Veja que $z \in [0,R]$ num hemisfério. Calculamos em um hemisfério e $\times 2$ para total.

$$I = 2 \int_{z=0}^{z=R} dI = \frac{3}{4}\frac{M}{R^3}\int_0^R r^4(z)\,dz$$

Mas $\underline{\underline{r = r(z)}}$! De fato, $r^2 = R^2 - z^2$, assim

$$I = \frac{3}{4}\frac{M}{R^3}\int_0^R dz\,(R^2-z^2)^2 = \boxed{\frac{2}{5}MR^2}.$$

Raio de giração: Você notou que os momentos de inércia são sempre algo $M \times (\text{comprimento})^2$?

$I = Mk^2 \rightarrow$ É como se toda a massa estivesse concentrada a uma distância k do eixo de rotação.

com relação ao

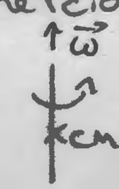
① Anel (centro) $\rightarrow k = R$

② Disco (centro) $\rightarrow k = \frac{R}{\sqrt{2}}$

③ Esfera (centro) $\rightarrow k = R\sqrt{\frac{2}{5}}$

ordem decrescente

Qual seria o momento de inércia de um fio



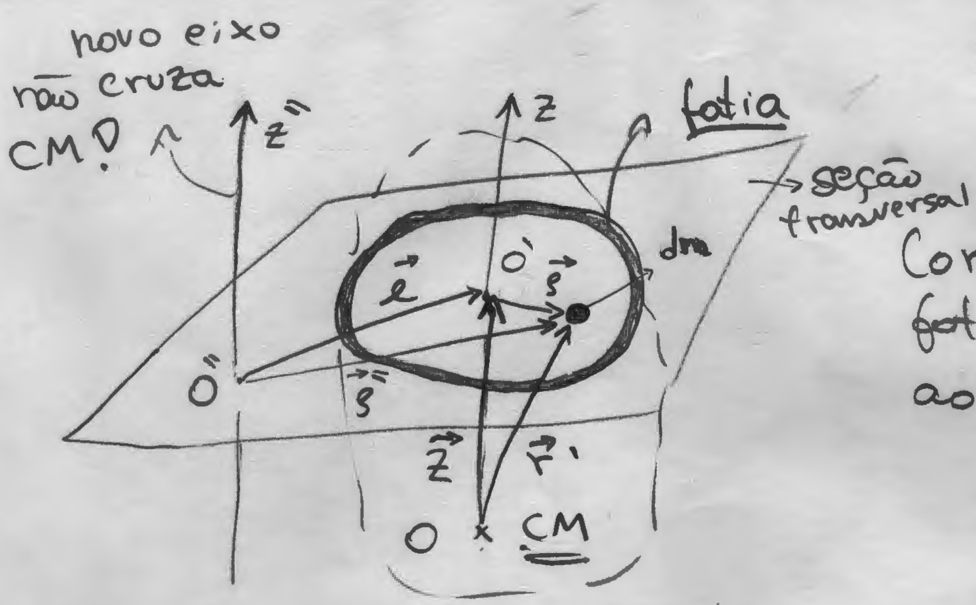
de espessura $\rightarrow 0$?

Em todos os casos anteriores, o eixo de rotação passava pelo CM. O que acontece quando isso não ocorre?

→ Aqui →

Teorema dos eixos paralelos (steiner)

$z'' \parallel z$



Corpo = pilha de fatias delgadas ⊥ ao eixo

$$dI''_{\text{com relação ao } O''} = \int_{\text{fatia}} \vec{\rho}\,''^2\, dm \quad , \quad \vec{\rho}\,'' = \vec{\rho} + \vec{\ell}$$

$$\vec{\rho}\,''^2 = \rho^2 + \ell^2 + 2\vec{\ell}\cdot\vec{\rho} \quad \text{então}$$

$$dI'' = \int_{\text{fatia}} \vec{\rho}^{\,2}\, dm + 2\vec{\ell}\cdot\int_{\text{fatia}} \vec{\rho}\, dm + \vec{\ell}^{\,2}\int_{\text{fatia}} dm$$

integrando todas as fatias

$$I'' = \underbrace{\int \vec{\rho}^{\,2}\, dm}_{I} + \vec{\ell}^{\,2}\underbrace{M}_{\text{massa total}} + \underbrace{\cancel{2\vec{\ell}\cdot\int \vec{\rho}\, dm}}_{\text{zero}}$$

