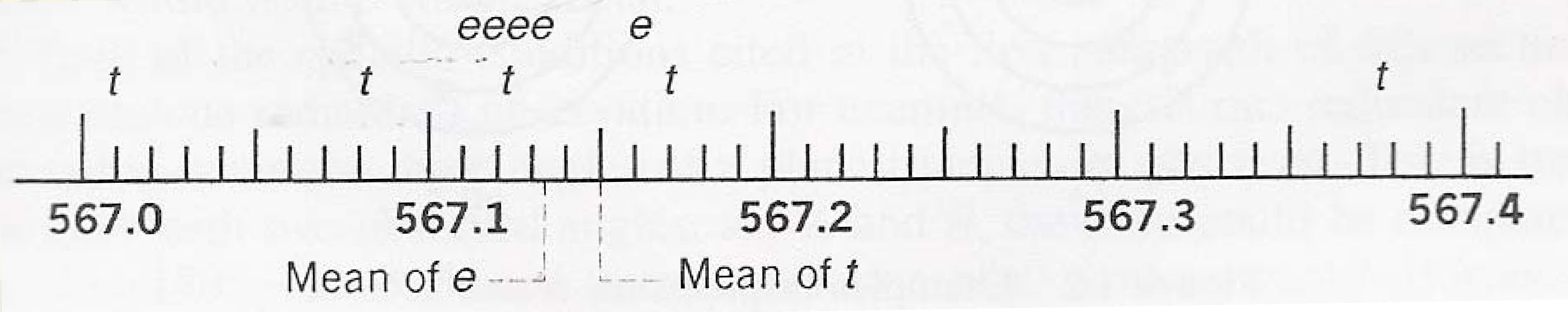
Com precisão e sem acurácia

Sem acurácia e sem precisão

Com acurácia e com precisão

# PRECISÃO E ACURÁCIA

| Observation | Pacing, *p* | Taping, *t* | EDM, *e* |
|---|---|---|---|
| 1 | 571 | 567.17 | 567.133 |
| 2 | 563 | 567.08 | 567.124 |
| 3 | 566 | 567.12 | 567.129 |
| 4 | 588 | 567.38 | 567.165 |
| 5 | 557 | 567.01 | 567.114 |



# ERROS GROSSEIROS

**Resultam de:**

- Descuidos do operador (inversão ou omissão de dígitos)
- Falha instrumental grave
- Imperícia

# ERROS SISTEMÁTICOS

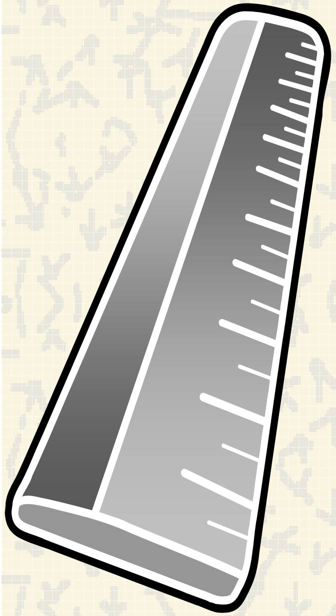
- Constantes ou variáveis;

- Causados de forma ***permanente*** e ***conhecida***, por:

- percepções do operador
- calibragem dos instrumentos
- fatores naturais
- precisão do método

- **Tendem a se acumular**

# ERROS ACIDENTAIS OU ALEATÓRIOS



- Causas desconhecidas de ocorrência aleatória e probabilística;
- Tendem a se acumular;
- Precedido de duplo sinal algébrico ($\pm e_a$);
- Princípios da estatística são usados para determinar o valor mais provável do parâmetro e sua precisão:
- Quando o número de observações cresce, os erros aleatórios revelam certa regularidade.

