



---

# Localização de Instalações

## Projeto de Redes Logísticas

---

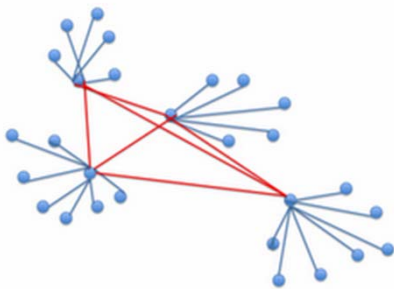
**Prof. Dr. Claudio Barbieri da Cunha**

Escola Politécnica



**USP** Universidade de São Paulo  
Brasil

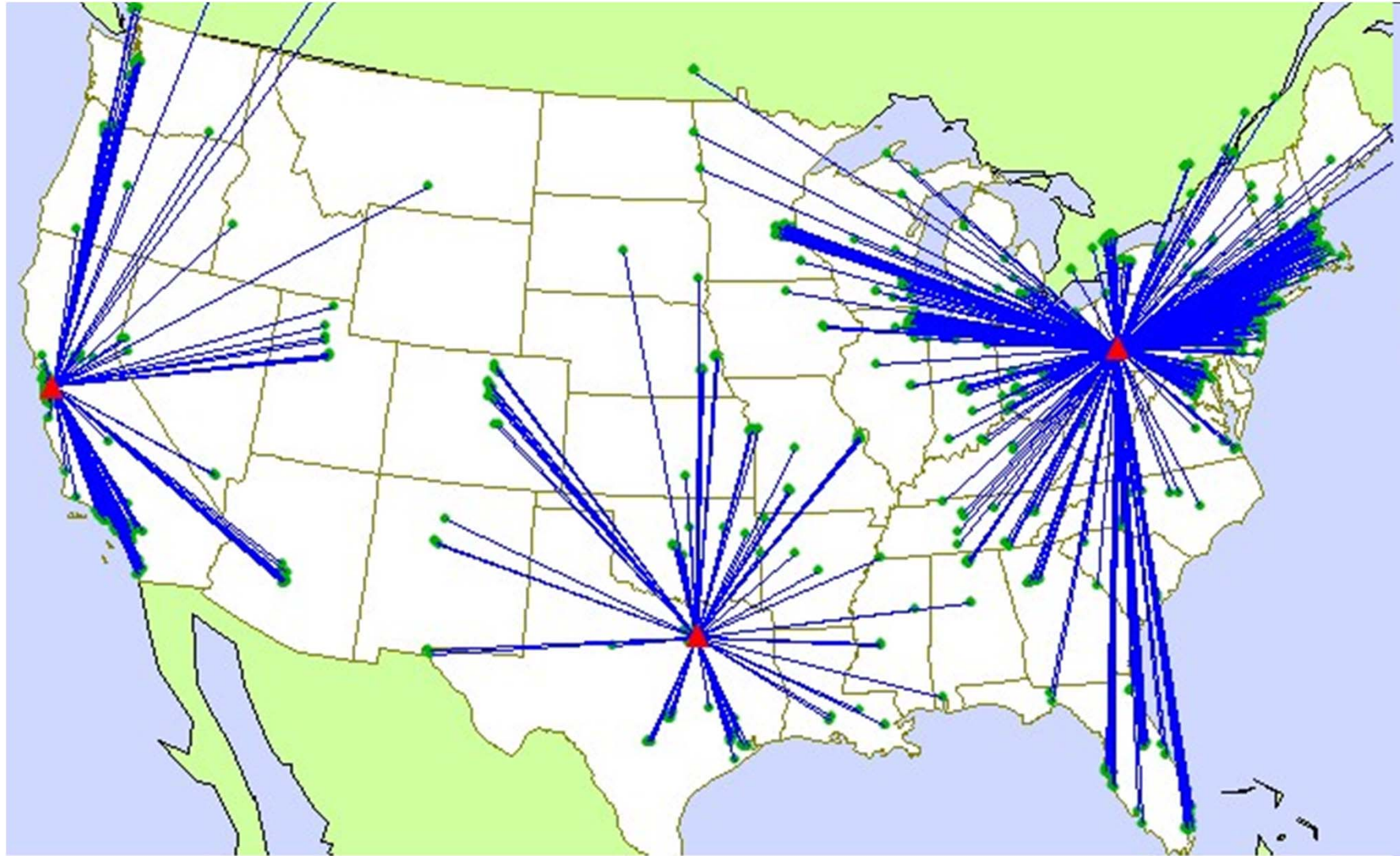
[cbcunha@usp.br](mailto:cbcunha@usp.br)



## Objetivo

- Definir a configuração de uma rede logística / *supply chain* em termos da:
- **Número (quantas), localização e tamanho das unidades produtivas**
  - Fábricas, centros de distribuição regionais e locais, armazéns
- **Ligações/relacionamentos entre unidades**
  - Quem abastece quem?
- **Quantidades produzidas/movimentadas em cada local**
- **Fluxos entre essas instalações**

# Localização de Instalações e Projeto de Rede Logística

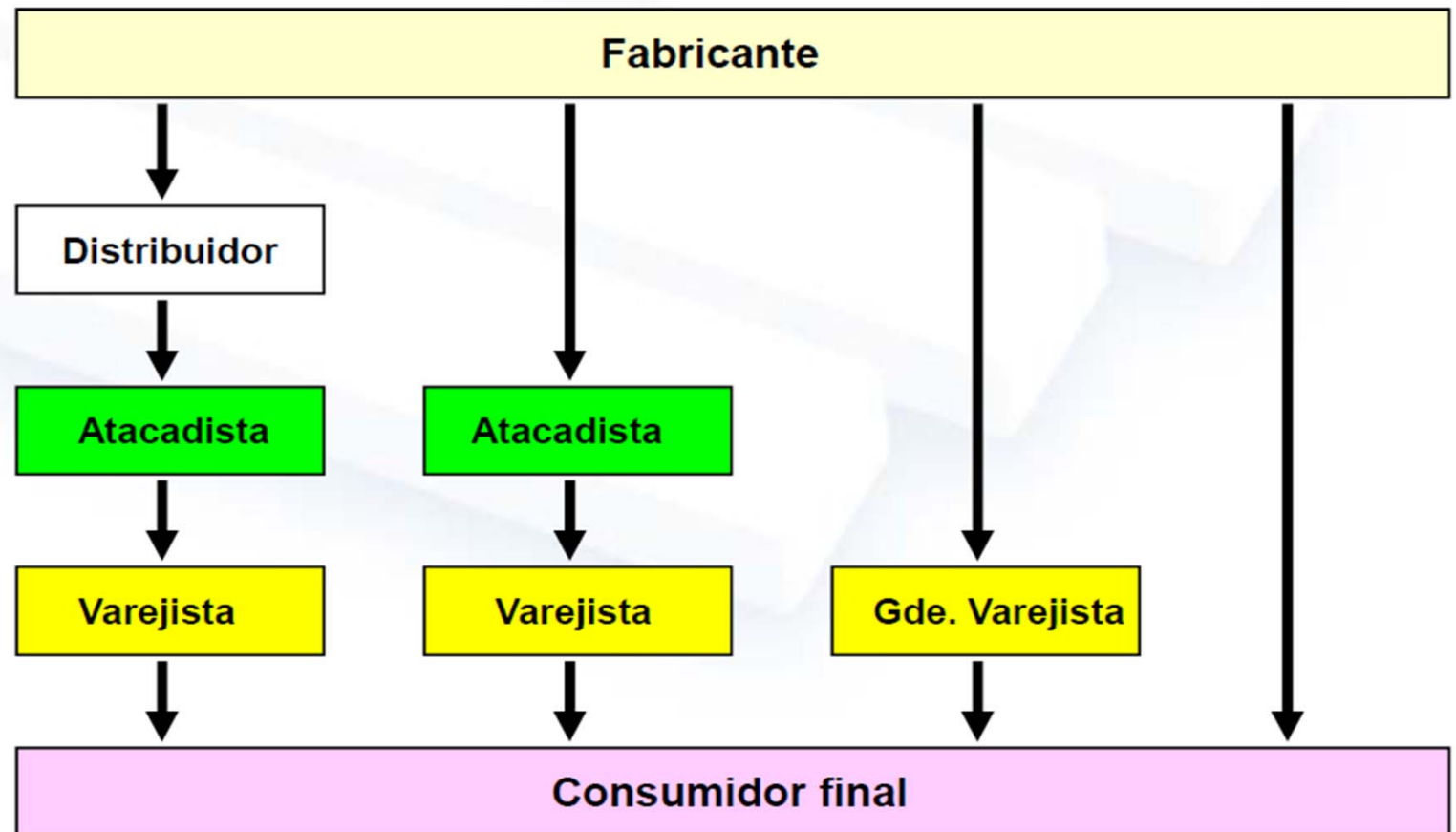


## Por que é importante?

- **Inúmeras alternativas**
  - Posicionar e gerir estoques
  - Movimentar matérias primas e produtos entre instalações
  - Segmentar e atender clientes
  - Selecionar fornecedores
  - Definir locais para produção e distribuição

## Canais de distribuição

- Seleção e organização das “instituições” pelas quais a oferta de produtos e serviços se torna disponível no mercado

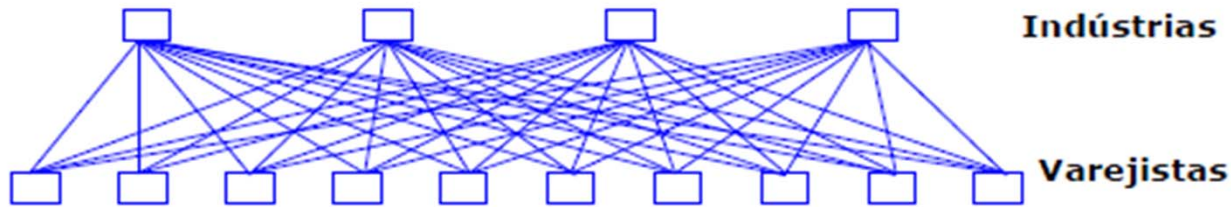


## **Definição da rede de distribuição física**

- **Uma vez selecionados os melhores canais de distribuição,**
- **como fazer com que os produtos cheguem ao seu destino?**
- **Que instalações são necessárias?**
- **Quantas? Onde?**
- **Que atividades/funções realizar em cada uma delas?**
- **Como se interligam/interconectam?**

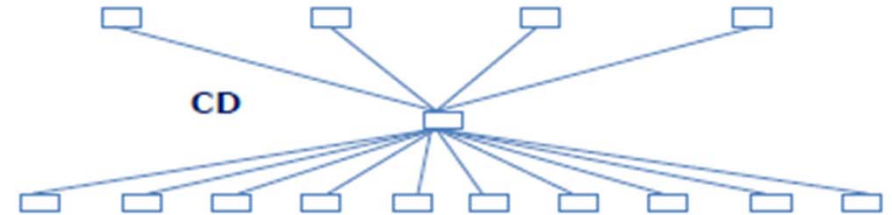
# Exemplos de configurações de redes de distribuição

## Entregas diretas



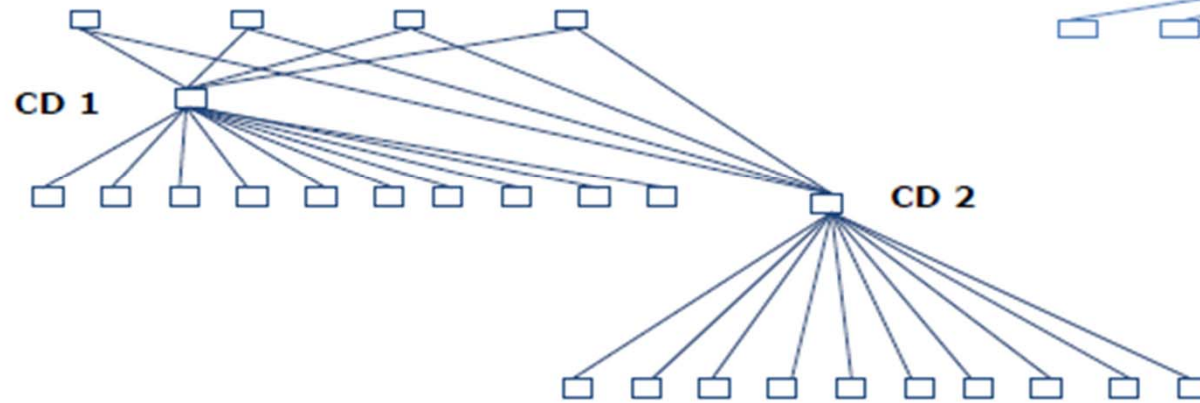
## Entregas através de Centro de Distribuição

Indústrias



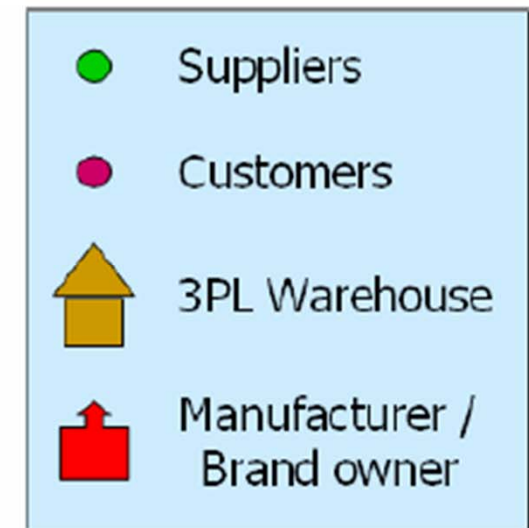
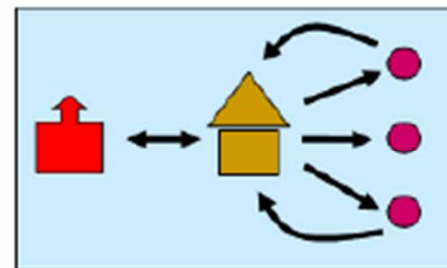
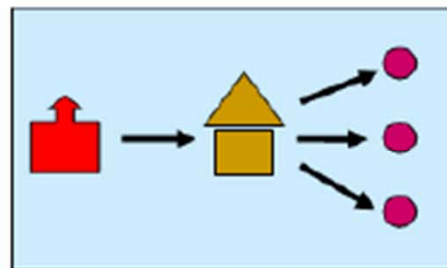
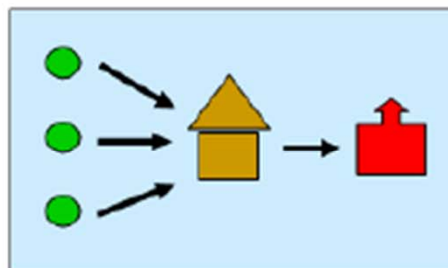
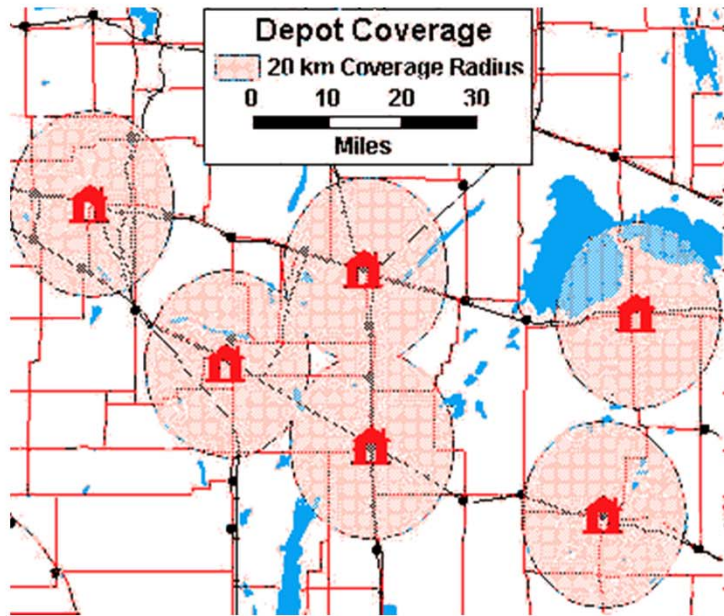
## Uso de vários CDs