Como $\vec{r}''$ é o vetor posição de dm em relação ao centro de massa, $\boxed{\int \vec{r}'' dm = 0}$

Mas $\vec{r}'' = \vec{\rho} + \vec{z}$ e $\vec{\rho} \perp \vec{z}$ então

$$\int \vec{\rho}\, dm + \int \vec{z}\, dm = 0 \Rightarrow \int \vec{\rho}\, dm = 0$$

$$\int \vec{z}\, dm = 0$$

simultaneamente pois $\vec{\rho} \perp \vec{z}$

Então, vemos que

$$\boxed{I'' = I_{CM} + M\ell^2}$$

(Steiner) teorema dos eixos paralelos.

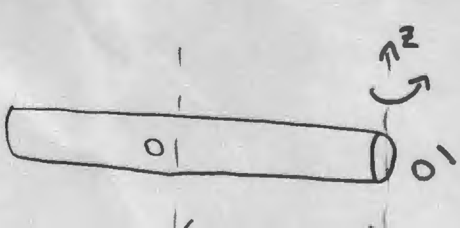
$\vec{\ell} \rightarrow$ distância entre os eixos paralelos no plano

Raio de giração

$$\boxed{k^2 = k_{CM}^2 + \ell^2}$$

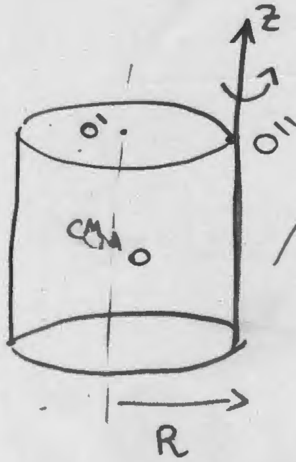
(*) Veja que I é mínimo para CM!

Barra delgada em torno de uma extremidade.



$$I = \underbrace{I_{CM}}_{\frac{ML^2}{12}} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3}$$

Cilindro, em torno de uma geratriz



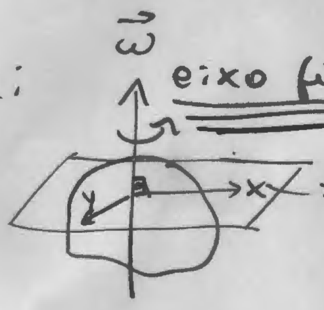
com relação a esse eixo

$$I = \underbrace{I_{CM}}_{\frac{MR^2}{2}} + MR^2 = \frac{3MR^2}{2}$$

Movimento plano de um corpo rígido

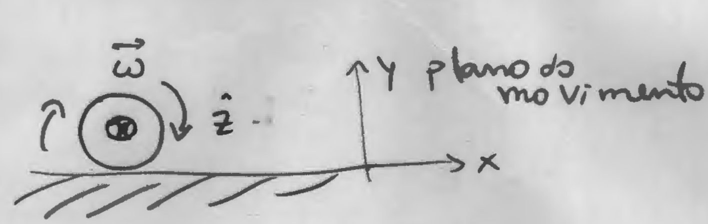
Corpo rígido está em movimento plano quando as trajetórias de todas as partículas são paralelas a um plano fixo => plano do movimento.