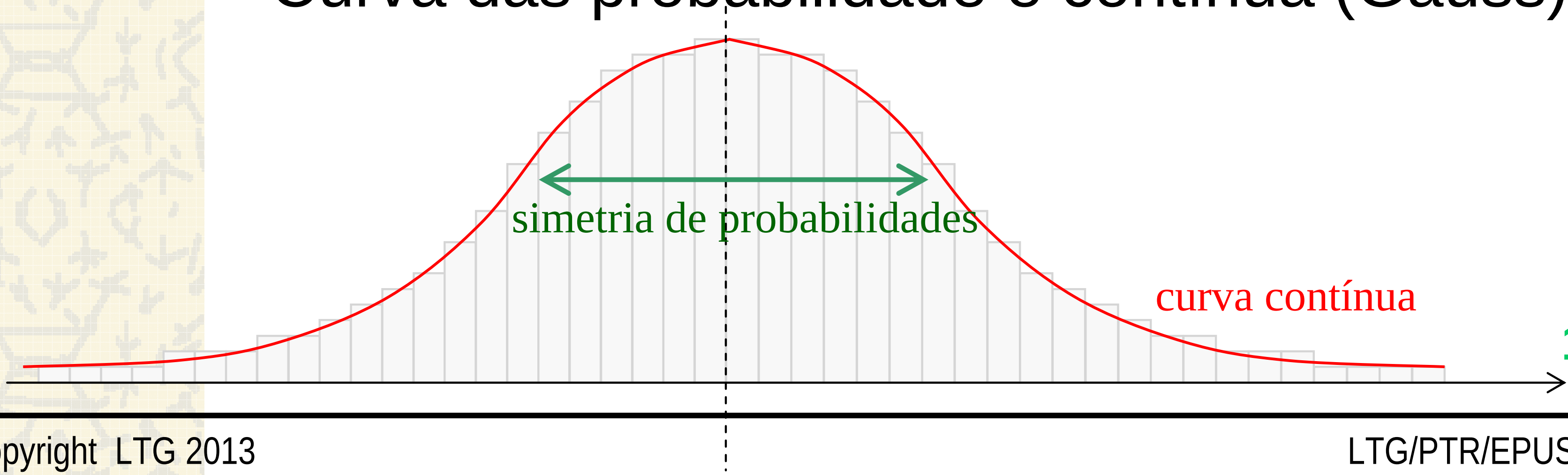


# ERROS ACIDENTAIS OU ALEATÓRIOS

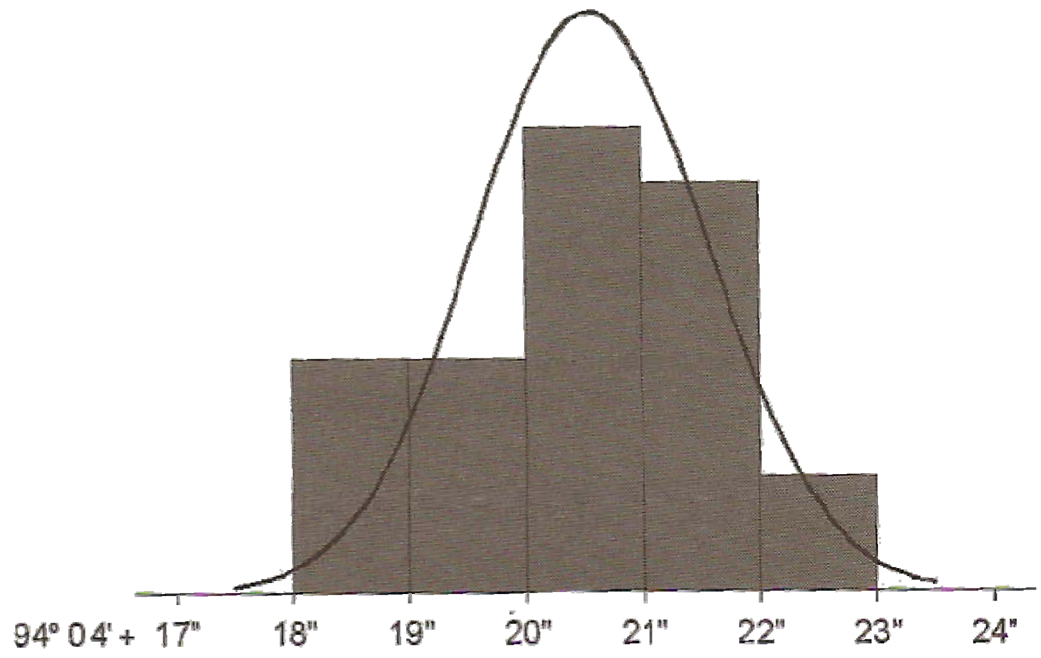
**Postulados da teoria da distribuição dos erros acidentais (Gauss):**

- Medidas se agrupam em torno de um valor
- Probabilidade de ocorrência máxima é próximo do valor médio
- Existência de simetria nas probabilidades de ocorrência dos resíduos
- Curva das probabilidade é contínua (Gauss)



# ERROS ACIDENTAIS OU ALEATÓRIOS

| Valores medidos | |
|---|---|
| 94° 4' 19,00" | 94° 4' 19,50" |
| 94° 4' 21,75" | 94° 4' 19,75" |
| 94° 4' 22,50" | 94° 4' 20,50" |
| 94° 4' 21,25" | 94° 4' 18,75" |
| 94° 4' 20,25" | 94° 4' 18,75" |
| 94° 4' 21,50" | 94° 4' 21,00" |
| 94° 4' 20,00" | 94° 4' 20,50" |
| 94° 4' 20,00" | 94° 4' 20,50" |
| 94° 4' 21,25" | 94° 4' 20,50" |
| 94° 4' 21,25" | 94° 4' 20,25" |
| 94° 4' 22,00" | 94° 4' 20,50" |
| 94° 4' 21,50" | 94° 4' 19,00" |
| 94° 4' 22,25" | |



# Interpretação da Curva de Gauss

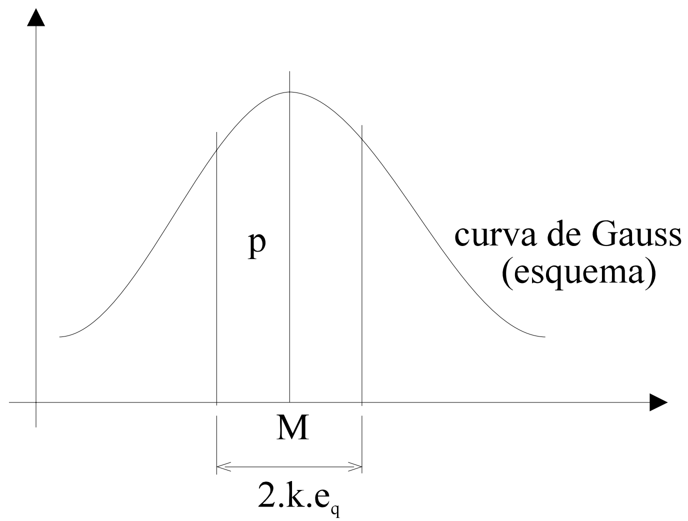
Probabilidade de o erro estar no intervalo:

***m*** ± k. *eq*

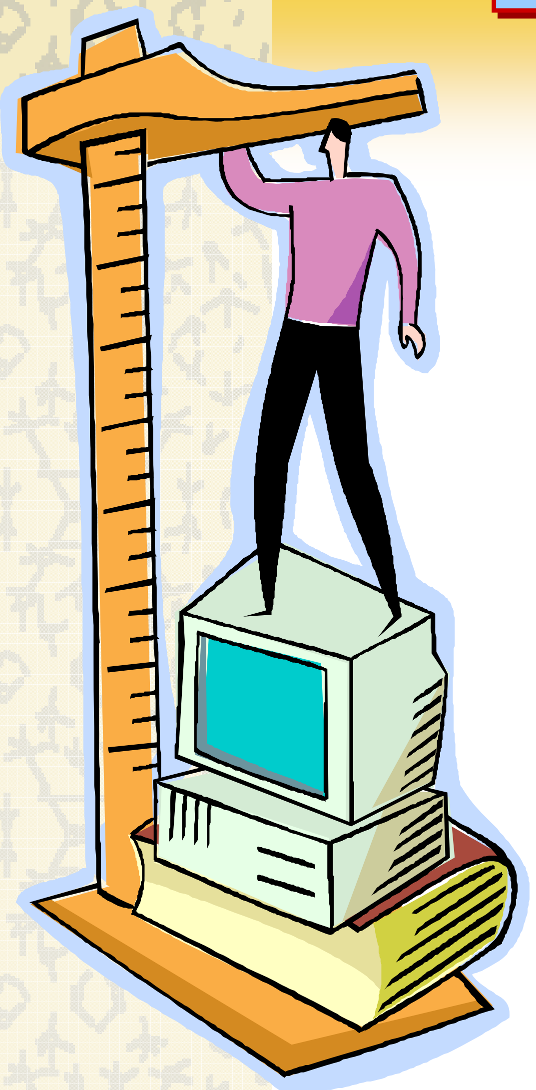
Pontos de inflexão em –*eq* e +*eq*, entre esses dois valores concentra-se 68% das probabilidades

| P% | k. eq |
|---|---|
| 50,0 | 0,67 |
| 68,3 | 1,00 |
| 90,0 | 1,65 |
| 95,0 | 1,96 |
| 99,0 | 2,58 |
| 99,7 | 3,00 |
| 99,9 | 3,29 |

$eq = \sigma$ (se $m$=0) ***



# ERRO VERDADEIRO



$$E_v = L_b - L_v$$

$E_v$: Erro verdadeiro

$L_v$ : Valor verdadeiro (desconhecido)

$L_b$ : Valor observado

# ERRO APARENTE (RESÍDUO)

$$E_A = L_b - L_v$$

$L_b$ : Valor observado

$L_v$ : Estimador do valor verdadeiro

$E_A$: Erro aparente

RESÍDUO ($V_i$) é o erro aparente com o sinal trocado.