Indústrias



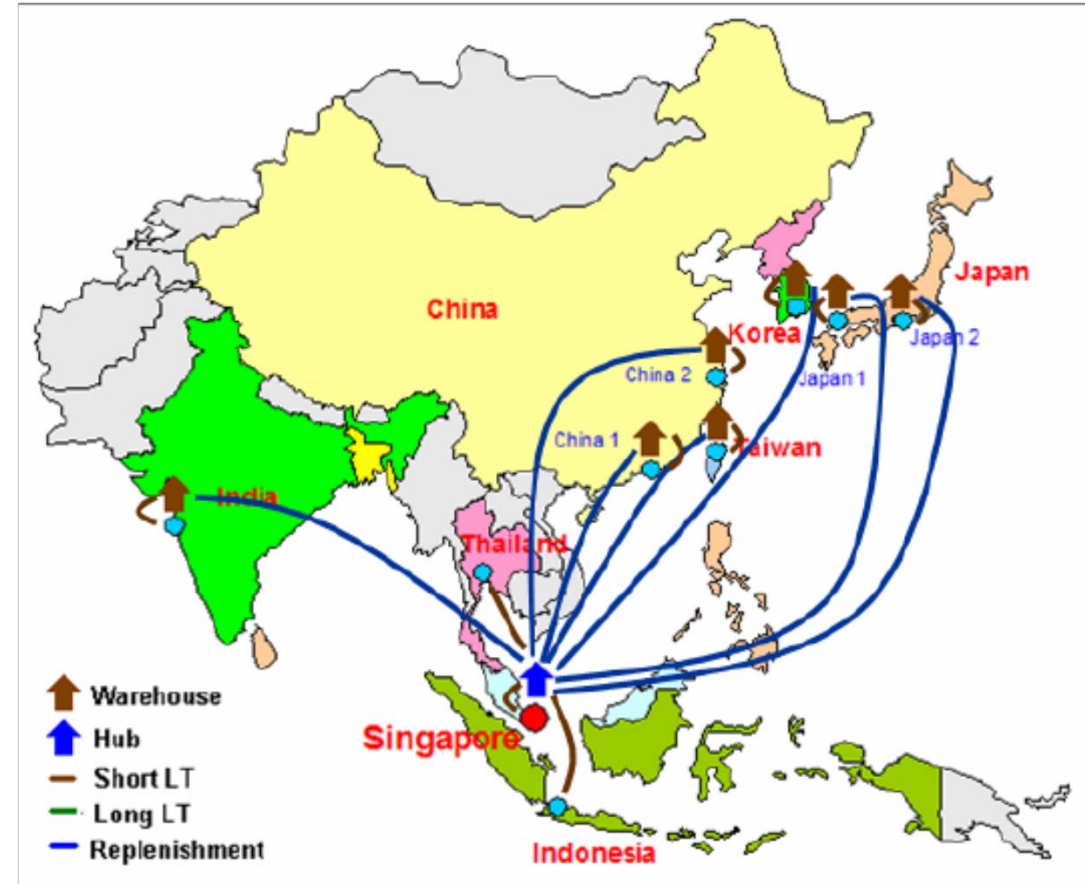
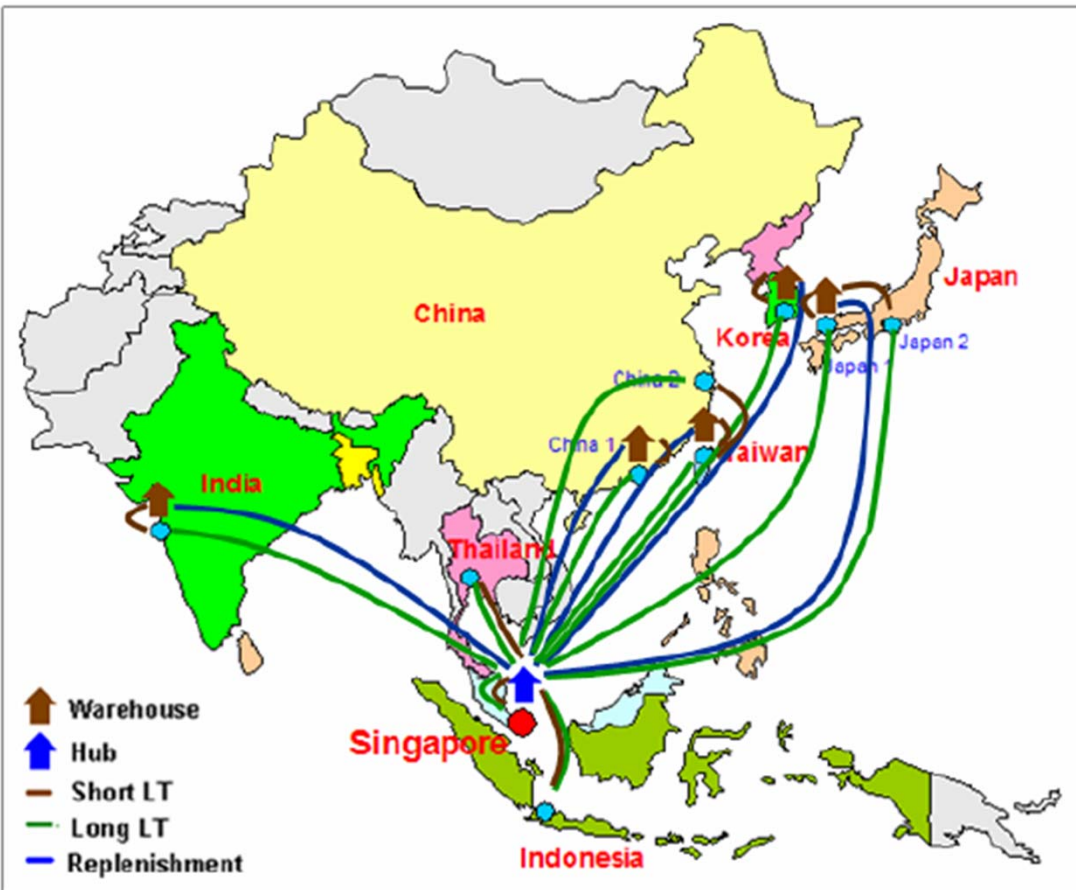
Varejistas

# Localização de Instalações / Projeto de Rede Logística

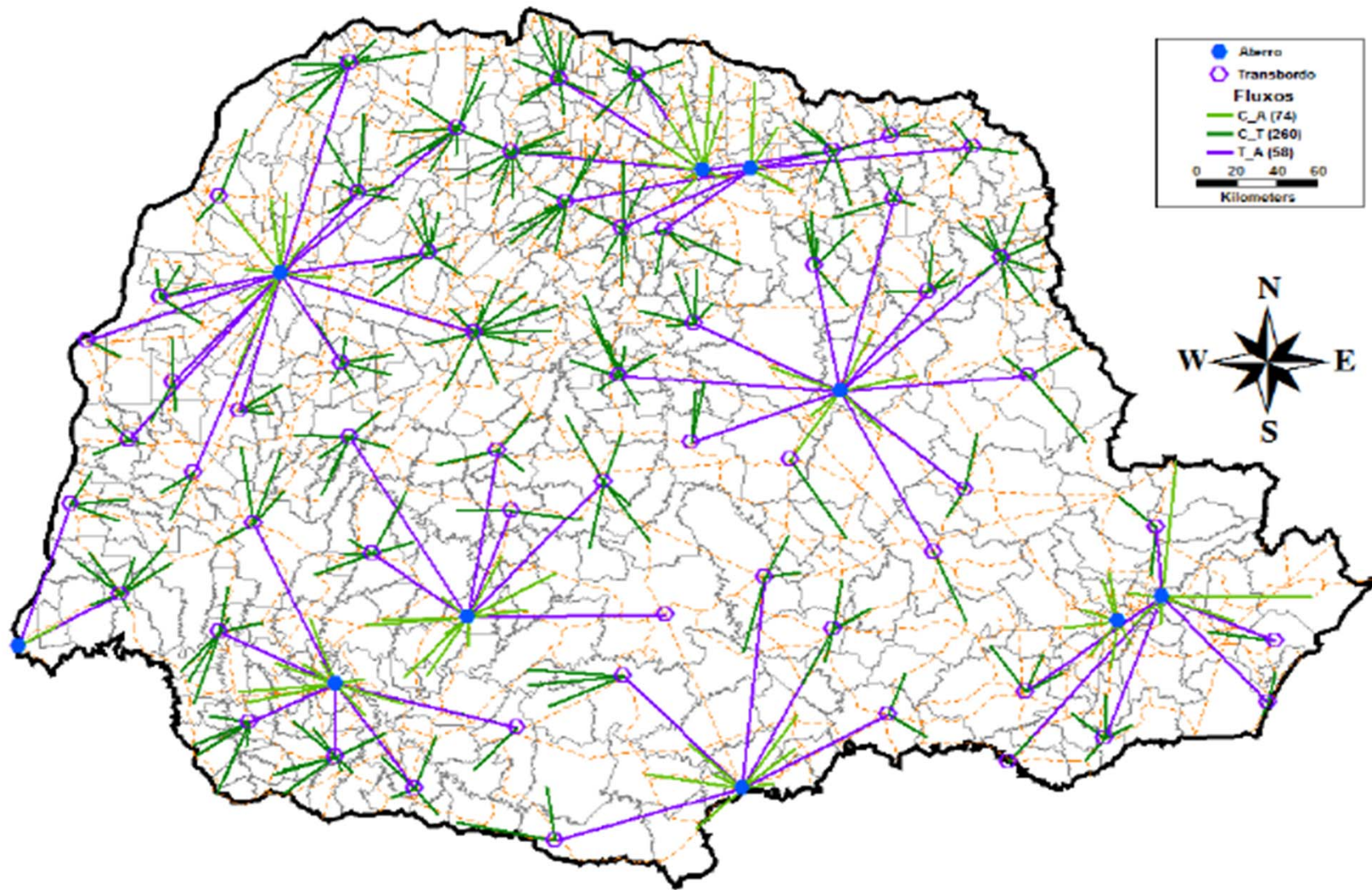




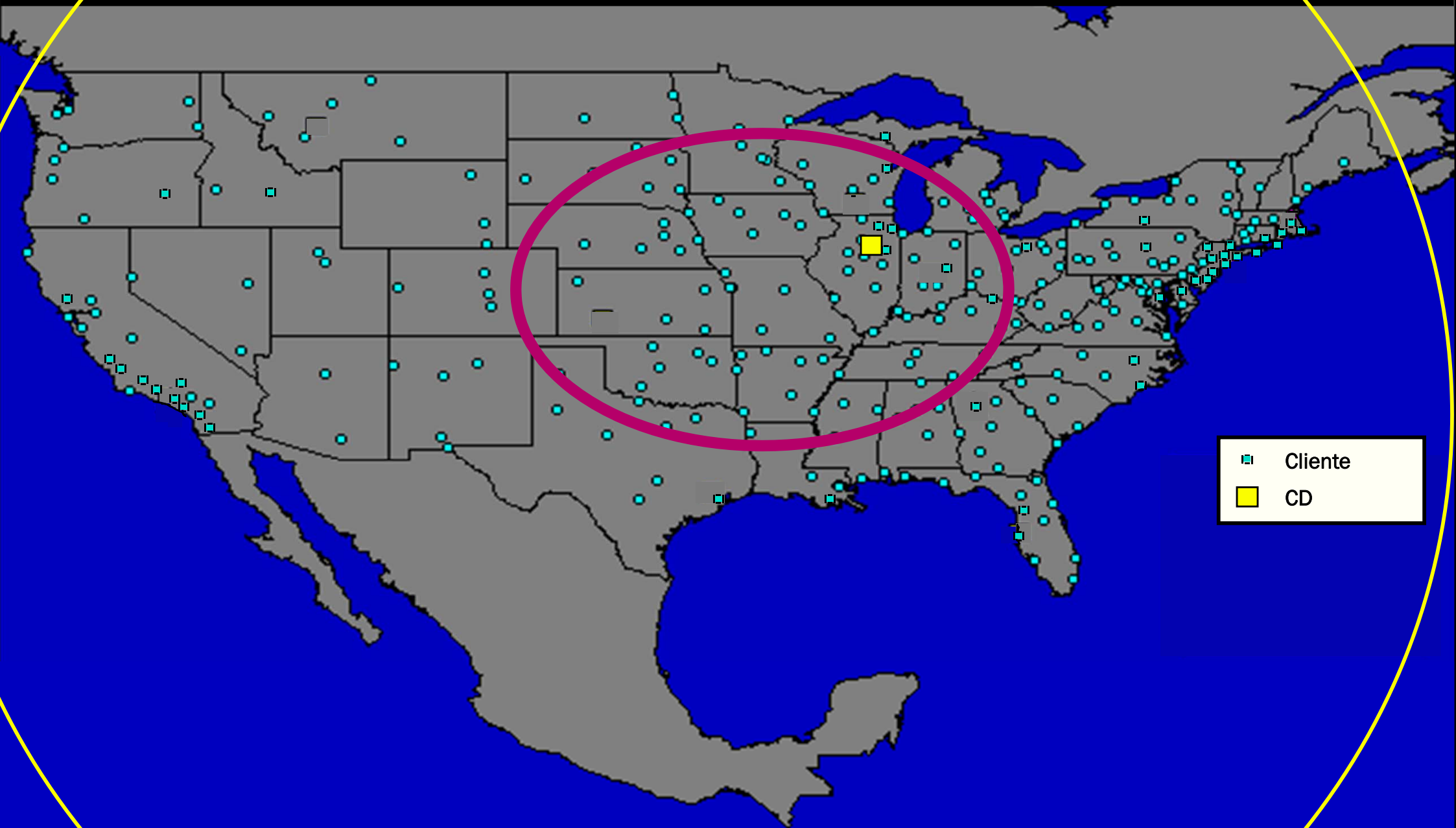
# Localização de Instalações / Projeto de Rede Logística