Ex: eixo fixo



plano movimento ⊥ eixo

Ex: Rolamento



Equações de Movimento (corpo rígido)

translação do CM + rotação em torno do CM.

translação do CM : $\dfrac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = \vec{F}_R^{(ext)} = M\vec{A}$ → onde $\vec{A} = \dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2}$

M ↓ massa total

$\vec{P}_{CM} = \vec{P}_{tot}$

Rotação em torno do CM : $\dfrac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{\tau}_R^{\,\prime(ext)}$ → em relação ao CM.

(eixo de rotação ⊥ plano do movimento)

Suponha plano do movimento → Plano xy. ⊥ $\hat{i}$ $\hat{j}$

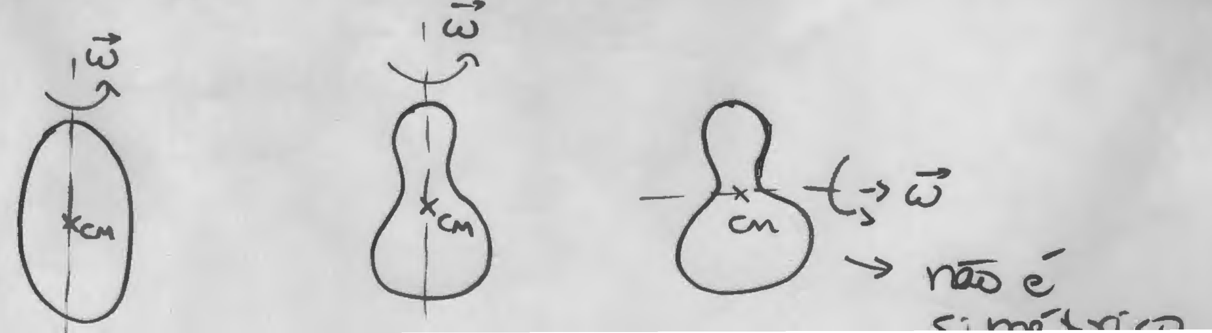
Como translação se dá nesse plano

$$\vec{P}_{CM} = P_{CM}^x\,\hat{i} + P_{CM}^y\,\hat{j} \quad , \quad \vec{F}_R^{(ext)} = F_R^{(ext)x}\,\hat{i} + F_R^{(ext)y}\,\hat{j}$$

Eixo de rotação (por hipótese) é fixo e ⊥ ao plano do movimento ⇒ $\boxed{\vec{\omega} = \omega\,\hat{k}}$

Agora, assumimos (hipótese) que esse eixo corta o CM e que o corpo é simétrico com relação a esse eixo.

Ex:



$$\vec{L}' = I_{CM}\,\vec{\omega}$$ → isso vale mesmo que $\vec{\omega}$ varie!

❄❄❄

$\vec{L}'$ total com relação ao eixo de rotação/simetria que corta CM

Ex: pião.

Assim, no nosso caso de movimento plano do corpo simétrico (eixo de rotação corta CM e é eixo de simetria) vemos que

$$\vec{L}' = L'_z\,\hat{k} \Rightarrow \vec{\tau}'^{(ext)} = \frac{d\vec{L}'}{dt} = \tau'^{(ext)}_z\,\hat{k}$$

↳ torque fica na direção de simetria

Assim, como $\vec{L}' = I_{CM}\vec{\omega}$

$$\vec{\tau}'^{(ext)} = \frac{d\vec{L}'}{dt} = I_{CM}\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_{CM}\,\vec{\alpha}$$

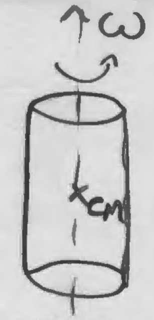
↳ $\vec{\alpha} = \frac{d\omega}{dt}\,\hat{k}$

Assim, para o <u>movimento plano</u> de <u>corpo rígido simétrico</u> em relação <u>ao eixo de rotação</u>, temos as eqs.