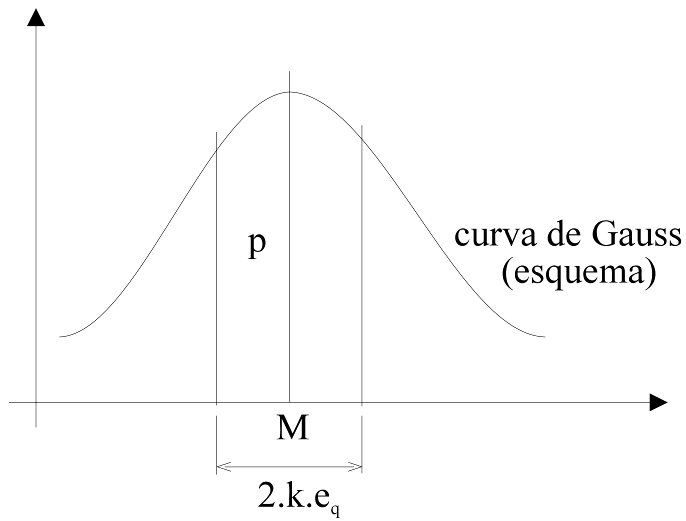
# ERRO PROVÁVEL

Com confiança de 50%, o erro provável é dado por:

$$e_p = 0{,}6745 e_q$$

Isto é, a chance do erro estar no intervalo M±0,6745$e_q$ é de 50%. Outros exemplos:

| P% | K.($e_q$) |
|---|---|
| 67,0 | 1,0 |
| 90,0 | 1,5 |
| 95,0 | 2,0 |
| 99,0 | 2,5 |
| 99,8 | 3,0 |
| 99,9 | 3,5 |



# ERRO MÉDIO QUADRÁTICO DE UMA POPULAÇÃO

$$e_{q_a} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_i^{\,2}}$$

$E_1, E_2 \ldots E_i$ : erros verdadeiros de uma medida efetuada *n* vezes.

Erro médio quadrático (s) = desvio padrão da população

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}$$

# MÉDIA E ERRO MÉDIO QUADRÁTICO DE UM CONJUNTO DE OBSERVAÇÕES

Média de uma amostra com *n* valores

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Desvio padrão de uma amostra ($\sigma$) (= erro médio quadrático ($e_q$))

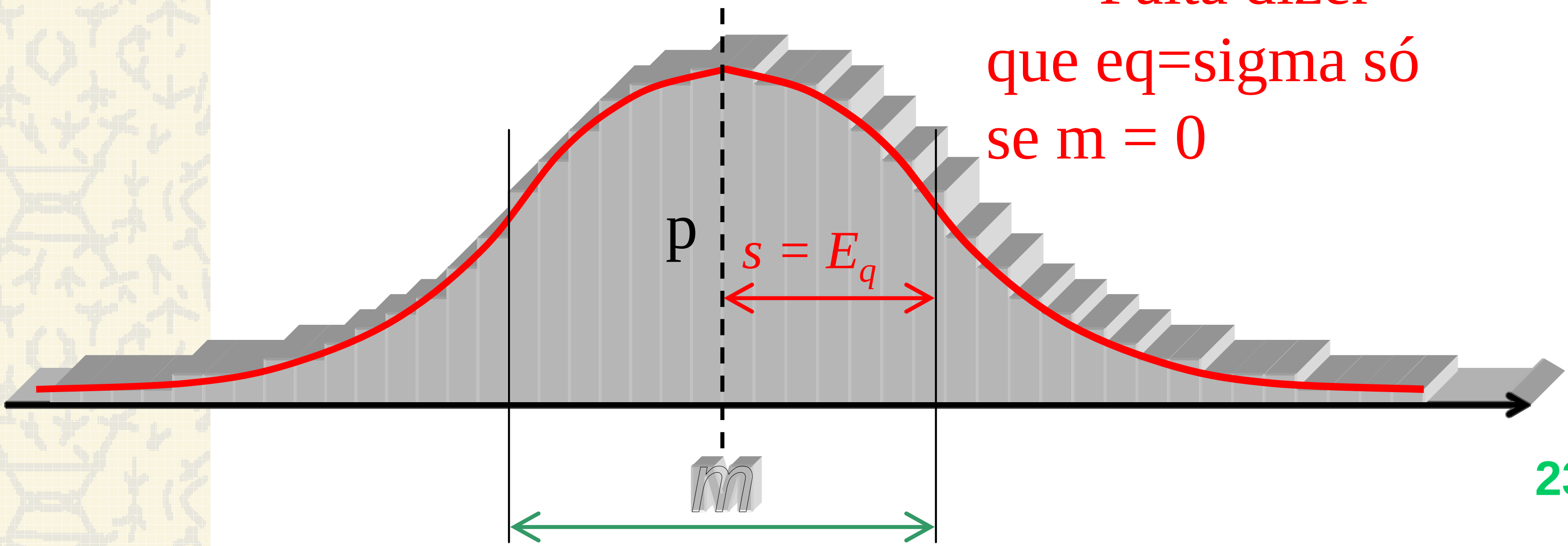
$$\sigma = e_q = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}$$

O valor mais provável *m* é aquele para o qual

$\Sigma(x_i - m)^2$ é mínimo.

# EMQ E CURVA DE GAUSS

- O Erro Médio Quadrático corresponde ao ponto de inflexão da curva de Gauss, e denomina-se desvio-padrão na distribuição real.