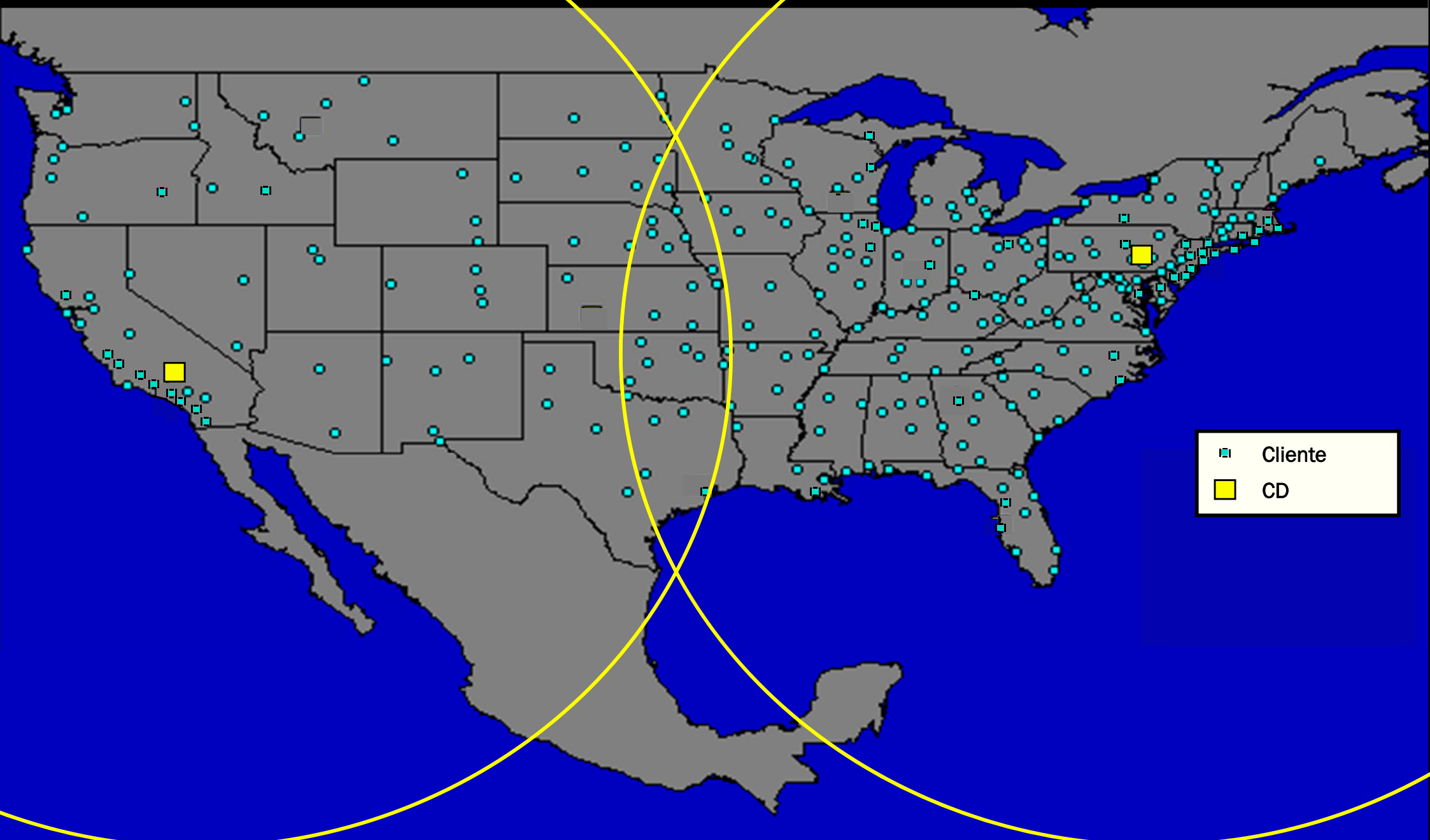
# Exemplo de rede de distribuição



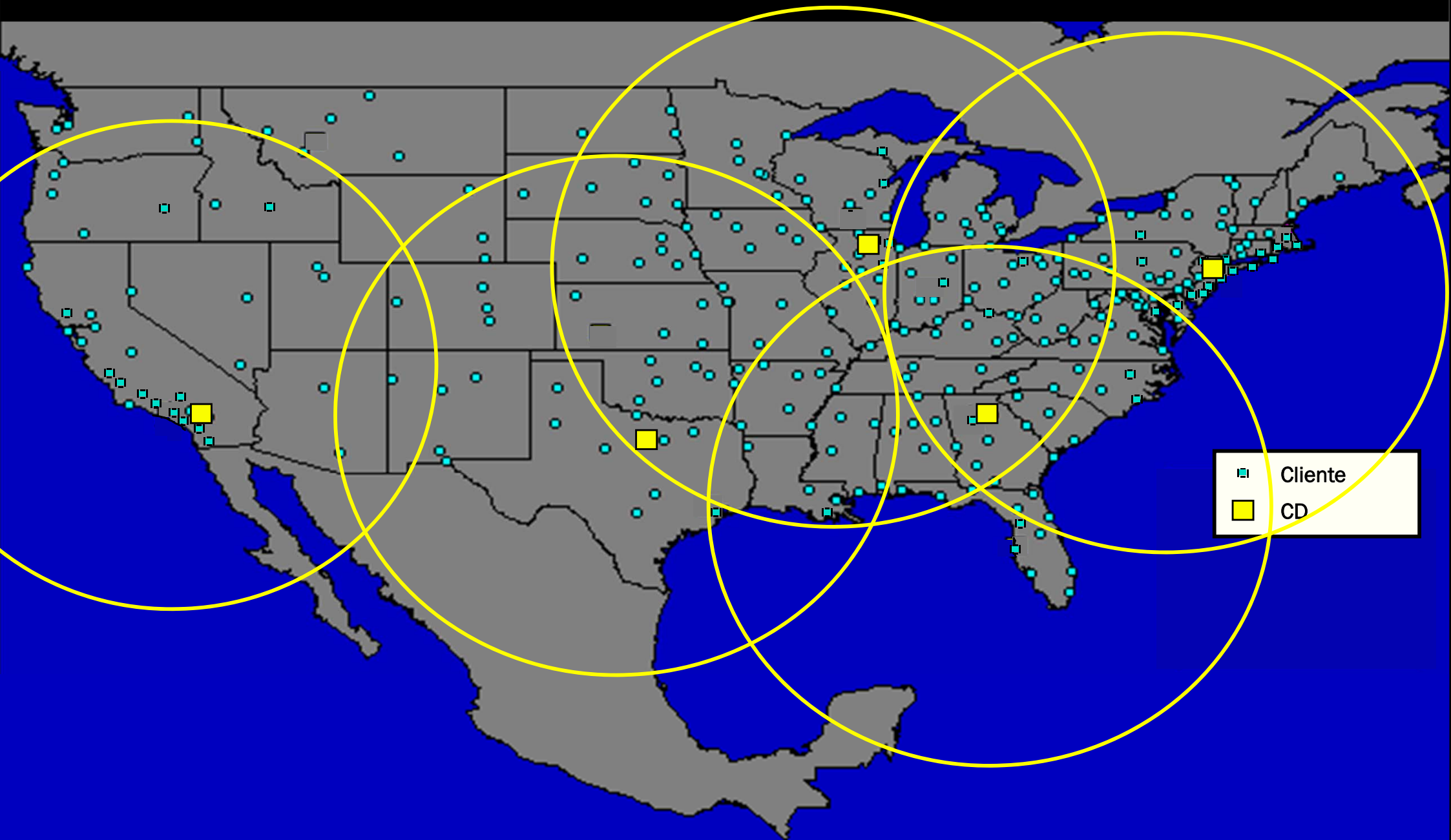
Onde localizar estoque para atendimento em 1 semana? -> 1CD



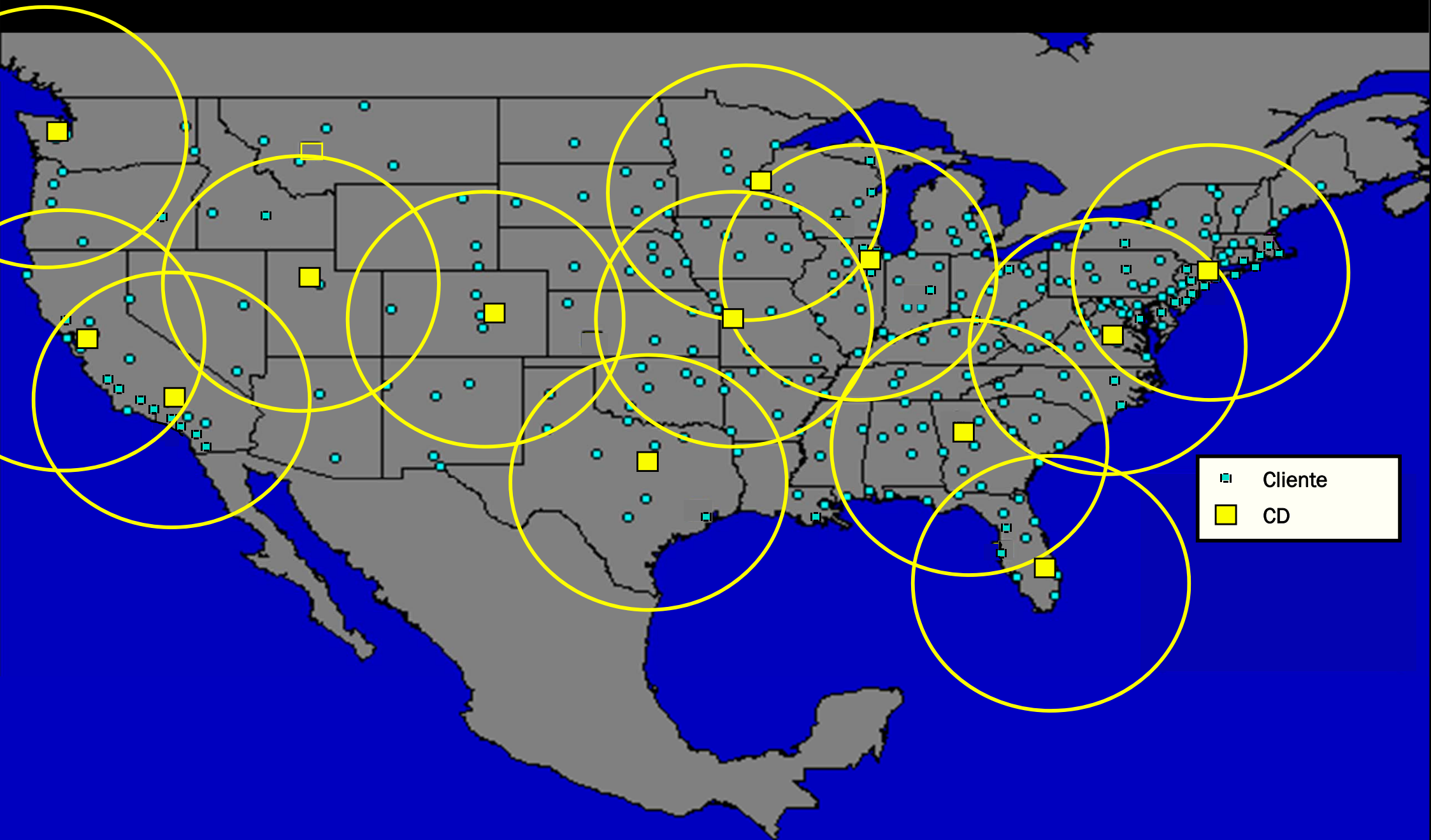
Onde localizar estoque para atendimento em 5 dias? -> 2 CDs



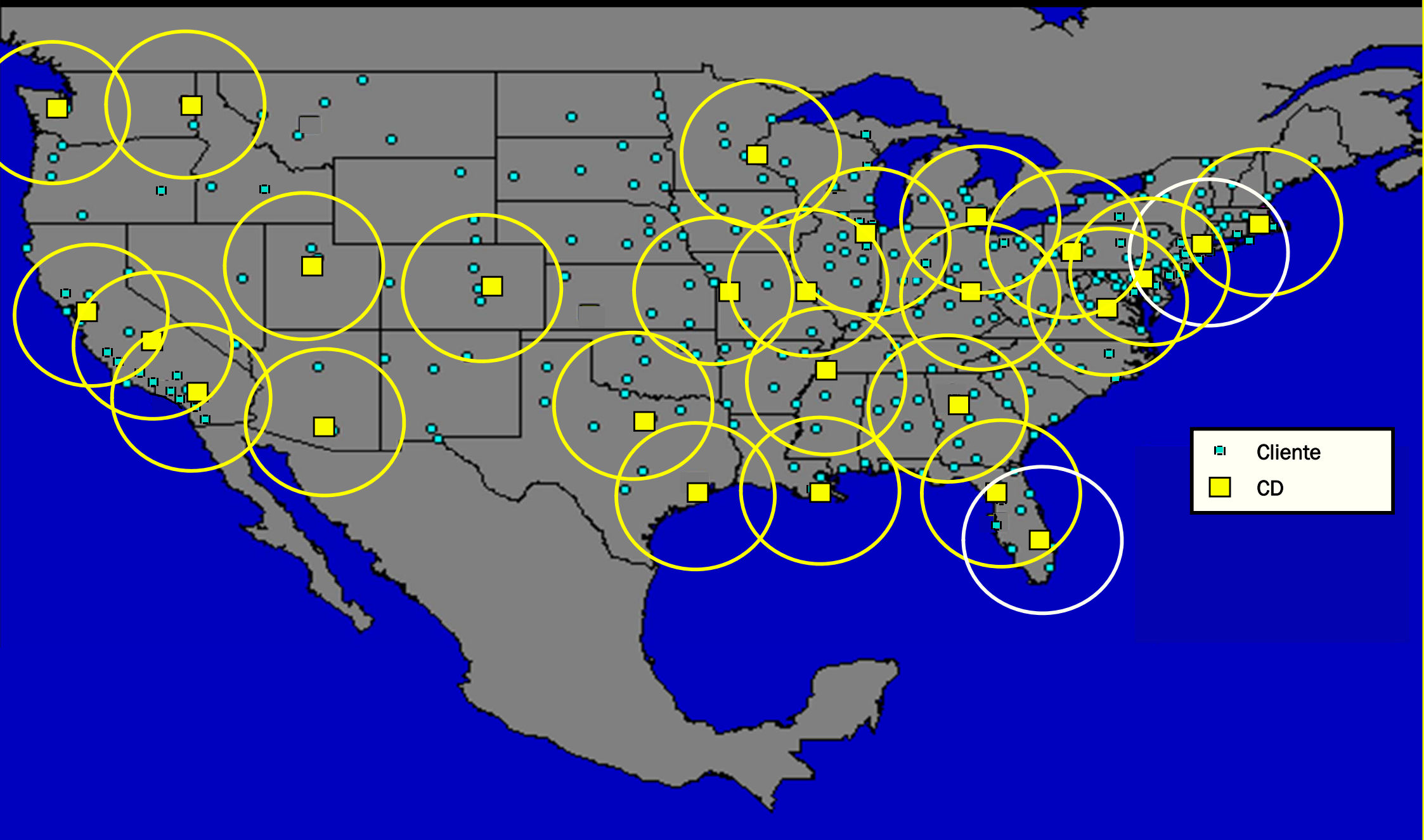
Onde localizar estoque para atendimento em 3 dias? -> 5 CDs



Onde localizar estoque para atendimento em D+1 dias? -> 13 CDs

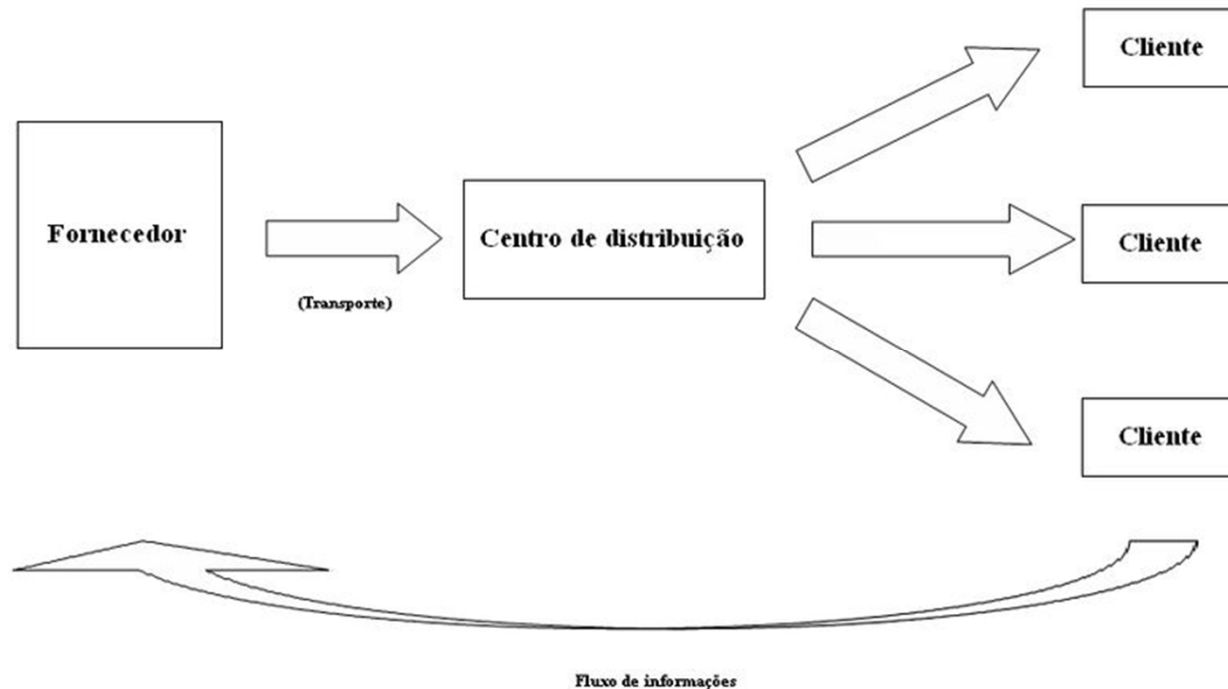


Onde localizar estoque para atendimento em no mesmo dia/dia seguinte? -> 26 CDs



## Centro de Distribuição (CD)

- é uma unidade construída por indústrias, atacadistas e/ou varejistas a fim de armazenar os produtos produzidos ou comprados para revenda, com a finalidade de despachá-los para outras unidades, filiais ou clientes.