→ em relação ao CM

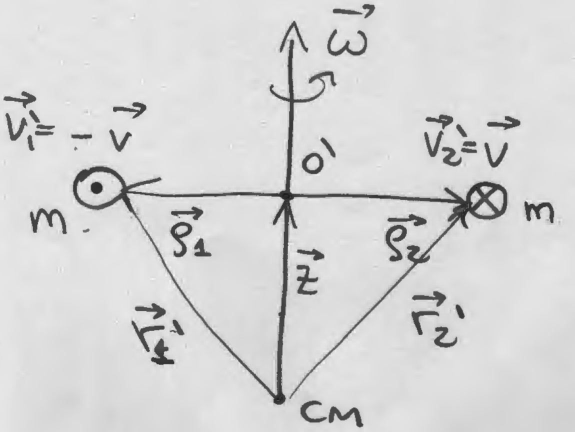
$$\boxed{\vec{F}^{(ext)}_R = M\vec{A}} \qquad \boxed{\vec{\tau}'^{(ext)}_R = I_{CM}\,\vec{\alpha}}$$

Imagine então algo como



simétrico

eixo de simetria



$$\boxed{\vec{\rho}_1 = -\vec{\rho}_2 = -\vec{\rho}}$$

Para toda massa m distante de O' de $|\vec{\rho}_1|$ existe uma massa m do lado oposto com $|\vec{\rho}_2| = |\vec{\rho}_1|$

$$\vec{r}_1' = \vec{\rho}_1 + \vec{z}$$
$$\vec{r}_2' = \vec{\rho}_2 + \vec{z}$$

Momento angular de 1.

$$\vec{l}_1 = m\, \vec{r}_1' \times \vec{v}_1' = -m\, \vec{\rho}_1 \times \vec{v} - m\, \vec{z} \times \vec{v}$$

Para $\underline{2}$

$$\vec{l}_2 = m\, \vec{r}_2' \times \vec{v}_2' = m\, \vec{\rho}_2 \times \vec{v} + m\, \vec{z} \times \vec{v}$$

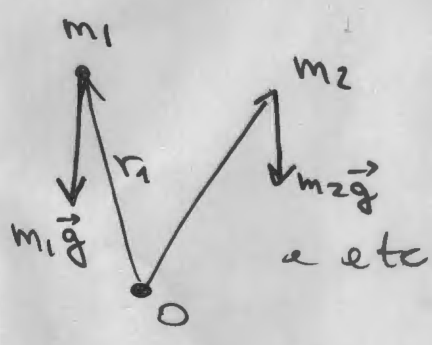
Note que
$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = -m\, \vec{\rho}_1 \times \vec{v} + m\, \vec{\rho}_2 \times \vec{v}$$
$$= m(-\vec{\rho}_1 + \vec{\rho}_2) \times \vec{v}$$
$$= 2m\, \vec{\rho} \times \vec{v} \; // \; \vec{\omega}$$

Assim, somente a componente no eixo de rotação (e simetria) contribui. Assim, fazendo isso para todos os pontos do corpo, vemos

Ex: <u>Força peso</u>: Lista 3 → Ex: 6

Sabemos que $\vec{P}_{eso} = M\vec{g}$ e assim, para translação do CM temos $M\vec{A} = \vec{P}_{eso} \Rightarrow \vec{A} = \vec{g}$ (por isso fazíamos que mov. de corpo extenso na presença de $\vec{g}$ era como se fosse translação de um ponto, i.e., o CM).

Agora, como $\vec{g} = \vec{cte}$ (próximo à superfície da Terra), considere o torque que a força peso faz sobre cada partículazinha no corpo rígido



$$\vec{\tau}^{(ext)} = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\right)}_{M\vec{R}\ (\text{def.})} \times \vec{g}$$ → mesmo para todas as partículas

$$\Rightarrow \vec{\tau}^{(ext)} = \vec{R} \times M\vec{g}$$

↙ com relação à "O".

Agora, se O = CM, $\vec{\tau}'^{(ext)}$ distância do CM

Ou seja, se você larga uma bola (esqueça resistência do ar) do repouso, ela não pode começar a girar em relação ao CM devido ao $\vec{P}$eso.