*** Falta dizer que eq=sigma só se m = 0

# ERRO DA MÉDIA (desvio padrão da média com n valores):

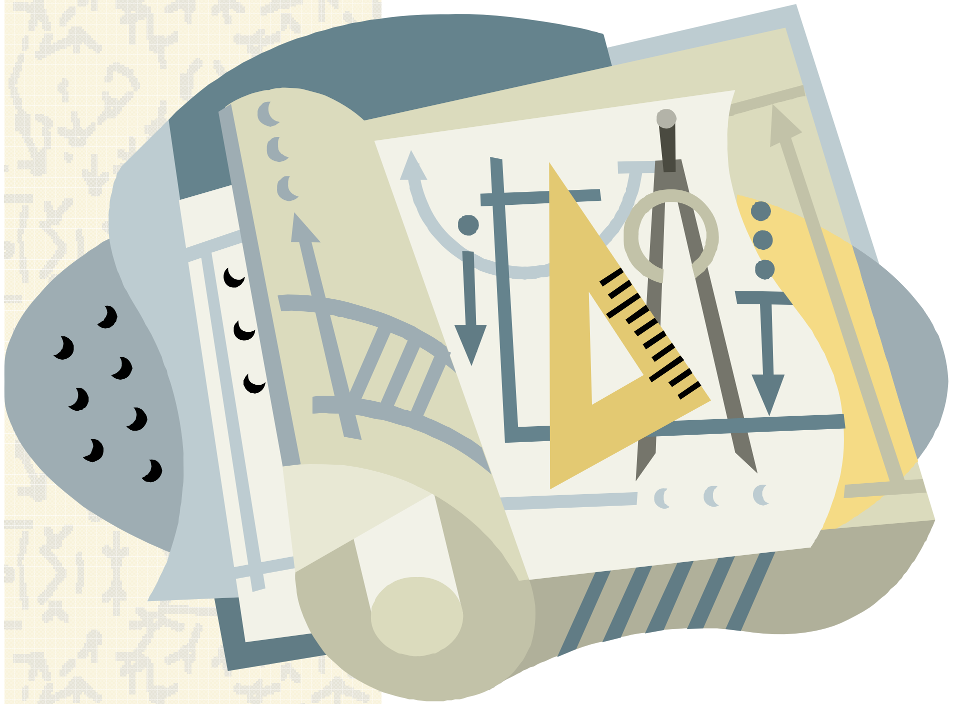
$$e_m = \frac{e_q}{\sqrt{n}}$$

# ERRO RELATIVO

$$e_r = \frac{e_m}{m}$$

$m$ = média

# ERRO MÁXIMO OU TOLERÂNCIA



O objetivo é:

Desprezar todas as medidas que ultrapassarem o valor estipulado, por serem consideradas mal efetuadas.

*** Intervalo: $m \pm 3\sigma$

# EXPRESSÕES EMPÍRICAS DE TOLERÂNCIA

$e_m = 4\ e_p$ *6 em 100.000*

$e_m = 3\ e_p$ *2 em 1.000*

$e_m = 2{,}5\ e_q$ (normalmente usada)
probabilidade de ser excedido: 1 %

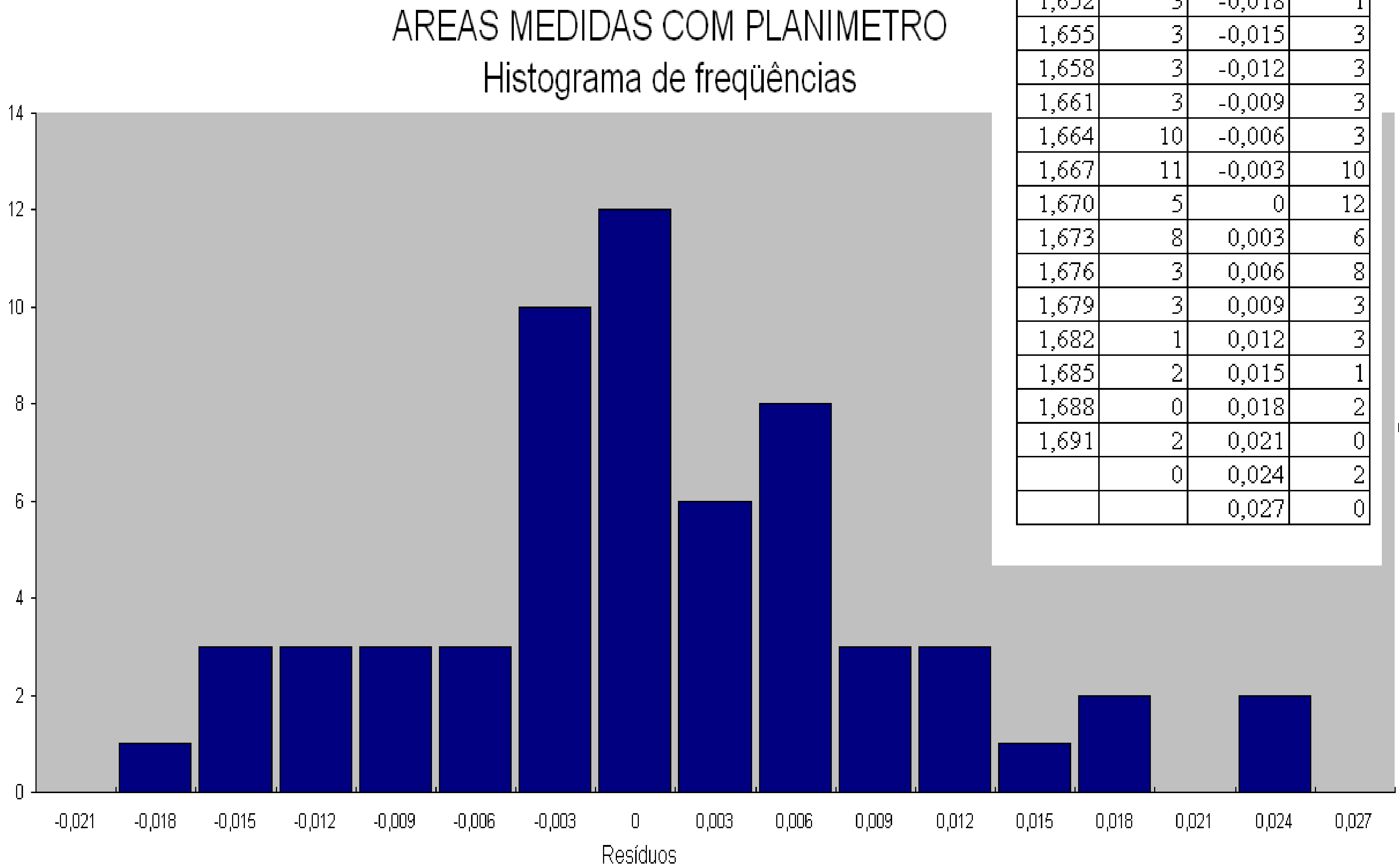
$e_m = 3\ e_q$
probabilidade de ser excedido: 0,1 %