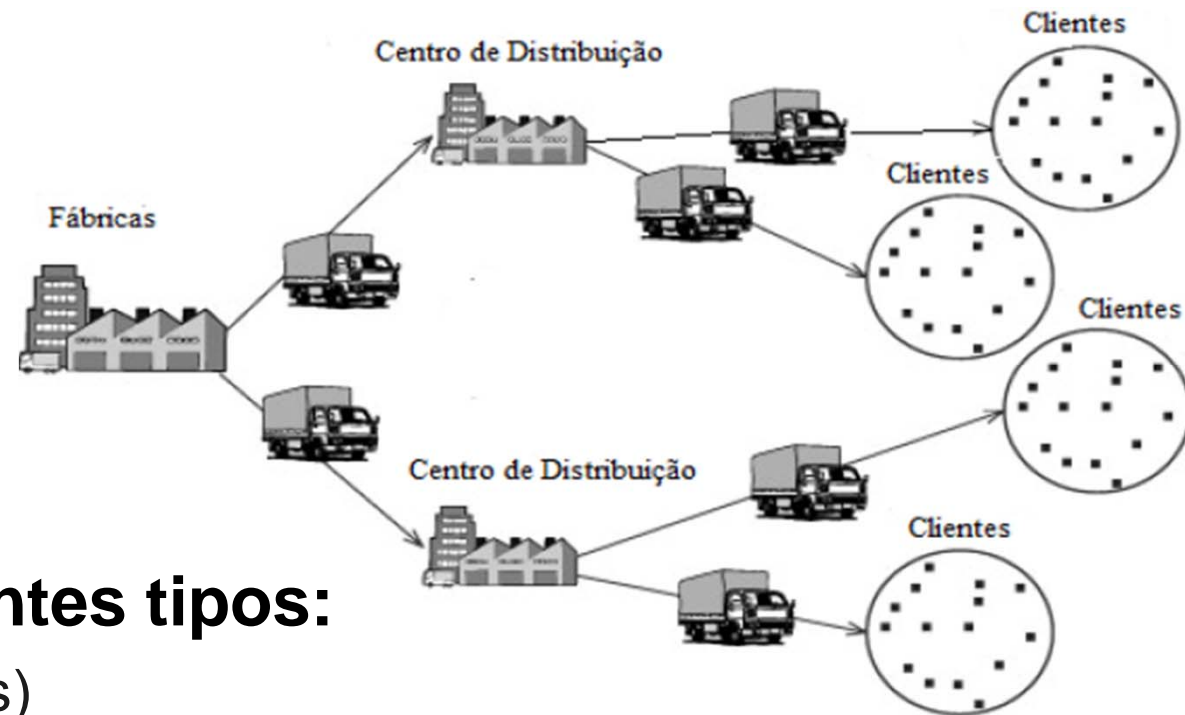
# Em que consiste a localização de instalações?

- **Definir/determinar**

- Número (quantas)
- Localização (onde)
- Tamanho

- **De instalações dos seguintes tipos:**

- Unidades produtivas (fábricas)
- Armazéns e Centros de Distribuição (CDs)
- Centros de peças de reposição
- Centros de Manutenção
- Unidades de socorro e emergência
- Etc.

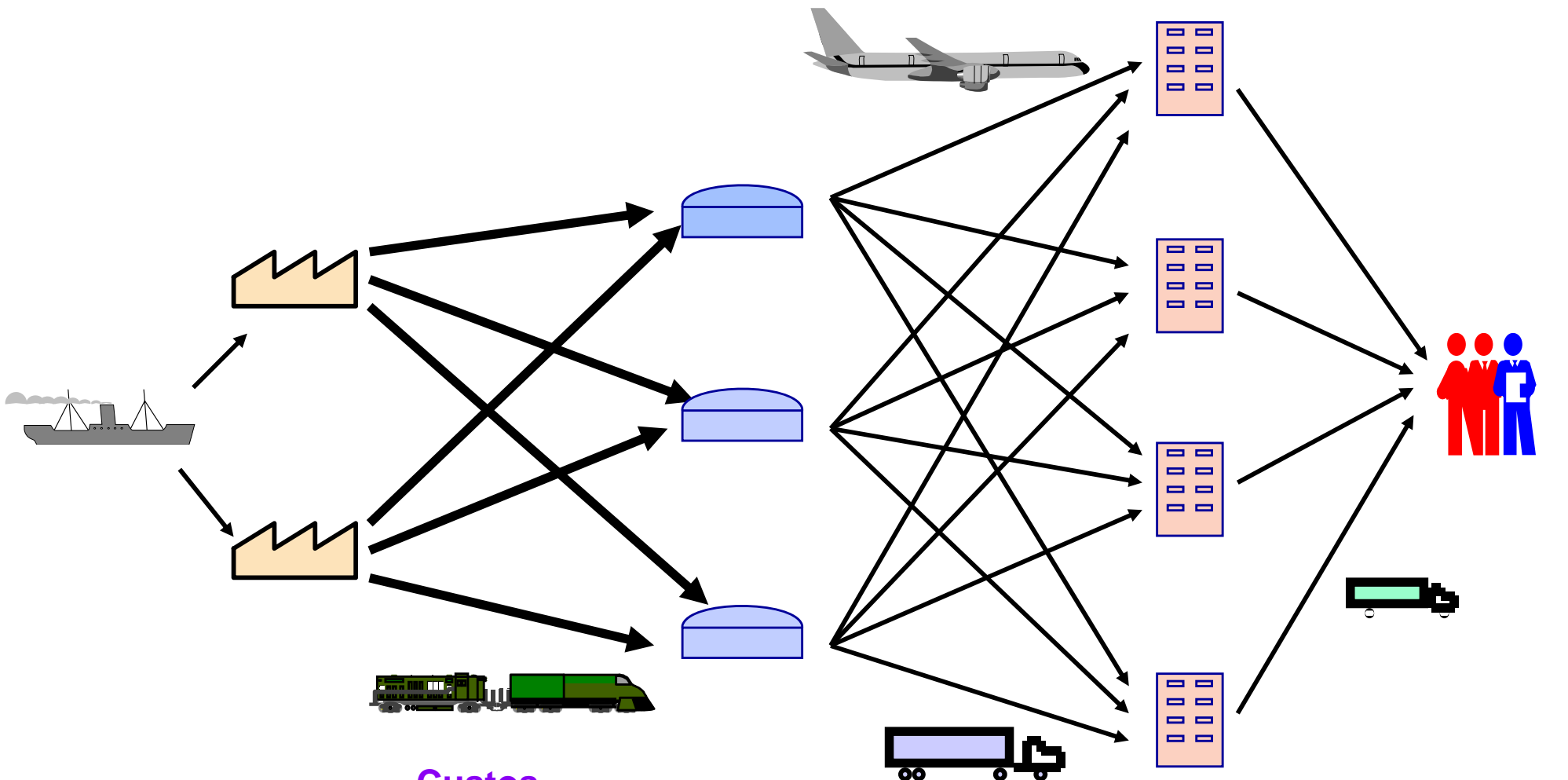


**Fornecedores**

**CD's**

**Lojas**

**Clientes**



**Custo de produção & compra**

**Custos de transportes**

**Custos de estoques e armazenagem**

**Custos de transportes**

**Custos de estoques e armazenagem**

**Custos de transportes**

## O que se busca determinar?

- **Quantas instalações são necessárias?**
- **Onde devem se localizar?**
- **Que clientes devem ser atendidos por cada instalação?**
- **Quais produtos/linhas devem ser produzidos em cada unidade?**
- **Qual a melhor forma de transportar os produtos?**
- **Quanto de estoque deve ser mantido em cada instalação?**
- **Qual o nível de serviço?**

# Decisão de Onde Localizar

**depende do tipo de instalação:**

- **Instalações produtivas**

Minimizar custo (produção + estoque + transporte/distribuição)  
Assegurar nível de serviço

- **Instalações de serviço / atendimento / emergência**

Minimizar tempo de atendimento (médio / máximo)

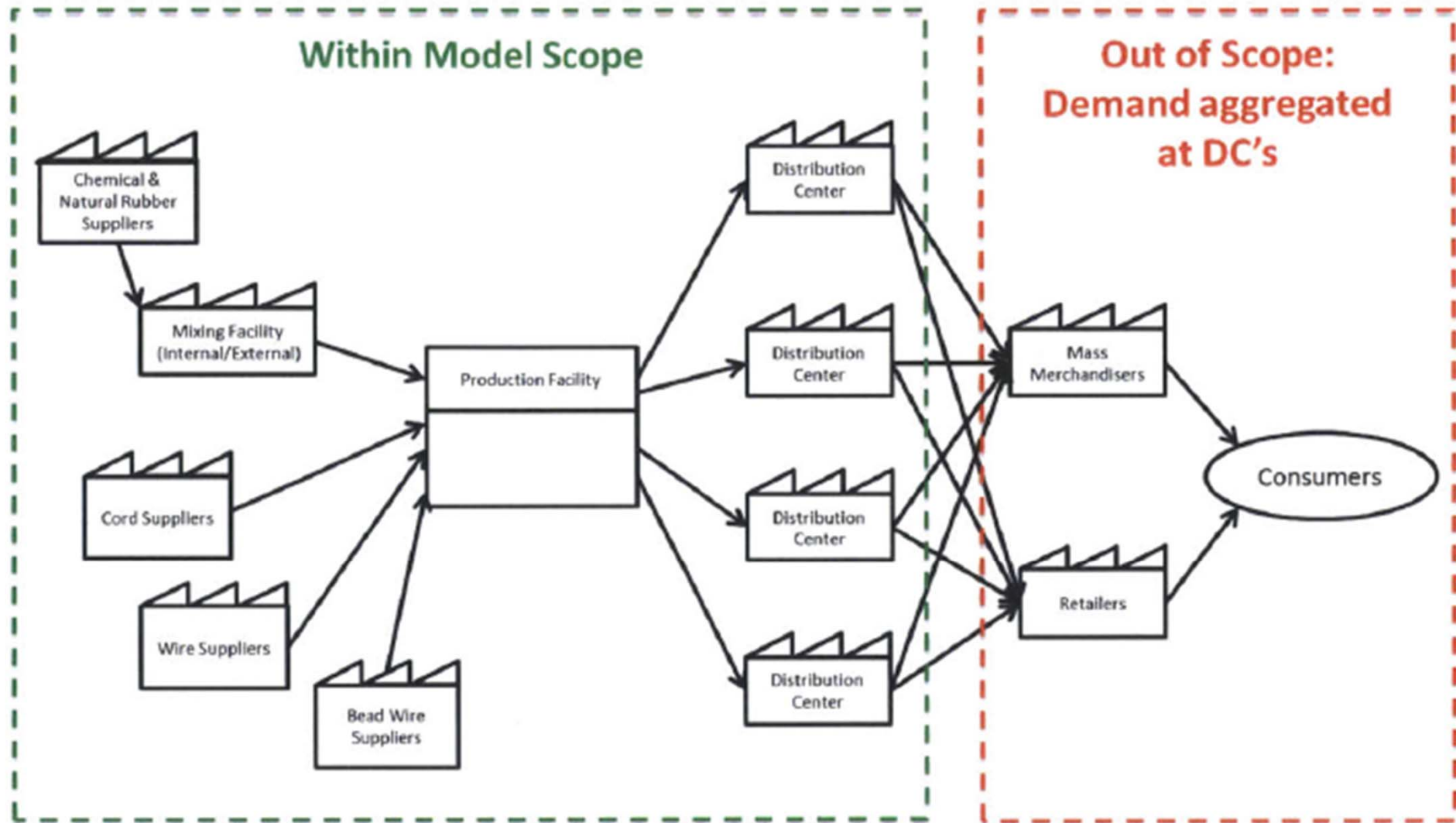
- **Instalações de vendas/distribuição**

presença: conquista e manutenção de mercados  
concorrência

# Quando planejar a localização ?

- **Ampliar mercados - expansão/relocação**
- **Novos requisitos de Nível de Serviço**
- **Melhoria eficiência produtiva**
- **Situações de emergência/contingência**
  - falhas, paradas, ...
- **Reestruturação da Cadeia de Suprimentos (*Supply Chain*)**
  - Reduzir custos
  - Melhorar abastecimento / nível de serviço

# Exemplo de escopo do Modelo



# Complexidade

- **Dezenas/centenas de produtos/itens a serem considerados**
- **Muitos locais candidatos**
- **Muitos fornecedores**
- **Milhares de clientes/destinos finais**
- **Múltiplos modais/rotas de transporte**
  
- **Difícil analisar todas as combinações**
  - **Número muito elevado!!!**

# Condicionantes do Problema de Localização

- no plano (qualquer local) x escolha entre locais candidatos pré-determinados?
- uma ou mais de uma instalação?
- um ou mais níveis de instalações?
- um produto ou multi-produto?
- há restrições de capacidade das instalações?
- há número máximo de instalações?
- quais custos fixos considerar nas instalações?
- custo de estoque deve ser considerado?



