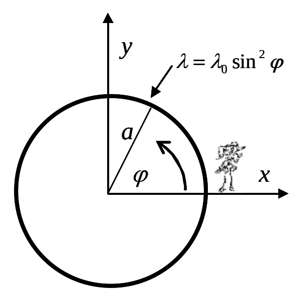
Física III para Engenharia Elétrica
IFUSP - 4320292
Prec – 23/07/2014

A prova tem duração de 120 minutos. Resolva cada questão na folha correspondente. Use o verso se necessário. Escreva de forma legível, à lápis ou tinta.

Justifique suas respostas. Não basta copiar a fórmula do formulário. Seja ético: a prova é individual e sem consulta a anotações ou qualquer outro material.

Nome	Assinatura	No. USP	Turma



Q1. Um anel isolante no plano xy com eixo no eixo z, e raio a, mostrado na figura foi eletrizado com distribuição de cargas dada por:

$$\lambda = \lambda_0 \sin^2 \varphi$$

a) (0,5) Calcule a carga no anel;
b) (1,0) Calcule o potencial elétrico ao longo do eixo z;
c) (0,5) A partir do resultado anterior determine o campo elétrico correspondente.
d) (0,5) Em determinado momento ($t = 0$), o anel é posto a girar com velocidade angular constante $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$. Escreva a equação que representa o corrente elétrica medida por um observador no eixo x.

Dados: $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ $\quad\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

Solução

a) $\lambda = \lambda_0 \sin^2 \varphi \qquad q = \int \lambda dl = \lambda_0 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi a d\varphi = a\lambda_0 \pi$

$$q = \int \lambda dl = \lambda_0 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi a d\varphi = a\lambda_0 \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{a\lambda_0}{2}\left(2\pi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\bigg|_2^{2\pi}\right) = a\lambda_0 \pi$$

b) $dV = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{r}$

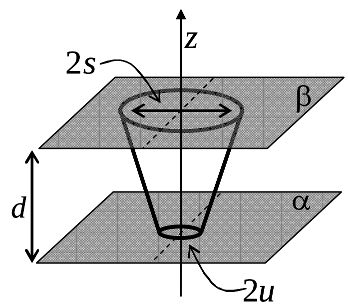
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{(\lambda_0 \sin^2\varphi) dl}{(a^2+z^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} \frac{(\lambda_0 \sin^2\varphi) a d\varphi}{(a^2+z^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\lambda_0}{(a^2+z^2)^{1/2}}\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi$$

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\lambda_0}{(a^2+z^2)^{1/2}}\pi = \frac{a\lambda_0}{4\varepsilon_0 (a^2+z^2)^{1/2}}$$

c) $\vec{E} = -\nabla V = -\dfrac{\partial V}{\partial z}\hat{z} = \dfrac{a\lambda_0 z}{4\varepsilon_0 (a^2+z^2)^{3/2}}\hat{z}$

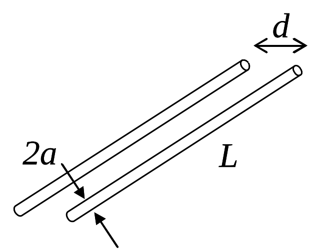
d) $\varphi = \omega t \qquad \lambda = \lambda_0 \sin^2\varphi \qquad \lambda = \lambda_0 \sin^2 \omega t \qquad I = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\lambda dl}{dt} = \dfrac{\lambda a d\varphi}{dt} = (\lambda_0 a \sin^2 \omega t)\omega$

Q2. Num micro circuito semicondutor 3D, são usados pequenos cones de alumínio com raio menor *u*, raio maior s e resistividade ρ para conectar duas trilhas condutoras com distância d conforme mostrado na figura. Em todo o problema, adote a permissividade elétrica ε e permeabilidade magnética μ.



a) (1,0) Determine a resistência desses cones em função da distância d entre as trilhas e os raios u e s . Qual seria o valor da resistência caso o cone termine num vértice agudo (u=0).

b) (1,0) No mesmo circuito algumas trilhas condutoras com comprimento L correm paralelas entre si. Supondo válido modelar o arranjo como 2 condutores cilíndricos paralelos com raio a e distância *d,* e desprezando o fluxo do campo magnético dentro dos condutores, calcule a indutância de duas trilhas paralelas com largura *2a* e comprimento *L*. (*sugestão: calcule o fluxo do campo magnético de um dos condutores na área aberta definida pelos 2 condutores.*)



c) (0,5) Estime a capacitância das duas trilhas com comprimento *L*>>d como ilustradas no ítem b). Faça as aproximações que julgar conveniente. (*sugestão: suponha um dos condutores com carga Q. Calcule o campo e o potencial para a<r<d devido a esse condutor. Obtenha a capacitância quando r=d. Note que a solução é idêntica à do capacitor cilíndrico.*)