# Exemplo: Medição de áreas com planímetro

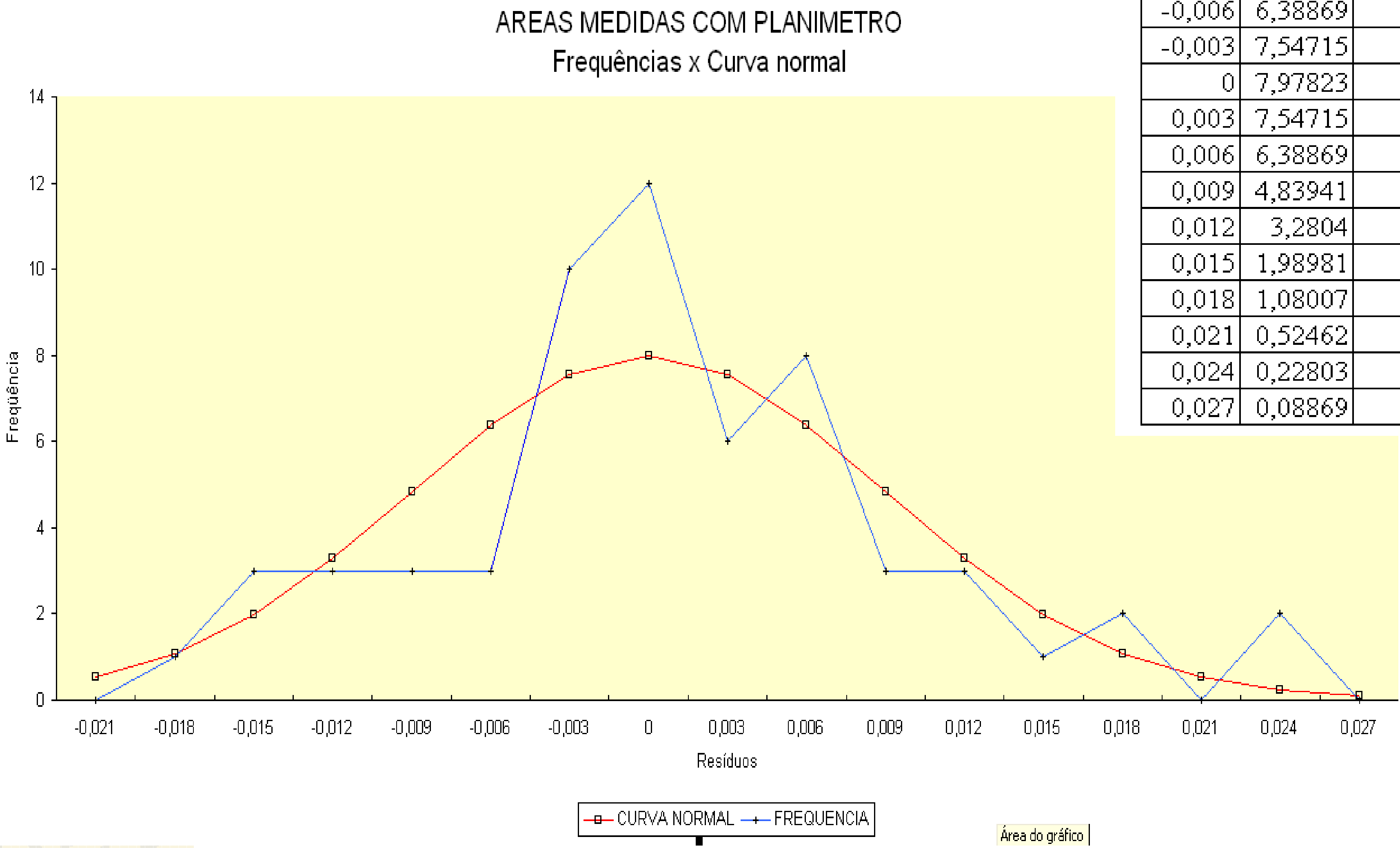
| N | AREA | Vi | Vi^2 | N | AREA | Vi | Vi^2 | N | AREA | Vi | Vi^2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,677 | 0,00993 | 0,000099 | 21 | 1,665 | (0,00207) | 0,000004 | 41 | 1,658 | (0,00907) | 0,000082 |
| 2 | 1,676 | 0,00893 | 0,000080 | 22 | 1,677 | 0,00993 | 0,000099 | 42 | 1,657 | (0,01007) | 0,000101 |
| 3 | 1,657 | (0,01007) | 0,000101 | 23 | 1,662 | (0,00507) | 0,000026 | 43 | 1,690 | 0,02293 | 0,000526 |
| 4 | 1,667 | (0,00007) | 0,000000 | 24 | 1,660 | (0,00707) | 0,000050 | 44 | 1,666 | (0,00107) | 0,000001 |
| 5 | 1,673 | 0,00593 | 0,000035 | 25 | 1,667 | (0,00007) | 0,000000 | 45 | 1,671 | 0,00393 | 0,000015 |
| 6 | 1,671 | 0,00393 | 0,000015 | 26 | 1,660 | (0,00707) | 0,000050 | 46 | 1,664 | (0,00307) | 0,000009 |
| 7 | 1,673 | 0,00593 | 0,000035 | 27 | 1,660 | (0,00707) | 0,000050 | 47 | 1,685 | 0,01793 | 0,000322 |
| 8 | 1,670 | 0,00293 | 0,000009 | 28 | 1,667 | (0,00007) | 0,000000 | 48 | 1,667 | (0,00007) | 0,000000 |
| 9 | 1,675 | 0,00793 | 0,000063 | 29 | 1,667 | (0,00007) | 0,000000 | 49 | 1,655 | (0,01207) | 0,000146 |
| 10 | 1,664 | (0,00307) | 0,000009 | 30 | 1,652 | (0,01507) | 0,000227 | 50 | 1,679 | 0,01193 | 0,000142 |
| 11 | 1,664 | (0,00307) | 0,000009 | 31 | 1,664 | (0,00307) | 0,000009 | 51 | 1,682 | 0,01493 | 0,000223 |
| 12 | 1,668 | 0,00093 | 0,000001 | 32 | 1,690 | 0,02293 | 0,000526 | 52 | 1,663 | (0,00407) | 0,000017 |
| 13 | 1,671 | 0,00393 | 0,000015 | 33 | 1,649 | (0,01807) | 0,000326 | 53 | 1,662 | (0,00507) | 0,000026 |
| 14 | 1,664 | (0,00307) | 0,000009 | 34 | 1,671 | 0,00393 | 0,000015 | 54 | 1,672 | 0,00493 | 0,000024 |
| 15 | 1,651 | (0,01607) | 0,000258 | 35 | 1,675 | 0,00793 | 0,000063 | 55 | 1,667 | (0,00007) | 0,000000 |
| 16 | 1,663 | (0,00407) | 0,000017 | 36 | 1,653 | (0,01407) | 0,000198 | 56 | 1,667 | (0,00007) | 0,000000 |
| 17 | 1,665 | (0,00207) | 0,000004 | 37 | 1,654 | (0,01307) | 0,000171 | 57 | 1,663 | (0,00407) | 0,000017 |
| 18 | 1,670 | 0,00293 | 0,000009 | 38 | 1,665 | (0,00207) | 0,000004 | 58 | 1,670 | 0,00293 | 0,000009 |
| 19 | 1,671 | 0,00393 | 0,000015 | 39 | 1,683 | 0,01593 | 0,000254 | 59 | 1,667 | (0,00007) | 0,000000 |
| 20 | 1,651 | (0,01607) | 0,000258 | 40 | 1,668 | 0,00093 | 0,000001 | 60 | 1,669 | 0,00193 | 0,000004 |
| | | | | | | | | Σ | 100,024 | (0,00000) | 0,004780 |
| | | | | | | | | μ | 1,667 | σ | 0,009 |