# Critérios QUALITATIVOS da decisão de localização

- **Dados de difícil quantificação**
- **Algum critério pode eliminar alternativa**
- **Aspectos diversos e específicos de cada problema:**
  - infra-estrutura em geral (água, energia, comunicações, acesso e transporte, ...)
  - equipamentos urbanos (hospitais, escolas, ....)
  - proximidade com fornecedores
  - mão-de-obra qualificada disponível
  - custo da mão-de-obra, organização sindical

# Exemplo de Avaliação Qualitativa Simplificada

Ponderação de fatores/atributos de decisão

FATOR DE LOCALIZAÇÃO	PESO	NOTAS (0 a 100)		
		Site 1	Site 2	Site 3
Qualidade da MO	.30	80	65	90
Proximidade com fornecedores	.20	100	91	75
Salário médio	.15	60	95	72
Recursos (escolas, hospitais)	.15	75	80	80
Proximidade com clientes	.10	65	90	95
Disponib. e custo transporte	.05	85	92	65
Proximidade aeroporto	.05	50	65	90

# Avaliação Qualitativa de Localização

NOTAS PONDERADAS		
<i>Site 1</i>	<i>Site 2</i>	<i>Site 3</i>
24.00	19.50	27.00
20.00	18.20	15.00
9.00	14.25	10.80
11.25	12.00	12.00
6.50	9.00	9.50
4.25	4.60	3.25
2.50	3.25	4.50
<b>77.50</b>	<b>80.80</b>	<b>82.05</b>

Site 3 tem a melhor nota

# Modelos de Análise Quantitativa da Decisão de Localização

- **Modelos de Otimização (matemáticos)**
  - Permitem definir a melhor configuração da rede dentre um número muito elevado de alternativas / combinações
    - Quantas instalações, onde, de que tamanho, clientes atendidos por cada local
    - Minimizar custo, ou tempo de atendimento, ou tempo máximo de resposta
- **Modelos de Simulação por Eventos Discretos (Estocástico)**
  - Permitem avaliar o desempenho de uma dada configuração de rede ao longo do tempo, considerando variações / sazonalidades, etc.
- **Modelos Multi-criterio**
  - Permitem considerar simultaneamente aspectos quantitativos e qualitativos
  - Podem usar “inputs” de modelos matemáticos e de simulação discreta como parte dos atributos considerados na análise multi-critério
    - Por exemplo, custo

# ASPECTOS DOS MODELOS DE OTIMIZAÇÃO

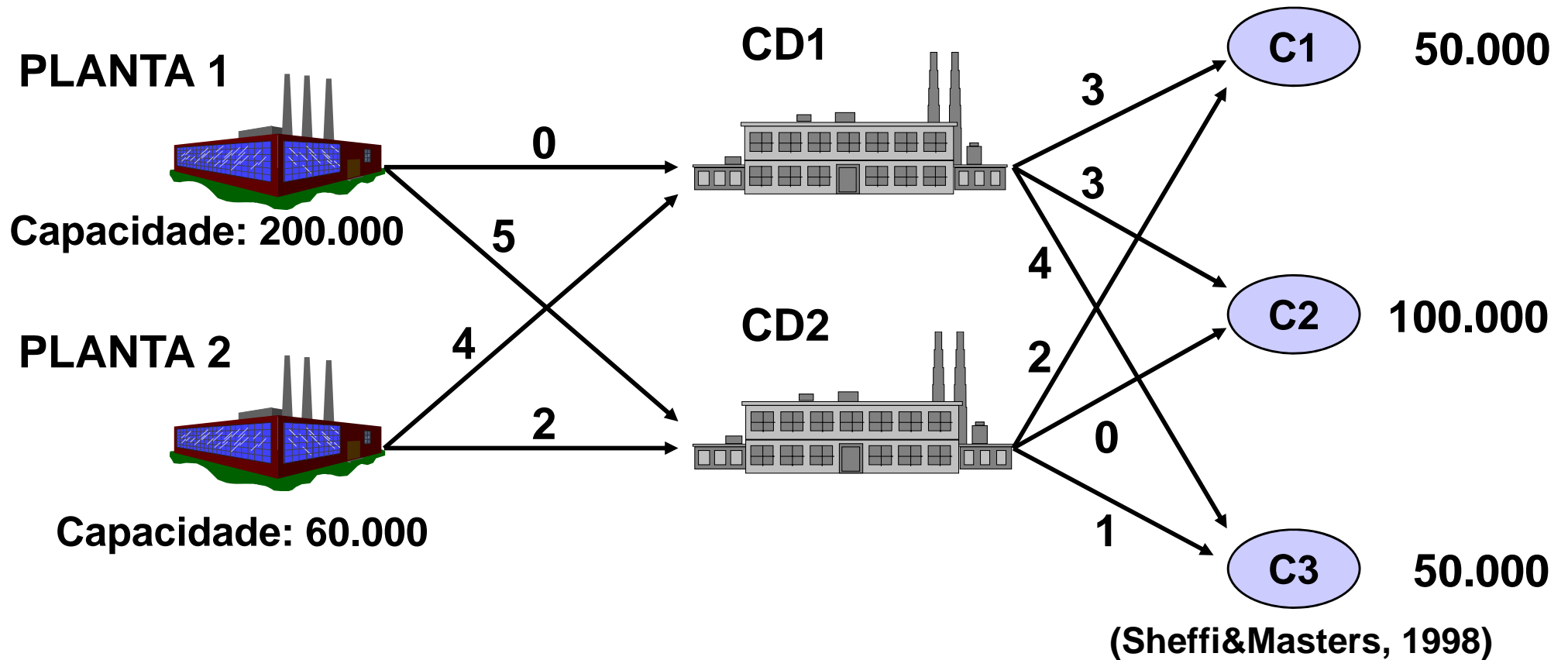
- **Minimizar o custo total (ou medida correlata)**
- **Nível de serviço é entrada/input (restrição definida *a priori*)**
- **Resultados:**
  - quais instalações foram selecionadas
  - Que clientes são atendidos por cada instalação
  - ligações mais econômicas, rotas/modais de transporte
- **Complexidade/Dificuldade de solução**
  - problemas *NP-hard* quando custos fixos estão presentes
  - impossibilidade de otimizar: uso de heurísticas

# EXEMPLO DE DECISÃO DE MALHA SEM CUSTO FIXO

Decisões táticas / operacionais :

Onde produzir, para quem entregar?

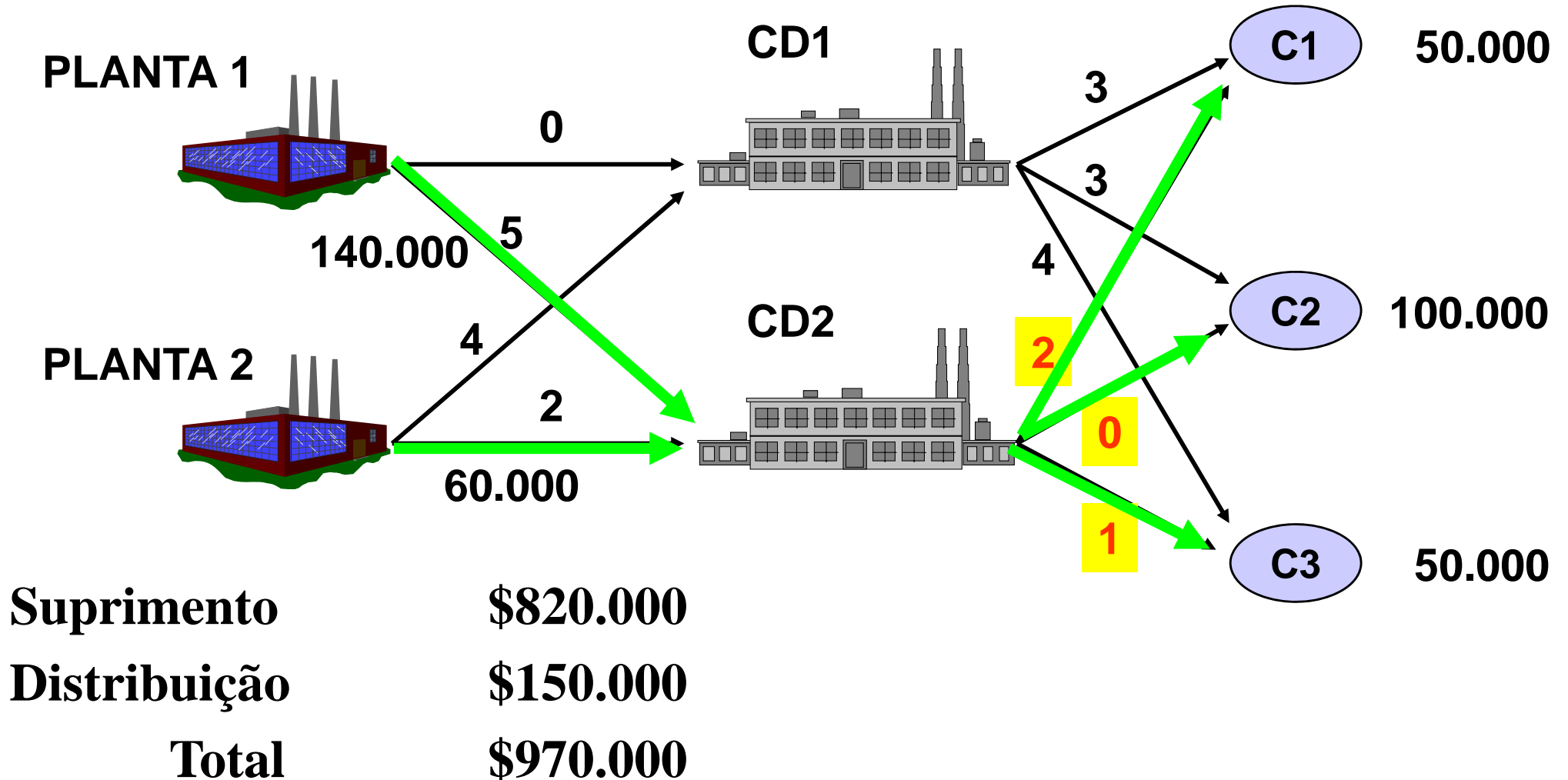
Sem decisão de abrir/fechar/realocar/ampliar instalações



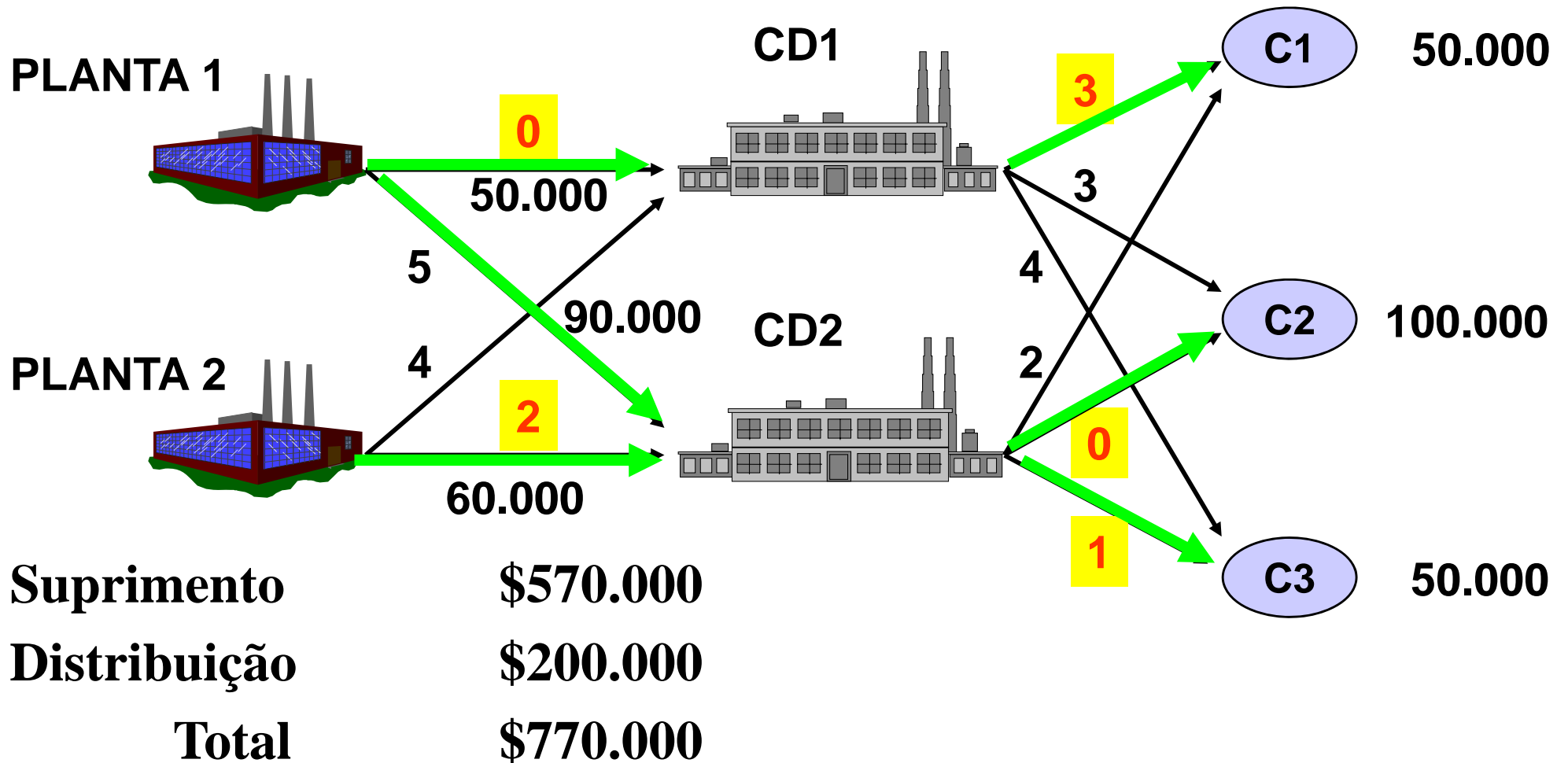
Pode ser resolvido facilmente através do algoritmo do problema do transbordo

# SOLUÇÃO 1 – Não ótima

escolhendo forma de distribuição considerando apenas o menor frete unitário de distribuição (CD  $\square$  Cliente), sem considerar capacidades



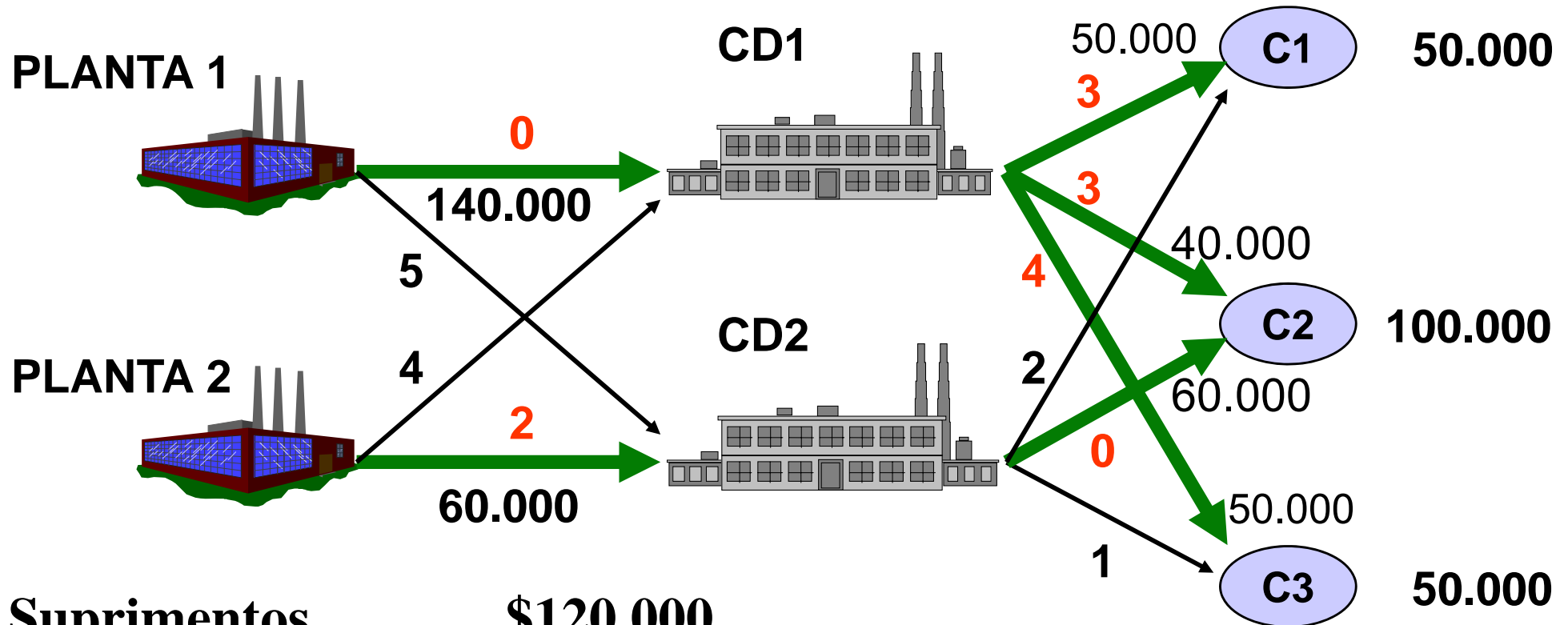
# SOLUÇÃO 2 – melhor que a anterior, porém ainda não ótima escolhendo forma de distribuição com base no **menor frete unitário total** (sem considerar capacidade)