Solução:

a) $dR = \dfrac{\rho dz}{\pi r^2}$

semelhança de triângulos, $\dfrac{d}{z} = \dfrac{s-u}{r-u}$ $\quad z = \left(\dfrac{r-u}{s-u}\right)d$ $\quad dz = \dfrac{d}{s-u}dr$

$$dR = \frac{\rho}{\pi r^2}\frac{d}{s-u}dr \qquad R = \frac{\rho}{\pi}\frac{d}{s-u}\int_u^s \frac{dr}{r^2} = -\frac{\rho}{\pi}\frac{d}{(s-u)}.\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{u}\right)$$

$$R = \frac{\rho d}{\pi s u} \qquad \text{para } u \to 0; R \to \infty$$

Posto de outra forma. área nula, a resistência é infinita.

b) $\mathrm{L} = \dfrac{\phi}{I}$. Suponha o problema como se fosse uma espira retangular com comprimento L e largura d, corrente I nos segmentos “*L*” e corrente nula nos segmentos “d”. Devido às correntes opostas os campos se somam.

Campo do condutor: $B_1 = \dfrac{\mu I}{2\pi x}$ $\qquad B_2 = \dfrac{\mu I}{2\pi(d-x)}$ $\qquad d\phi = (B_1 + B_2)dA$

$$\phi = \int_a^{d-a}\left(\frac{\mu I}{2\pi(d-x)} + \frac{\mu I}{2\pi x}\right)Ldx \qquad \phi = \frac{L\mu I}{2\pi}\int_a^{d-a}\left(\frac{1}{(d-x)} + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{L\mu I}{2\pi}\ln\left(\frac{d-a}{a}\right)$$

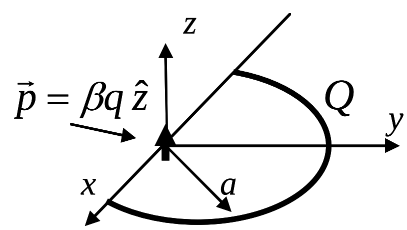
$$\mathrm{L} = \frac{L\mu}{2\pi}\ln\left(\frac{d-a}{a}\right)$$

c) Supondo um dos condutores com carga Q. Aplicando um cilindro gaussiano em seu entorno, o campo elétrico nas paredes do cilindro com raio r vale: $E(r)2\pi\, r\, L = \dfrac{Q}{\varepsilon}$ A diferença de potencial $V(r) - V(a) = -\int_a^r \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon\, Lr}\, dr$ Como o condutor está carregado, V(a) > V(r):

$$V(a) - V(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon\, L}\ln\left(\frac{r}{a}\right) \qquad C = \frac{Q}{V(a) - V(d)} = \frac{2\pi\varepsilon\, L}{\ln\left(\dfrac{d-a}{a}\right)}$$

Q3a. (1,0) O campo magnético numa região confinada é dado por $\vec{B} = \alpha\hat{x}$. Um próton (m_p, q_p) é lançado dentro desse campo.com velocidade: $\vec{v} = a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z}\ m/s$. Determine o raio e o passo da trajetória do próton.

Q3b. (1.0) Um dipolo elétrico $\vec{p} = \beta q\,\hat{z}$ é colocado na origem de um semianel contido no plano *xy*, com raio a e carga Q uniformemente distribuída ao longo do semianel, conforme a figura. Determine a força e o torque que o campo elétrico do semianel exerce no dipolo. Suponha $\beta << a$



Q3c. (0.5) Argumente qualitativamente em que a resposta do ítem b) se modificaria se o dipolo fosse substituído por uma carga positiva $+q$.

a) A componente perpendicular da força responde pela força centrípeta. A força magnética é sempre perpendicular à velocidade. fazendo $m = m_p$ e $q = q_p$

$$\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) = q\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a & b & c \\ \alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} = q\alpha\left(c\hat{y} - b\hat{z}\right) \qquad \left|\vec{F}\right| = qv_\perp B = q\alpha\sqrt{c^2 + b^2}$$