| Faixas | Freq. | x | Freq |
|---|---|---|---|
| 1,649 | 1 | -0,021 | 0 |
| 1,652 | 3 | -0,018 | 1 |
| 1,655 | 3 | -0,015 | 3 |
| 1,658 | 3 | -0,012 | 3 |
| 1,661 | 3 | -0,009 | 3 |
| 1,664 | 10 | -0,006 | 3 |
| 1,667 | 11 | -0,003 | 10 |
| 1,670 | 5 | 0 | 12 |
| 1,673 | 8 | 0,003 | 6 |
| 1,676 | 3 | 0,006 | 8 |
| 1,679 | 3 | 0,009 | 3 |
| 1,682 | 1 | 0,012 | 3 |
| 1,685 | 2 | 0,015 | 1 |
| 1,688 | 0 | 0,018 | 2 |
| 1,691 | 2 | 0,021 | 0 |
| | 0 | 0,024 | 2 |
| | | 0,027 | 0 |

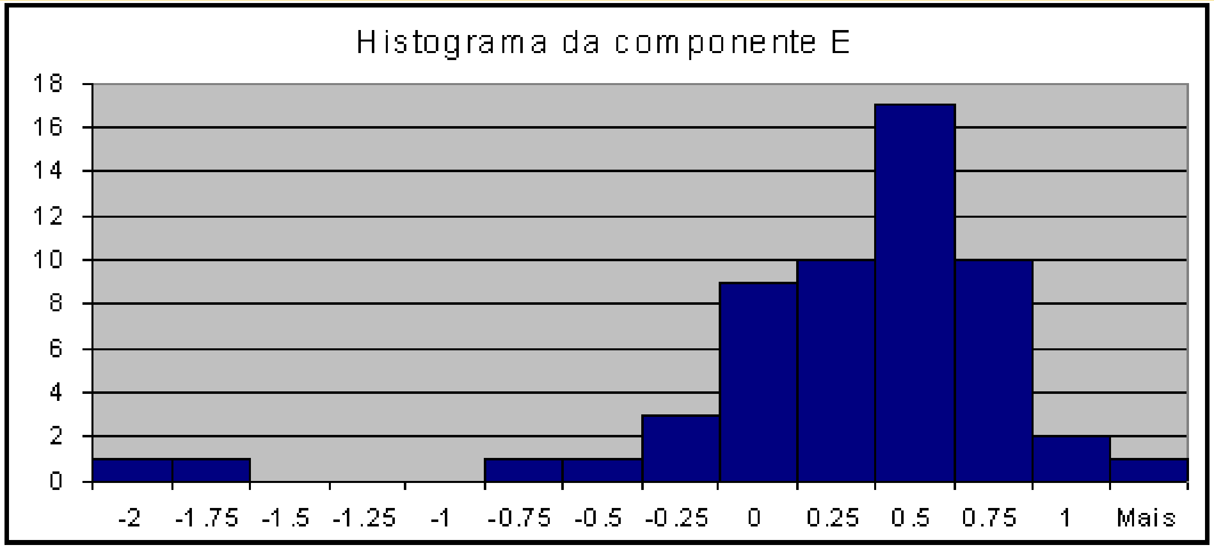
## CURVA NORMAL

| Parâmetro = | | 7,978 |
|---|---|---|
| -0,021 | 0,52462 | 0 |
| -0,018 | 1,08007 | 1 |
| -0,015 | 1,98981 | 3 |
| -0,012 | 3,2804 | 3 |
| -0,009 | 4,83941 | 3 |
| -0,006 | 6,38869 | 3 |
| -0,003 | 7,54715 | 10 |
| 0 | 7,97823 | 12 |
| 0,003 | 7,54715 | 6 |
| 0,006 | 6,38869 | 8 |
| 0,009 | 4,83941 | 3 |
| 0,012 | 3,2804 | 3 |
| 0,015 | 1,98981 | 1 |
| 0,018 | 1,08007 | 2 |
| 0,021 | 0,52462 | 0 |
| 0,024 | 0,22803 | 2 |
| 0,027 | 0,08869 | 0 |