# SOLUÇÃO ÓTIMA

solução de mínimo custo (de frete) total  
resolvendo o problema do transbordo



Suprimentos	\$120.000
Distribuição	\$470.000
<b>Total</b>	<b>\$590.000</b>

**Não considera custos fixos**

# Formulação Matemática

- **Função objetivo**

- Minimizar

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^s c_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^n c_{kj} x_{kj}$$

- Sujeito a

$$\sum_{k=1}^s x_{ik} = O_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{k=1}^s x_{kj} = D_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ik} = \sum_{j=1}^n x_{kj} \quad k = 1, \dots, s$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad x_{kj} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, s$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<b>Problema de Transbordo (Fluxo em Rede de Mínimo Custo) Masters &amp; Sheffi</b>							
2								
3	<b>Custos Unitários de Transporte</b>							
4			<b>Para</b>					
5			CD1	CD2				
6	<b>De</b>	Planta 1	\$0	\$5				
7		Planta 2	\$4	\$2				
8								
9			<b>Para</b>					
10			C1	C2	C3			
11	<b>De</b>	CD1	\$3	\$3	\$4			
12		CD2	\$2	\$0	\$1			
13								
14	<b>Fluxos (Carregamentos)</b>							
15			<b>Para</b>					
16			CD1	CD2	Total Enviado		Capacidade	
17	<b>De</b>	Planta 1	140	0	140	<=	200	
18		Planta 2	0	60	60	<=	60	
19		Total CD In	140	60				
20								
21			<b>Para</b>					
22			C1	C2	C3	Total CD Out		Total CD In
23	<b>De</b>	CD1	50	40	50	140	=	140
24		CD2	0	60	0	60	=	60
25		Total Recebido	50	100	50			
26			=	=	=			
27		Demanda	50	100	50			
28								
29	<b>Custo de Distribuição</b>							
30		Plantas-CD's	120					
31		CD's-Clientes	470					
32		TOTAL	590					

## Outra Formulação Matemática

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

*sujeito a*

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{(k,i) \in A} x_{ki} = b_i \quad \forall i \in N$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i,j) \in A$$

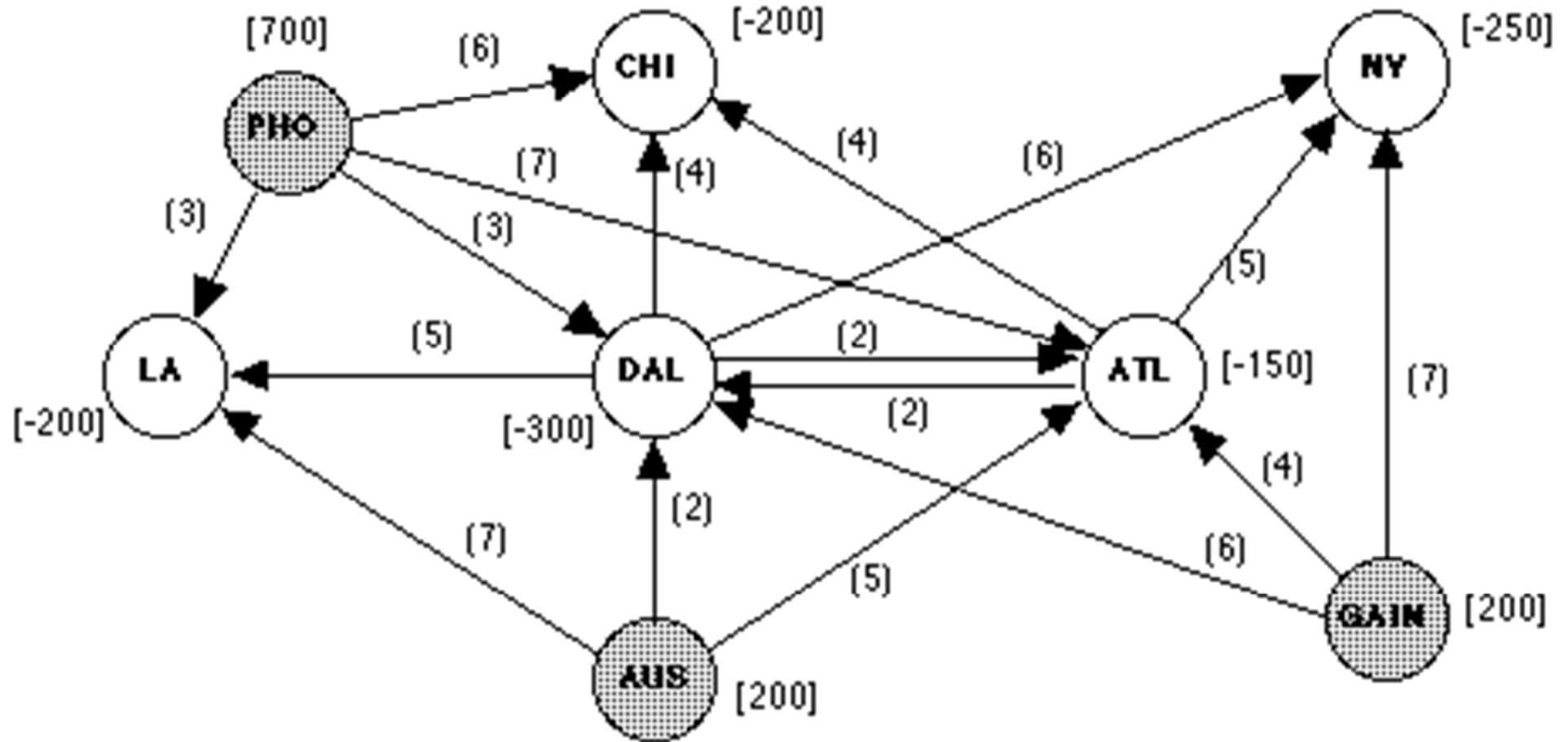
Condição para  
aplicação do  
algoritmo:

$$\sum_{i \in N} b_i = 0$$

Nós de Oferta ( $b_i > 0$ )  
Nós de Demanda ( $b_i < 0$ )  
Nós de Transbordo ( $b_i = 0$ )

# Exemplo

[Supply/Demand]  
[Shipping Cost]



O problema consiste em determinar o fluxo em cada arco ( $1 \rightarrow 2$ ,  $1 \rightarrow 3$ ,  $1 \rightarrow 4$ ,  $1 \rightarrow 5$ ,  $4 \rightarrow 2$ ,  $4 \rightarrow 3$ ,  $4 \rightarrow 5$ ,  $4 \rightarrow 6$ ,  $5 \rightarrow 2$ ,  $5 \rightarrow 4$ ,  $5 \rightarrow 6$ ,  $7 \rightarrow 3$ ,  $7 \rightarrow 4$ ,  $7 \rightarrow 5$ ,  $8 \rightarrow 4$ ,  $8 \rightarrow 5$ ,  $8 \rightarrow 6$ ) de tal modo que o custo total seja minimizado.

Cada cidade deve receber a demanda requerida.

Cada CD não pode enviar mais produtos que o disponível em estoque.

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA:

*Variáveis de decisão:*

Fluxo  $x_{ij}$  em cada arco ou ligação entre cidades  $i$  e  $j$ , ou seja, 17 variáveis:

$x_{12}$ ,  $x_{13}$ ,  $x_{14}$ ,  $x_{15}$ ,  $x_{42}$ ,  $x_{43}$ ,  $x_{45}$ ,  $x_{46}$ ,  $x_{52}$ ,  $x_{54}$ ,  $x_{56}$ ,  $x_{73}$ ,  $x_{74}$ ,  $x_{75}$ ,  $x_{84}$ ,  $x_{85}$  e  $x_{86}$

$$\begin{aligned} & \text{[MINIMIZAR]} \quad 6x_{12} + 3x_{13} + 3x_{14} + 7x_{15} + 4x_{42} + 5x_{43} \\ & + 2x_{45} + 6x_{46} + 4x_{52} + 2x_{54} + 5x_{56} + 7x_{73} + 2x_{74} + 5x_{75} + 6x_{84} + 4x_{85} + 7x_{86} \end{aligned}$$

sujeito a:

$$\text{nó 1} \quad x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 700$$

$$\text{nó 2} \quad -x_{12} - x_{42} - x_{52} = -200$$

$$\text{nó 3} \quad -x_{13} - x_{43} - x_{73} = -200$$

$$\text{nó 4} \quad x_{42} + x_{43} + x_{45} + x_{46} - x_{14} - x_{54} - x_{74} - x_{84} = -300$$

$$\text{nó 5} \quad x_{52} + x_{54} + x_{56} - x_{15} - x_{45} - x_{75} - x_{85} = -150$$

$$\text{nó 6} \quad -x_{46} - x_{56} - x_{86} = -250$$

$$\text{nó 7} \quad x_{73} + x_{74} + x_{75} = 200$$

$$\text{nó 8} \quad x_{84} + x_{85} + x_{86} = 200$$

$$x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{42}, x_{43}, x_{45}, x_{46}, x_{52}, x_{54}, x_{56}, x_{73}, x_{74}, x_{75}, x_{84}, x_{85} \text{ e } x_{86} \geq 0$$

# CLASSIFICAÇÃO DE WEBER

(WEBER, Alfred. Uber Den Standort Der Industrien, 1909)

A localização de uma fábrica, do ponto de vista do transporte, deve considerar a relação entre o peso dos insumos e o peso dos produtos

Fábrica próxima dos forneceadores

quando

peso dos insumos maior que peso dos produtos

Fábrica próxima dos consumidores

quando

peso dos insumos menor que peso dos produtos

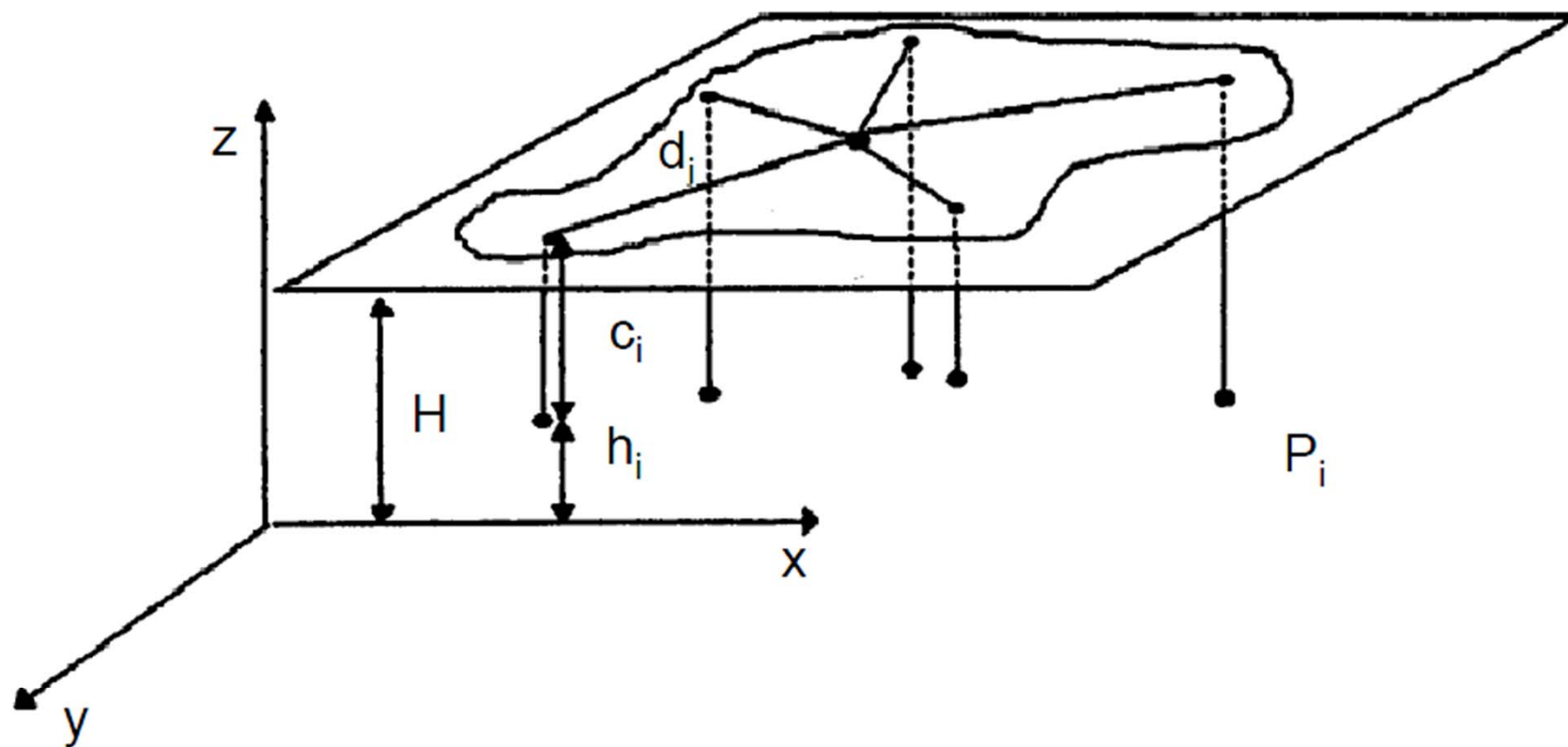
Fábrica próxima dos forneceadores ou dos consumidores

quando

peso dos insumos igual ao peso dos produtos



# MODELO MECÂNICO DE VARIGNON



$f_i =$  comprimento total do fio

Método:

Posiciona-se um mapa num plano horizontal e perfuram-se todos os pontos relativos às localidades de interesse.

Por estes orifícios passam-se fios que contenham em suas extremidades inferiores pesos proporcionais aos pesos a transportar por unidade de produto, então unem-se as extremidades opostas dos fios.

Não havendo atrito entre os orifícios e os fios, o ponto de equilíbrio das extremidades superiores dos fios (unidas) indica a posição ótima dos fios, dentro das hipóteses consideradas.