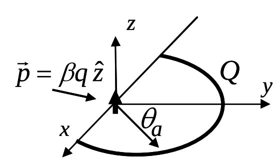
$$v_\perp = \sqrt{c^2 + b^2} \qquad qvb = \frac{mv^2}{r} = q\alpha\sqrt{c^2 + b^2} \qquad r = \frac{m\sqrt{c^2 + b^2}}{q\alpha}$$

O passo é a distância percorrida ao longo do eixo da hélice durante uma rotação (T):

$$T = \frac{2\pi r}{v_\perp} = \frac{2\pi\dfrac{m\sqrt{c^2+b^2}}{q\alpha}}{\sqrt{c^2+b^2}} = \frac{2\pi\, m}{q\alpha} \qquad passo = v_{//}.T$$

$$v_{//} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{B}}{B} = a \qquad passo = \frac{2\pi\, a\, m}{q\alpha}$$

b) Por simetria e geometria o campo elétrico tem apenas componente –y.



$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{a^2} \qquad dE_y = -dE.\cos\theta$$

$$E_y = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\frac{\lambda a d\theta}{a^2}\cos\theta \quad \text{onde} \quad \lambda = \frac{Q}{\pi a} \qquad E_y = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\pi a^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos\theta d\theta = \frac{-1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\pi a^2}$$

Força: O dipolo $\vec{p} = \beta q\,\hat{z}$ contém duas cargas opostas e mesmo valor. Dado que $\beta << a$
As forças são iguais e opostas. $F_r = +qE_y - qE_y = 0$

Torque: $\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{p}\times\vec{E}$ onde r é a distância ao centro de giro, no caso β

$$F_+ = q\left(\frac{-Q}{2\pi^2\varepsilon a^2}\right) \qquad \vec{\tau} = \frac{-\beta q Q}{2\pi^2\varepsilon a^2}\hat{x}$$

c) substituir o dipolo por uma carga. A força resultante difere de zero: $F_+ = q\left(\dfrac{-Q}{2\pi^2\varepsilon a^2}\right)$

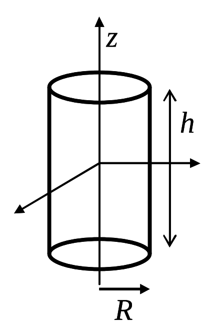
o torque é nulo.

Q4a. (0,5) Mostre que $\psi(x,t) = f(x \pm vt)$ é solução da equação diferencial de onda em uma dimensão;

Q4b. (0,5) Uma onda eletromagnética tem seu campo elétrico dado no S.I. por:
$\vec{E} = 10^{-4}\cos\left[6\times10^5\left(t - \dfrac{5{,}0\times10^{-8}}{3}x\right)\right]\hat{y}$. Para essa onda, determine: o comprimento de onda λ, a frequência f, a velocidade v, e a direção de propagação.

Enunciado das questões Q4d) e Q4e). Numa região cilíndrica com raio R e altura h, com eixo ao longo do eixo $\hat{z}$, o campo elétrico obedece a equação (S.I.)

$$\vec{E}(t) = \hat{z}\, r E_0 e^{\frac{-t}{RC}}.$$



Q4c) (1,0) Calcule o fluxo do campo elétrico na "tampa superior" do cilindro.

Q4d) (0,5). Calcule a energia do campo elétrico contida no cilindro.

soluções:

a) eq. de onda: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = f'' \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2 f''$$

montando a equação $\quad f'' - \dfrac{1}{v^2}v^2 f'' = 0 \quad$ cqd.

b) f = 95,5 kHz. $\lambda = 2\pi.10^2 = 628m$
v = 6,0x10^7 ms^{-1}, direção de propagação é $+\hat{x}$.

c) $IA = I\left(4\pi r^2\right) = \langle S\rangle\left(4\pi r^2\right) \quad 60 = \left(\frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2}\right)4\pi r^2 \quad E_0 = 30Vm^{-1}$

d) $\phi_E = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \hat{z}\, r^2 E_0 e^{\frac{-t}{RC}} dz\,\hat{z} \qquad \phi_E = \frac{2\pi}{3} R^3 E_0 e^{\frac{-t}{RC}}$

e) $U_E = \iiint_V u_E = \iiint_V \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 h}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 E_0^2 e^{\frac{-2t}{RC}} dz \qquad U_E = \frac{\pi\varepsilon_0 h R^4}{4} E_0^2 e^{\frac{-2t}{RC}}$