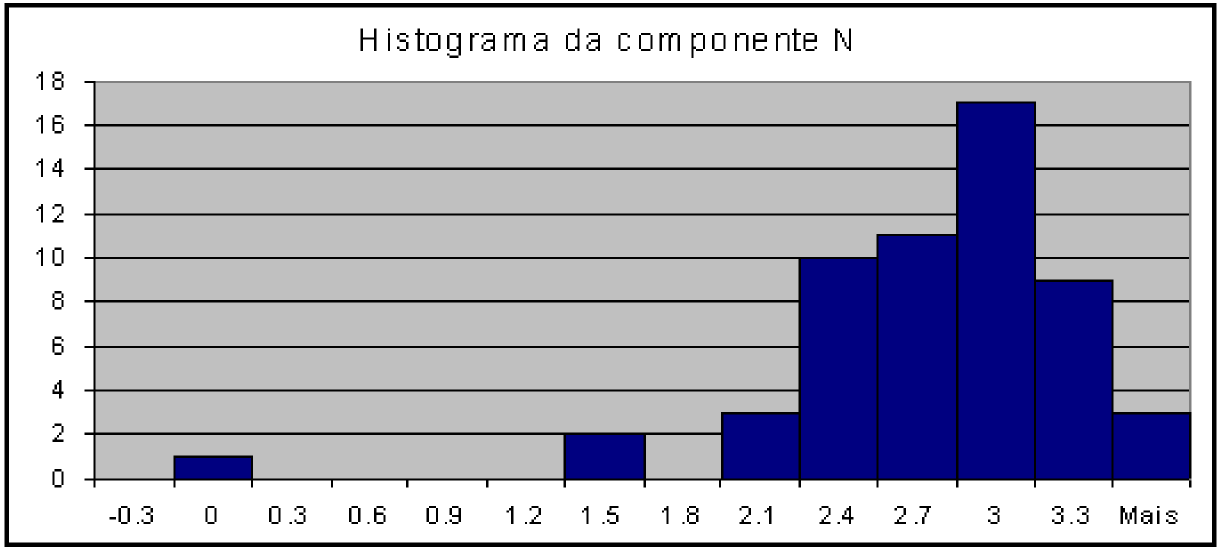


# Exemplos de erros grosseiros

| Estatística descritiva E | |
|---|---|
| Média | 0.147 |
| Erro padrão | 0.073 |
| Mediana | 0.280 |
| Modo | 0.352 |
| Desvio padrão | 0.549 |
| Variância da amostra | 0.301 |
| Curtose | 7.236 |
| Assimetria | -2.232 |
| Intervalo | 3.248 |
| Mínimo | -2.166 |
| Máximo | 1.082 |
| Soma | 8.225 |
| Contagem | 56.000 |

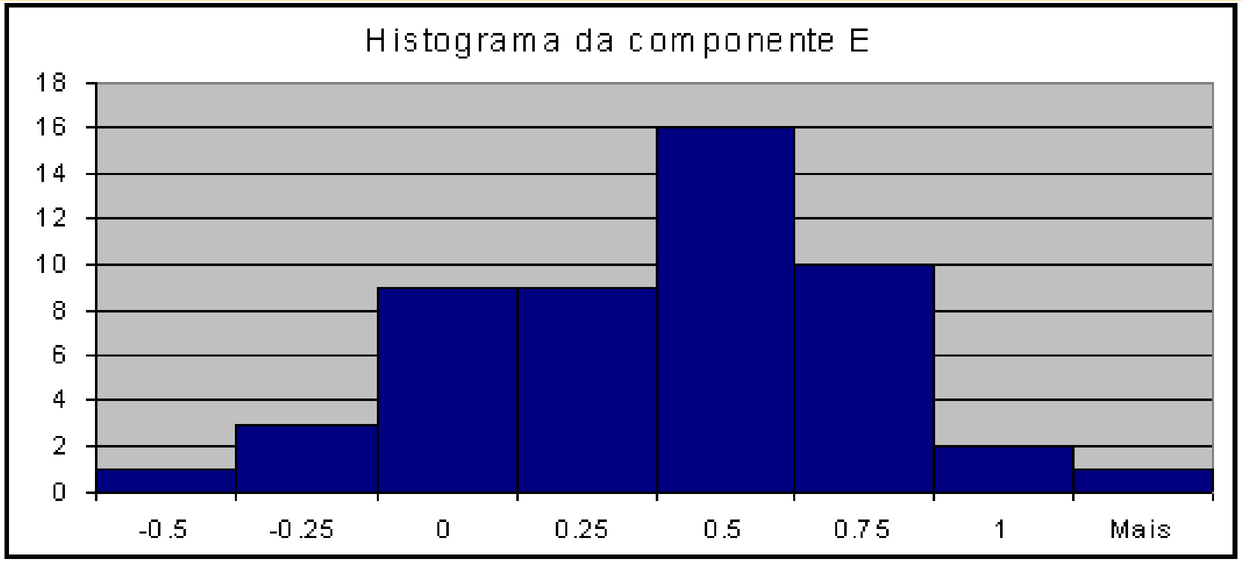



| Estatística descritiva N | |
|---|---|
| Média | 2.606 |
| Erro padrão | 0.077 |
| Mediana | 2.734 |
| Modo | #N/D |
| Desvio padrão | 0.577 |
| Variância da amostra | 0.333 |
| Curtose | 10.445 |
| Assimetria | -2.481 |
| Intervalo | 3.651 |
| Mínimo | -0.267 |
| Máximo | 3.384 |
| Soma | 145.941 |
| Contagem | 56.000 |