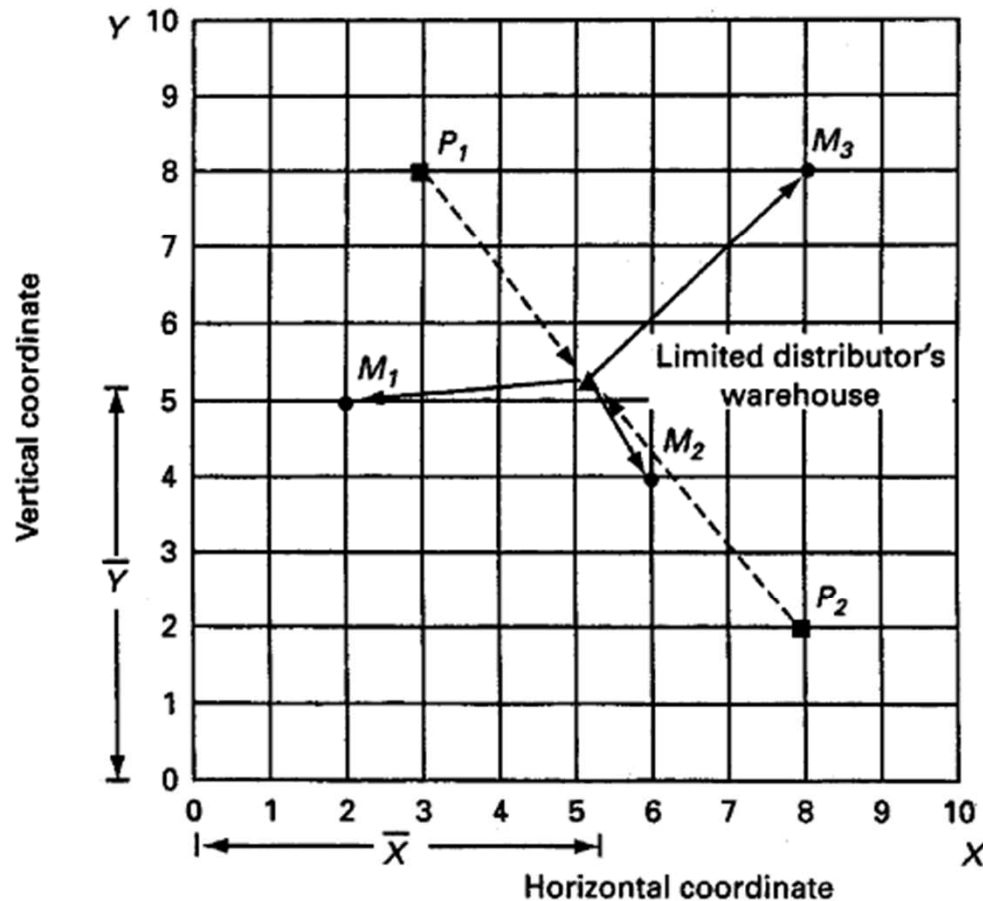
Posição de equilíbrio do sistema = Energia Potencial Mínima

Admite-se que:

- . O transporte entre a indústria e os pontos de interesse seja feito em linha reta
- . O custo seja proporcional ao produto da distância e o volume a transportar

# MÉTODO DA GRADE OU MÉTODO DO CENTRO DE GRAVIDADE

Esse método admite que a melhor localização da instalação situa-se no centro de gravidade das massas equivalentes associadas aos custos de transporte



# MÉTODO DO CENTRO DE GRAVIDADE

## modelo de localização planar

- **ONDE Localizar uma única instalação?**
- **No plano**
  - Ou seja, determinar localização da instalação, dada pelas suas coordenadas  $(x_0, y_0)$
- **De modo a minimizar distância/custo total**
  - ponderada ou não ponderada pelas quantidades  $d_i$

$$\min \sum_i d_i \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}$$

## Coordenadas do centro de gravidade

$$\bar{X} = \frac{\sum V_i R_i X_i}{\sum V_i R_i} \quad \bar{Y} = \frac{\sum V_i R_i Y_i}{\sum V_i R_i}$$

$V_i$  = volume movimentado de/para o ponto  $i$

$R_i$  = custo unitário de transporte para o ponto  $i$  (\$/ ton km)

$X_i, Y_i$  = coordenadas dos pontos de suprimento/ consumo  $i$

$\bar{X}, \bar{Y}$  = coordenadas da instalação a ser localizada

Esse método permite obter uma boa aproximação para a solução de mínimo custo, principalmente se houver um grande número de pontos, os custos de transportes forem lineares e não haja grandes diferenças entre os volumes associados aos pontos

# Exemplo

- **Encontrar a localização ótima para o armazem que recebe o produto das fábricas (pontos 1 e 2) com destino aos clientes 3, 4 e 5**

Ponto i	Tipo	$X_i$	$Y_i$	volume $V_i$	frete $R_i$
1	Fábrica	3	8	2000	0,050
2	Fábrica	8	2	3000	0,050
3	Cliente	2	5	2500	0,075
4	Cliente	6	4	1000	0,075
5	Cliente	8	8	1500	0,075

# Resolução

Ponto i	Tipo	Xi	Yi	volume Vi	frete Ri	ViRi	ViRiXi	ViRiYi
1	Fábrica	3	8	2000	0,050	100,0	300	800
2	Fábrica	8	2	3000	0,050	150,0	1200	300
3	Cliente	2	5	2500	0,075	187,5	375	937,5
4	Cliente	6	4	1000	0,075	75,0	450	300
5	Cliente	8	8	1500	0,075	112,5	900	900
						625,0	3225	3237,5

Coordenadas do armazém

$$X_a = \frac{V_i R_i X_i}{V_i R_i} = 5,16$$

$$Y_a = \frac{V_i R_i Y_i}{V_i R_i} = 5,18$$

# MODELOS DE LOCALIZAÇÃO DISCRETA

- **Modelo de otimização (programação linear inteira)**
- **Os locais candidatos a serem abertas uma ou mais instalações são conhecidos a priori**
- **Pode contemplar instalações existentes, ampliações e novas**
- **Resulta nos locais escolhidos e na alocação dos clientes a cada instalação**



# Problema de Localização Capacitado

- Determinar:
  - Onde localizar as instalações
  - Que clientes atender a partir de cada instalação
- De modo que
  - Todos os clientes sejam atendidos
  - Capacidades das instalações sejam respeitadas
  - Custo total (fixo + variável) seja minimizado
- *Se não fosse pelos custos fixos das instalações, o problema poderia ser modelado como problema de transporte/transbordo*

# Dados do problema de localização de instalações

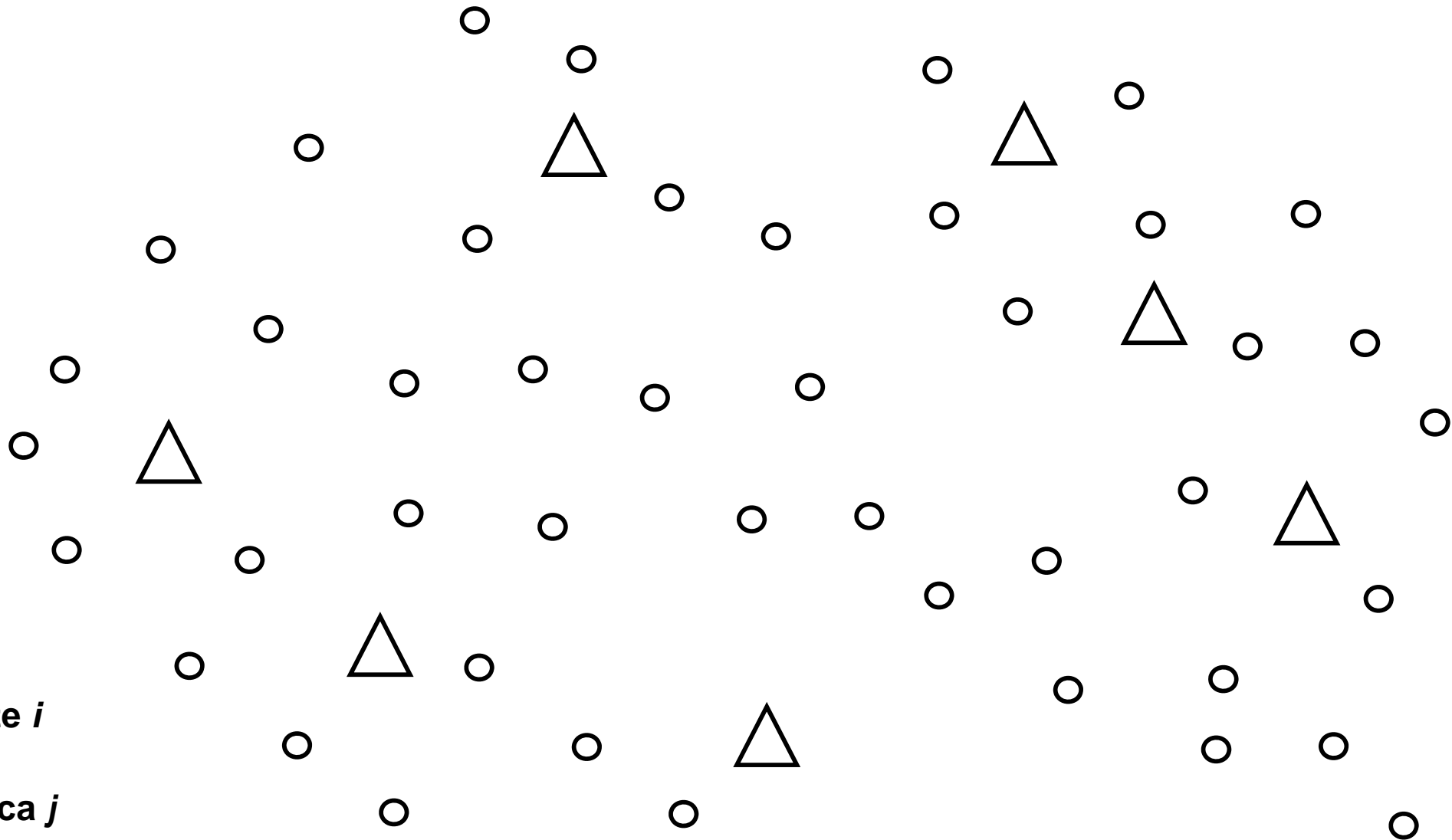
- $i$  = conjunto de pontos a serem atendidos.
- $d_i$  = demanda de cada ponto a ser atendido
- $j$  = conjunto de locais candidatos (pré-definidos) para localização de instalações
- $b_j$  = capacidade da instalação no local candidato  $j$
- $f_j$  = custo fixo da instalação no local candidato  $j$
- $c_{ij}$  = custo unitário de transporte entre cada ponto a ser atendido  $i$  e cada instalação candidata  $j$

# Definição do Problema de Localização - II

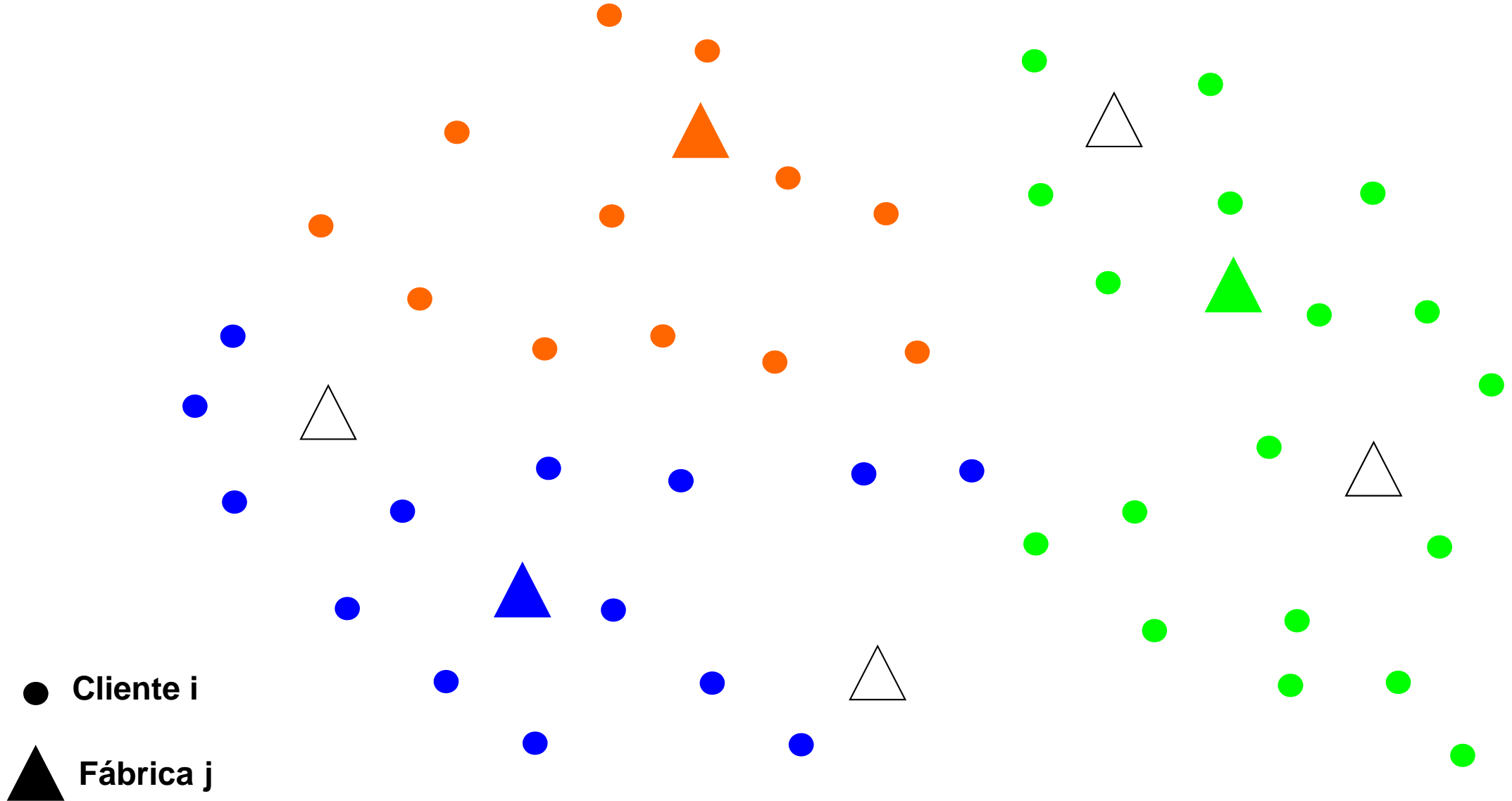
- Deseja-se determinar:
  - Quais instalações  $j$  abrir dentre as candidatas?
  - Que pontos de demanda  $i$  atender a partir de cada instalação  $j$  selecionada?
- Tal que
  - Toda a demanda dos pontos  $i$  seja atendida
  - Capacidade de cada instalação  $j$  seja respeitada
- Buscando
  - *Minimizar o custo total = custos fixos + custos variáveis de transporte*

○ Cliente  $i$

△ Fábrica  $j$



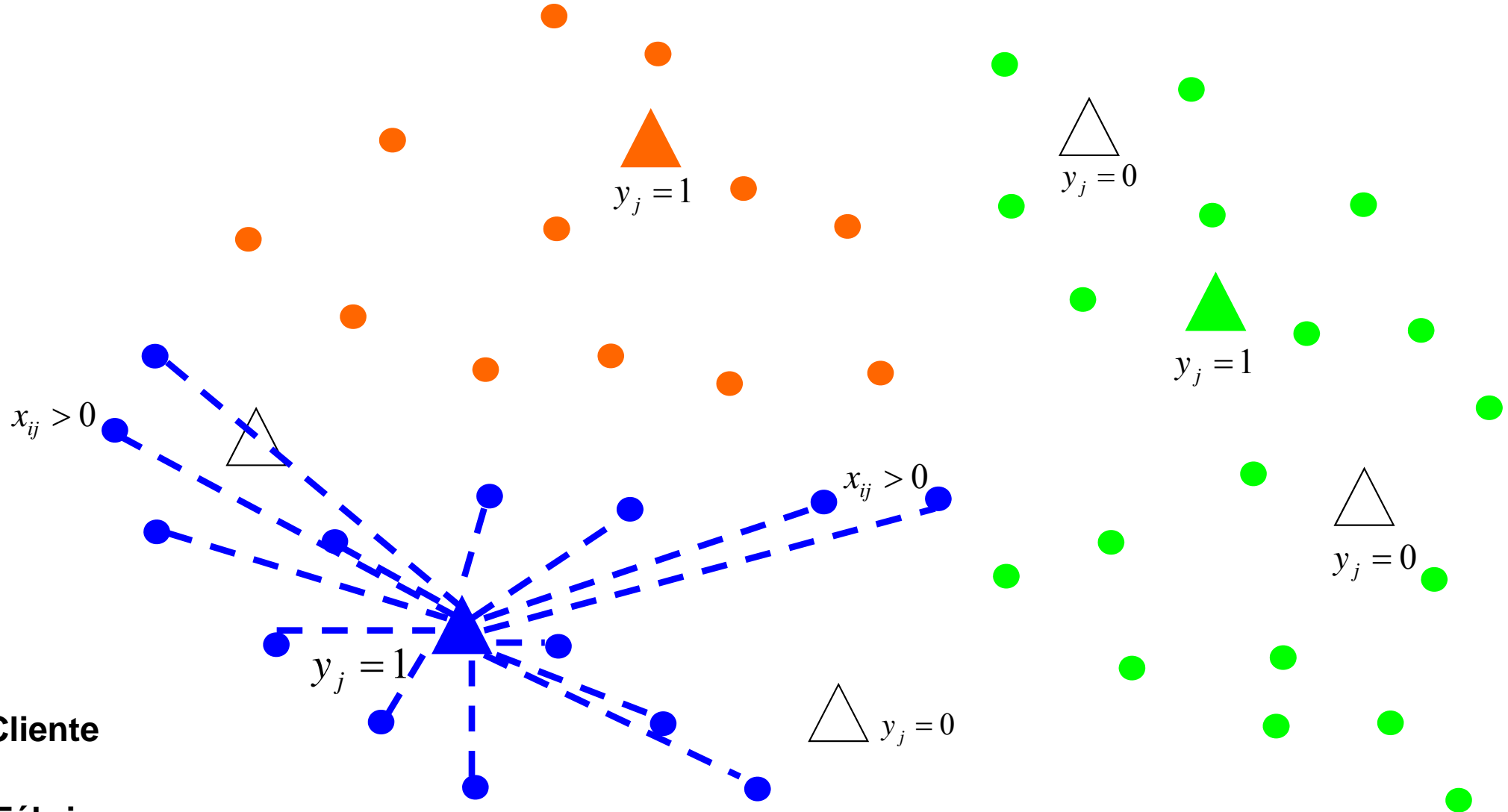
# Rede Otimizada



# Variáveis de decisão

- $y_j = 1$ , se a instalação  $j$  é escolhida (construída/implantada no local  $j$ )  
0, caso contrário
- $x_{ij}$  = quantidade enviada para o ponto de demanda  $i$   
a partir da instalação  $j$