(óbvio por conservação de energia).

Energia cinética do corpo rígido no movimento plano

Para um sistema arbitrário de partículas

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i^{\,2} \qquad \text{mas} \qquad \vec{v}_i = \underbrace{\vec{v}_i{}'}_{\text{com relação ao CM}} + \vec{V}_{CM}$$

Assim, $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v}_i{}' + \vec{V})^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i{}'^{\,2}$

$$+ \overset{\text{zero}}{\cancel{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i{}'\right)}} \times \vec{V}_{CM} + \vec{V}_{CM}^{\,2}\,\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i}_{= M}$$

$$T = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i{}'^{\,2}}_{\text{energia cinética do mov. interno}} + \underbrace{\frac{M\vec{V}_{CM}^{\,2}}{2}}_{\text{translação do CM}}$$

Para movimento plano do corpo rígido

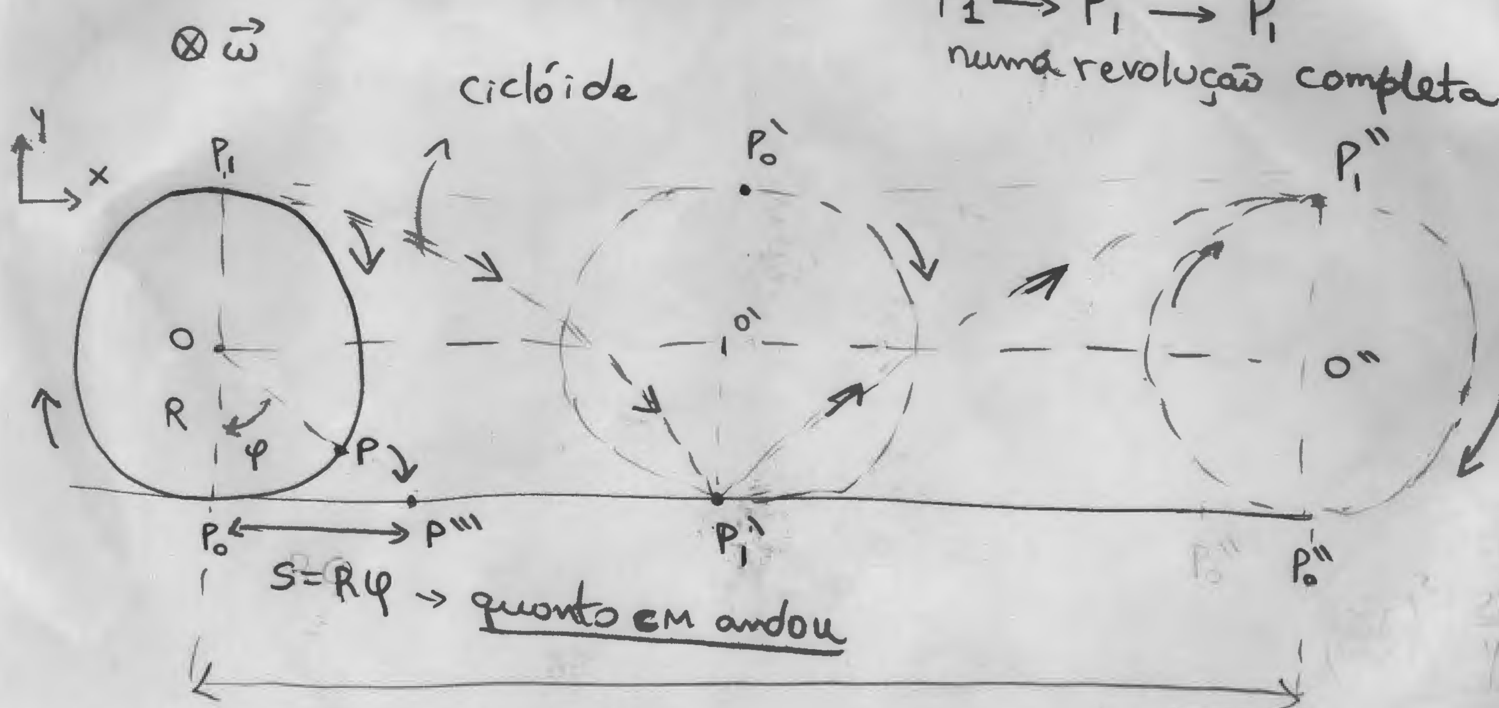
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i'^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\rho}_i^{\,2}\right)\omega^2 = \frac{I_{CM}\,\omega^2}{2}$$