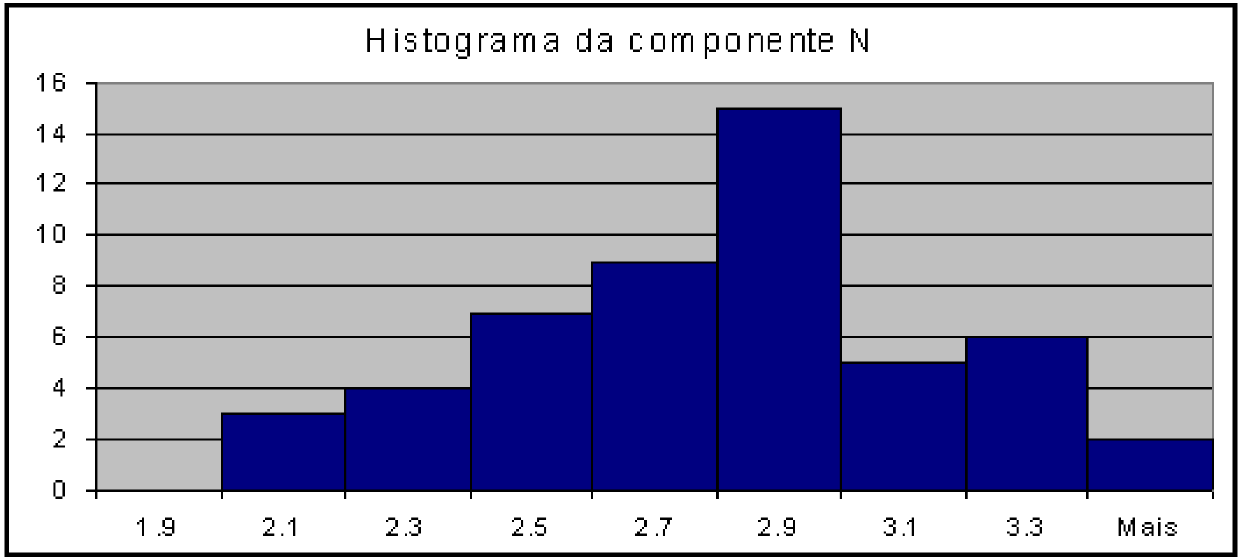


# Após eliminar os erros grosseiros

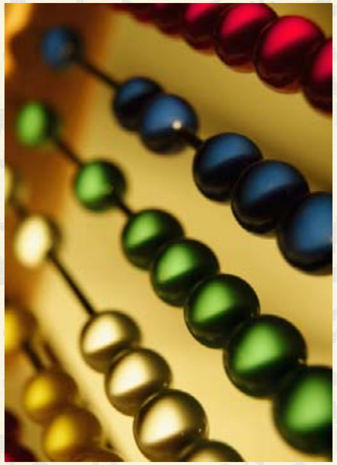
| Estatística descritiva E | |
|---|---|
| Média | 0.250 |
| Erro padrão | 0.047 |
| Mediana | 0.291 |
| Modo | 0.352 |
| Desvio padrão | 0.336 |
| Variância da amostra | 0.113 |
| Curtose | -0.037 |
| Assimetria | -0.146 |
| Intervalo | 1.627 |
| Mínimo | -0.545 |
| Máximo | 1.082 |
| Soma | 12.755 |
| Contagem | 51.000 |




| Estatística descritiva N | |
|---|---|
| Média | 2.701 |
| Erro padrão | 0.049 |
| Mediana | 2.740 |
| Modo | #N/D |
| Desvio padrão | 0.347 |
| Variância da amostra | 0.120 |
| Curtose | -0.672 |
| Assimetria | -0.155 |
| Intervalo | 1.352 |
| Mínimo | 1.999 |
| Máximo | 3.351 |
| Soma | 137.738 |
| Contagem | 51.000 |



# MÉDIA ARITMÉTICA



$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

*(Estimador imparcial )*

Erro Médio Quadrático da média aritmética

$$\sigma_x = e_q = s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{n-1}^{n}(x_i - m)^2} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{n} v_i^2}{n-1}}$$

$$v_i = x_i - m$$

# MÉDIA PONDERADA

As medições são realizadas com diferentes graus de confiança.

O valor mais provável é:

$$m_p = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

Erro da média ponderada = $e_q$

$$e_q = \sqrt{\frac{\sum p_i v_i^2}{(n-1)\sum p_i}}$$

# TEORIA DO MMQ

## MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

"O melhor estimador de uma variável é aquele que minimiza a *soma dos quadrados* dos desvios."

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = mínimo$$

estimador imparcial de variância mínima

# PROPAGAÇÃO DE ERROS

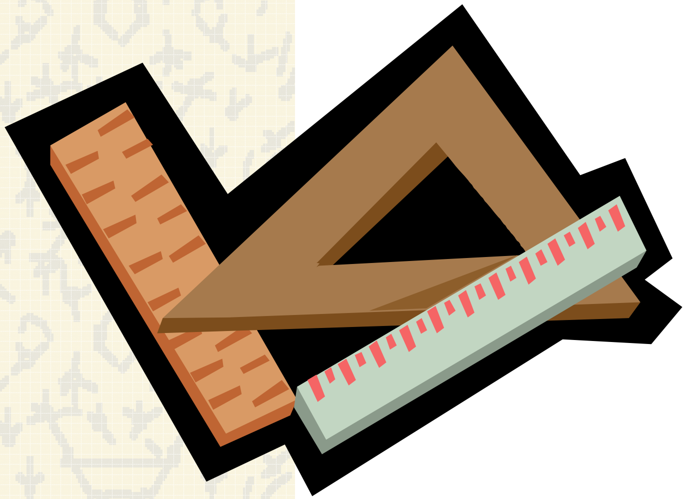
Seja G uma grandeza a ser determinada em função de outras x, y, z:

$$G = f(x,y,z)$$

Sejam $e_x$, $e_y$, $e_z$ os erros respectivos das medidas x, y, z.

# ERRO MÉDIO QUADRÁTICO DE UMA FUNÇÃO "G" QUALQUER

$$e_G = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 e_x^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 e_y^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2 e_z^2}$$



# ERRO DE UMA SOMA

G = x + y + z

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial z} = 1$$

$$e_G = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}$$

G = ax + by + cz

$$e_G = \sqrt{(ae_x)^2 + (be_y)^2 + (ce_z)^2}$$

# ERRO DE UM PRODUTO POR CONSTANTE

A = nx = x + x + ... + x

$$\boxed{e_a = \sqrt{n\,e_x^2} = e_x\sqrt{n}}$$

Ex: Erro de um comprimento de 1.000 m, medido com trena de 10 m, sendo 1,5cm o erro de uma observação isolada.

$$e_{1000} = 1{,}5\sqrt{100} \cong 15cm$$

# ERRO DE UM PRODUTO

$$G = xy$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = x$$

$$e_G = \sqrt{y^2 e_x^2 + x^2 e_y^2}$$

$$e_G = G\sqrt{\left(\frac{e_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{e_y}{y}\right)^2}$$

# ERRO DE UMA MÉDIA

$$m = \frac{x + y + z + \ldots}{n}$$

$$\frac{\partial m}{\partial x} = \frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial m}{\partial z} = \frac{1}{n}$$

$$e_m = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 e_x^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 e_y^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 e_z^2}$$

$$\text{como} \quad e_x = e_y = e_z = \ldots$$

$$e_m = \sqrt{\frac{n\, e_x^2}{n^2}} = \frac{e_x}{\sqrt{n}}$$

# Exercício

- Calcular a área S = x.y

$$S = xy$$

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x}dx + \frac{\partial S}{\partial y}dy = ydx + xdy$$

- Exemplo numérico:
- x = 50 m, y = 40 m, dx = dy = 10 cm
- *dS* = 0,1 (50+40) = 9 $m^2$