# Ilustração – Possível Solução



● Cliente

▲ Fábrica

# Formulação matemática do problema de localização (capacitado)

$$[\min] \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \sum_j f_j y_j$$

Minimizar custo total (variável + fixo)

s.a.

$$\sum_j x_{ij} = d_i \quad \forall i$$

Atender toda a demanda de cada cliente  $i$

$$\sum_i x_{ij} \leq b_j y_j \quad \forall j$$

1) Respeitar capacidade de cada instalação  $j$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$y_j \in \{0, 1\}$$

2) Não pode atender a partir de instalações não selecionadas (i.e.  $Y_j=0$ )

$i$  = conjunto de clientes a serem atendidos

$j$  = conjunto de locais candidatos

$d_i$  = demanda do nó  $i$

$f_j$  = custo fixo de abrir a instalação  $j$

$c_{ij}$  = custo de atender o cliente  $i$  a partir da instalação  $j$

$b_j$  = capacidade da instalação  $j$

$y_j$  = 1 se a instalação  $j$  é escolhida, 0 caso contrário

$x_{ij}$  = quantidade de carga enviada para o cliente  $i$  a partir da instalação  $j$



## Exemplo

	Distâncias (mi)				
	Sacramento	Albany	Austin	Tallahassee	Harrisburg
Cidade	CA	NY	TX	FL	PA
Sacramento , CA	0	2.483	1.462	2.174	2.357
Albany , NY	2.483	0	1.572	1.023	230
Austin , TX	1.462	1.572	0	803	1.359
Tallahassee , FL	2.174	1.023	803	0	796
Harrisburg , PA	2.357	230	1.359	796	0

Custo unitário (\$/mi) = \$0.0001

	Demanda				
Qtd Necessária	369365	101.082	465.622	124.773	52.376

	Outros Dados				
Cidade	Pop. Rank	Pop.Estado	Pop. Cidade	Custo Fixo	Capacidade
Sacramento , CA	1	29.760.021	369.365	115.800	600.000
Albany , NY	2	17.990.455	101.082	101.800	650.000
Austin , TX	3	16.986.510	465.622	72.600	700.000
Tallahassee , FL	4	12.937.926	124.773	72.400	550.000
Harrisburg , PA	5	11.881.643	52.376	38.400	650.000

$$\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \sum_j f_j y_j$$

$$\sum_i x_{ij} \leq b_j y_j$$

Minimize total cost

189 330

Cost per mile

0.1

Decision variables

City	Locate?	Sacramento , CA	Albany , NY	Austin , TX	Tallahassee , FL	Harrisburg , PA	Flow out of plant	Actual Capacity	Fixed Cost	Nominal Capacity
Sacramento , CA	0	0	0	0	0	0	-	0.000	115 800	600
Albany , NY	0	0	0	0	0	0	0.000	0.000	101 800	650
Austin , TX	1	234.378	0	465.622	0	0	700.000	700.000	72 600	700
Tallahassee , FL	0	0	0	0	0	0	-	0.000	72 400	550
Harrisburg , PA	1	134.947	101.082	0	124.773	52.376	413.178	650.000	38 400	650
<b>Flow into city</b>		369.325	101.082	465.622	124.773	52.376				
<b>Demand</b>		369.325	101.082	465.622	124.773	52.376				

$Y_j$

$X_{ij}$

$$\sum_j x_{ij} = d_i$$

# Exemplo Prático

## Problema de Localização Capacitado

Inspirado no livro "Supply Chain Management" de Sunil Chopra e Peter Meindl

### Custos Unitários de Transporte (\$/contêiner), Capacidades e Demandas (contêineres/mês)

Fábrica	Mercado												
	EUA e Canadá Leste	EUA e Canadá Oeste	México	América Central	América do Sul - Andes	América do Sul - Cone Sul	Brasil	Europa Ocidental	Europa do Leste	Oriente Médio	Africa	Japão	China
Estados Unidos	500	400	450	800	900	1000	1200	1300	1350	1400	1300	2000	1800
Alemanha	1300	1500	1300	1350	1200	1400	1400	400	700	1000	1100	1400	1250
México	600	400	300	500	600	1000	850	1400	1500	1500	1500	1900	1800
Japão	2000	1700	1800	1900	2000	2100	2100	1300	1500	1100	1800	300	500
China	1500	1400	1500	1800	1900	2100	2000	1200	1400	1050	1200	450	200
Brasil	1200	1350	1200	900	600	400	300	1500	1500	1600	900	2100	1800
Coreia	2200	1800	1800	2300	2000	2400	2300	1200	1050	900	1100	1000	400
Demanda (cont/mês)	180	120	100	40	50	90	140	130	80	50	40	100	270

Houve uma grave crise e as demandas caíram muito. Para esse novo cenário, pede-se

1) Determinar o novo plano de abastecimento ótimo, em termos de qual fábrica deve atender cada mercado otimizando apenas custos de transporte.

2) Como se alteraria a decisão se fossem considerados também os custos fixos? Quais fábricas devem permanecer produzindo e que mercados abastecem? Alguma fábrica deveria ser fechada? Qual a redução de custos esperada?

# Problema das $p$ -Medianas

- Localizar  $p$  instalações nos vértices ( $N$ ) de uma rede e definir a alocação dos nós de demanda a essas instalações de tal forma a minimizar a distância total ponderada entre instalações e pontos de demanda.
- O número de instalações “ $p$ ” a serem localizadas é dado do problema

# Formulação Matemática do problema das $p$ -Medianas

• **Minimizar** 
$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} q_j c_{ij} x_{ij}$$

• **Sujeito a** 
$$\sum_{i \in N} x_{ii} = p$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in N$$

$$x_{ij} \leq x_{ii} \quad \forall i, j \in N$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in N$$

$N$  = conjunto de vértices

$p$  = número de medianas

$q_i$  = demanda do nó  $i$

$c_{ij}$  = custo entre os nós  $i$  e  $j$

$x_{ii} = 1$  se o nó  $i$  é mediana,

0 caso contrário

$x_{ij} = 1$  se o nó  $j$  está ligado à mediana  $i$

0 caso contrário

## Alternativamente pode-se escrever a Formulação Matemática do problema das $p$ -Medianas como:

• **Minimizar** 
$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} q_j c_{ij} x_{ij}$$

• **Sujeito a** 
$$\sum_{i \in N} y_i = p$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in N$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad \forall i, j \in N$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad x_{ij} \in \{0,1\}$$

$N$  = conjunto de vértices

$p$  = número de medianas

$q_i$  = demanda do nó  $i$

$c_{ij}$  = custo entre os nós  $i$  e  $j$

$y_i = 1$  se o nó  $i$  é mediana,

0 caso contrário

$x_{ij} = 1$  se o nó  $j$  está ligado à mediana  $i$

0 caso contrário

## A fim de reduzir o número de restrições:

- **Minimizar** 
$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} q_j c_{ij} x_{ij}$$

- **Sujeito a** 
$$\sum_{i \in N} y_i = p$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in N$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} \leq |N| y_i \quad \forall i \in N$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad x_{ij} \in \{0, 1\}$$

$N$  = conjunto de vértices

$p$  = número de medianas

$q_i$  = demanda do nó  $i$

$c_{ij}$  = custo entre os nós  $i$  e  $j$

$y_i = 1$  se o nó  $i$  é mediana,

0 caso contrário

$x_{ij} = 1$  se o nó  $j$  está ligado à mediana  $i$

0 caso contrário

# Exemplo

## Problema de p-medianas

Empresa de distribuição de encomendas precisa localizar  $p=2$  centros de distribuição

Determinar em que cidades localizar os dois centros de distribuição e que cidades atender a partir de cada um deles

### Dados

Nó	Cidade	Demanda (kg)	Custo Unit Transporte (R\$/km) por kg	Matriz Distâncias (km)										
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	Campinas	840	0,0030	1	0	209	156	189	261	343	39	529	450	72
2	Ribeirão Preto	1080	0,0035	2	209	0	369	402	219	185	179	448	328	189
3	S.J. dos Campos	320	0,0030	3	156	369	0	43	424	516	189	651	618	226
4	Taubaté	480	0,0040	4	189	402	43	0	468	560	234	696	663	271
5	Bauru	900	0,0035	5	261	219	424	468	0	210	235	283	196	209
6	S.J. Do Rio Preto	360	0,0030	6	343	185	516	560	210	0	337	293	158	323
7	Americana	600	0,0040	7	39	179	189	234	235	337	0	506	430	34
8	Pres. Prudente	600	0,0040	8	529	448	651	696	283	293	506	0	181	472
9	Araçatuba	350	0,0040	9	450	328	618	663	196	158	430	181	0	404
10	Piracicaba	240	0,0035	10	72	189	226	271	209	323	34	472	404	0
Demanda (kg)					840	1080	320	480	900	360	600	600	350	240



# Modelo Matemático

Modelo Matemático		$y_i \in \{0,1\}$	$x_{ij}$	Nó $j$										$ N  =$	10	
Nó $i$	Cidade			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
1	Campinas	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	6	$\leq$	10
2	Ribeirão Preto	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	0
3	S.J. dos Campos	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	0
4	Taubaté	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	0
5	Bauru	1	5	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	4	$\leq$	10
6	S.J. Do Rio Preto	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	0
7	Americana	0	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	0
8	Pres. Prudente	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	0
9	Araçatuba	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	0
10	Piracicaba	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	0
		$2 \sum_{i \in N} y_i = p$		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			
		2		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			
Custo Total		2320,12														
		$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} q_i d_{ij} x_{ij}$														
								$\sum_{i \in N} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N$								

## **Problemas de Localização como Cobertura de Conjunto**

- **Também conhecidos como problemas do tipo “set covering”**
- **A empresa Western Airlines precisa localizar hubs nos EUA.**
- **Western tem vôos entre as seguintes cidades: Atlanta, Boston, Chicago, Denver, Houston, Los Angeles, New Orleans, New York, Pittsburgh, Salt Lake City, San Francisco, e Seattle (12 cidades).**
- **É preciso que cada cidade esteja a no máximo 1000 milhas de um hub escolhido**
- **Determinar o número mínimo de hubs**

## Tabela de Distâncias

	<b>HUB</b>	<b>Cidades no raio de 1000 mi</b>
1	Atlanta (AT)	AT, CH, HO, NO, NY, PI
2	Boston (BO)	BO, NY, PI
3	Chicago (CH)	AT, CH, NY, NO, PI
4	Denver (DE)	DE, SL
5	Houston (HO)	AT, HO, NO
6	Los Angeles (LA)	LA, SL, SF
7	New Orleans (NO)	AT, CH, HO, NO
8	New York (NY)	AT, BO, CH, NY, PI
9	Pittsburgh (PI)	AT, BO, CH, NY, PI
10	Salt Lake City (SL)	DE, LA, SL, SF, SE
11	San Francisco (SF)	LA, SL, SF, SE
12	Seattle (SE)	SL, SF, SE

## Formulação Matemática do Problema de Cobertura

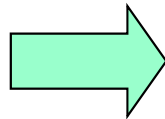
- Variáveis de decisão:**

$x_j = 1$  se o hub é localizado na cidade  $j$  e 0 caso contrário

- Parâmetros**

–  $a_{ij} = 1$  se a cidade  $i$  é atendida pelo hub  $j$  e 0 caso contrário

HUB	< = 1000 mi
AT	AT, CH, HO, NO, NY, PI
BO	BO, NY, PI
CH	AT, CH, NY, NO, PI
DE	DE, SL
HO	AT, HO, NO
LA	LA, SL, SF
NO	AT, CH, HO, NO
NY	AT, BO, CH, NY, PI
PI	AT, BO, CH, NY, PI
SL	DE, LA, SL, SF, SE
SF	LA, SL, SF, SE
SE	SL, SF, SE



	AT	BO	CH	DE	HO	LA	NO	NY	PI	SL	SF	SE
AT	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0
BO	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
CH	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
DE	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
HO	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
LA	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0
NO	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
NY	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
PI	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
SL	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1
SF	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1
SE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1

## Modelo Matemático

$$[\text{min}] \sum_{j=1}^{12} x_j = x_{AT} + x_{BO} + x_{CH} + \dots + x_{SF} + x_{SE}$$

*s.a.*

$$\sum_{j=1}^{12} a_{ij} x_j \geq 1, \quad \forall i = 1, \dots, 12$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, 2, \dots, 12$$

# Implementação em Planilha

Western Airlines Set Covering Problem															
	Hub Potencial														
Cidades	AT	BO	CH	DE	HO	LA	NO	NY	PI	SL	SF	SE	nº hubs que atendem	>=	Requerido
AT	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	2	>=	1
BO	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	>=	1
CH	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	>=	1
DE	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	>=	1
HO	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	>=	1
LA	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	>=	1
NO	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	>=	1
NY	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	>=	1
PI	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	>=	1
SL	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	>=	1
SF	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	>=	1
SE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	>=	1
													Total hubs		
Hub ?	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	3		



## Problema de Localização de Inspetores

A Globe Casualty Company posiciona inspetores de reclamações numa área metropolitana a fim de reagir rapidamente a pedidos de indenizações resultantes de acidentes de trânsito. Para a eficiência do negócio, o inspetor precisa estar no local do acidente no máximo em 30 minutos após ser chamado, de maneira que os clientes sintam que estão sendo bem atendidos. A cidade foi dividida em dez zonas de chamados de sinistros e nas quais os inspetores de reclamações são posicionados. Os tempos de reação em minutos entre as dez zonas são

mostrados na Tabela 13-12. Para cumprir a metade do tempo de reação de 30 minutos, quantos devem ser os postos de inspetores de reclamações, e em que zonas precisam localizar-se?

TABELA 13-12 Tempos, em minutos, entre as zonas para a Globe Casualty Company

Da zona	Para a zona									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5	23	34	15	45	55	25	10	9	19
2		5	18	12	53	37	27	33	26	16
3			5	6	14	41	31	28	24	17
4				5	15	29	45	60	31	23
5					5	25	27	14	39	43
6						5	7	13	42	53
7							5	33	14	8
8								5	26	10
9									5	19
10										5