Assim, nesse caso $\boxed{T = \dfrac{I_{CM}\,\omega^2}{2} + \dfrac{M\vec{V}_{CM}^{\,2}}{2}}$

Rolamento → Rolamento puro (rolamento sem deslizamento)

Cada ponto da periferia da roda, quando entra em contato com a superfície, não desliza sobre ele.

$P_1 \to P_1' \to P_1''$ numa revolução completa



No rolamento puro (sem deslizamento) ou seja

Cada ponto da periferia da roda terá entrado em contato com <u>um e somente um</u> pto da superfície de modo que a roda como um todo terá avançado (numa revolução completa) de uma distância igual a sua <u>circunferência</u> $= 2\pi R$.

Já que dado um φ o CM anda de $s = R\varphi$

e $\dfrac{ds}{dt} = V_{CM} = R\dfrac{d\varphi}{dt} = R\omega \Rightarrow \boxed{V_{CM} = R\omega}$

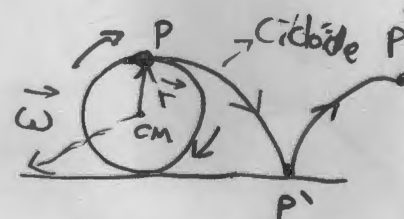
condição de rolamento sem deslizamento.

Cada ponto na periferia da roda executa uma <u>ciclóide</u> $\qquad \vec{v} = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{\omega} \parallel \vec{z}$

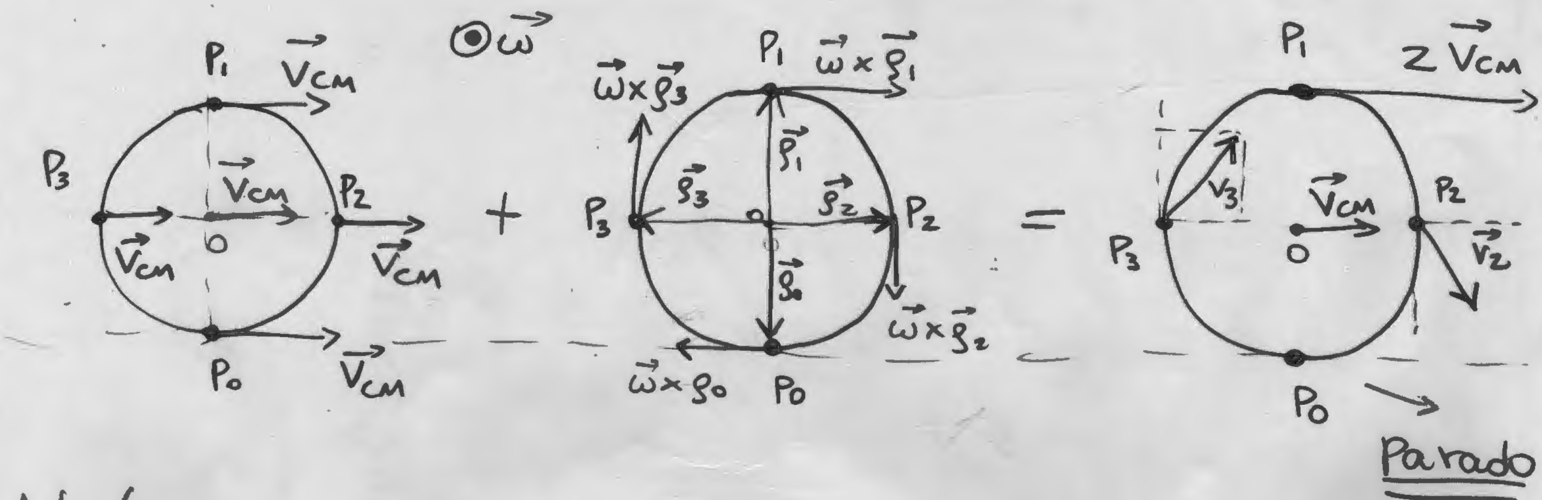
fazendo $\vec{r} = \vec{z} + \vec{\rho}$ $\Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$

(como sempre)



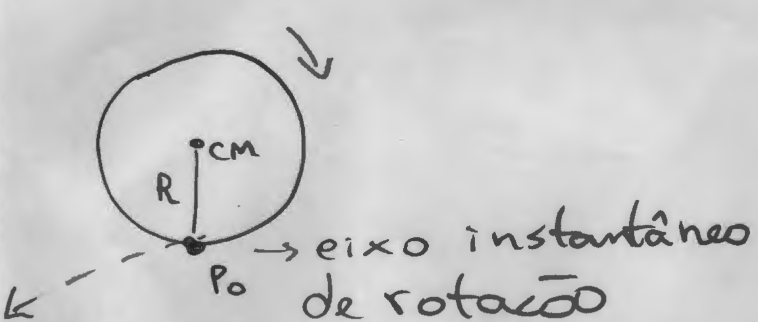
Mas na periferia $|\vec{\omega} \times \vec{\rho}| = \omega R$.

Para entender a velocidade de um pto na periferia note que temos $\vec{V} = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$



Note que o ponto P_0 (ponto de contato instantâneo com a superfície) não se move (se não houver deslizamento)

$$\vec{V}_{em\,P_0} = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_0 = 0$$ (não há deslizament



Movimento da roda em cada instante é como se fosse uma uma rotação pura com $\vec{\omega}$ em torno do eixo instantâneo de rotação.

De fato, em cada instante, sabemos que

$$T(t) = I_{CM}\,\omega^2 + M\vec{V}^2$$

Mas note que para rolamento sem desliza-
mento $V_{cm}^2 = \omega^2 R^2$ e assim

$$T(t) = \left(I_{cm} + MR^2\right)\frac{\omega^2}{2} \longrightarrow$$

$\underline{I_{cm} + MR}$
pelo teorema dos
eixos paralelos
é o momento d
inércia com
relação ao e
instantâneo
rotação (pto c
contato com o
chão).

$$T(t) = I_{\text{eixo instantâneo}} \frac{\omega^2}{2}$$

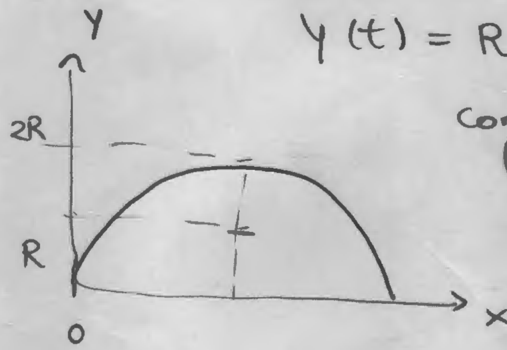
<u>Mais sobre ciclóide</u>

$t \in [0, 2\pi]$ (só um arco)

$$(x - Rt)^2 + (y - R)^2 = R^2$$

ou $x(t) = R(t - \text{sen}(t))$
$y(t) = R(1 - \cos(t))$

Eq. dif. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2R}{y(x)} - 1$



como se
fosse círcul
de raio
R centrad
em (Rt, R