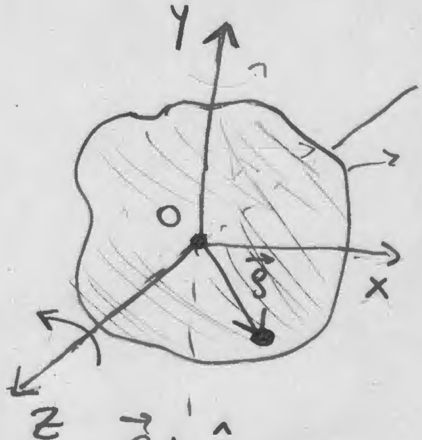
Ex. 7 Lista 3 $\Rightarrow$ Teorema dos eixos perpendiculares



formato arbitrário

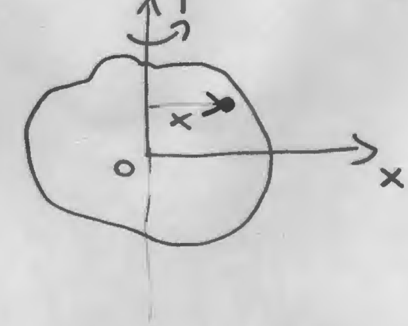
Placa paralela no plano xy ($z=0$)

$\vec{\rho} \perp \hat{z}$

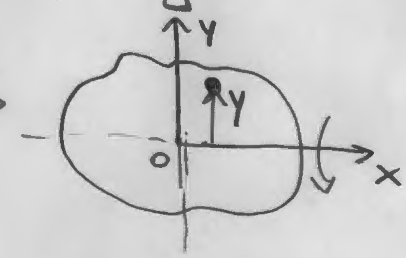
Como calculamos I_z?

$$I_z = \int dm\, \vec{\rho}^{\,2} = \int dm (x^2 + y^2) = \int dm\, x^2 + \int dm$$

Mas veja que $I_y = \int dm\, x^2 \Rightarrow$



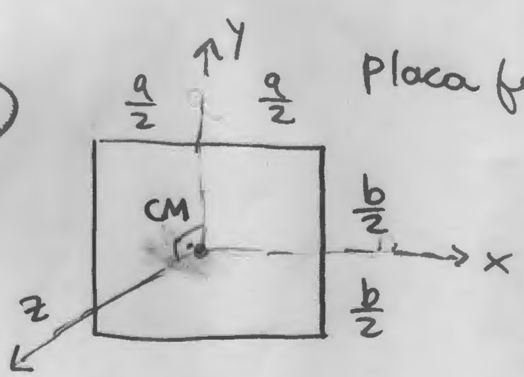
e $I_x = \int dm\, y^2 \Rightarrow$



Então, vemos que $\boxed{I_z = I_x + I_y}$

Ex. 8

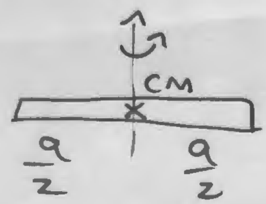
a



Placa fina, massa M

I_z?

Lembrem que momento de inércia de uma bar

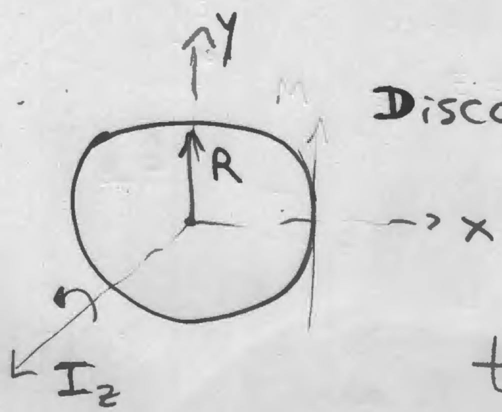


$I = \frac{Ma^2}{12}$ e que isso vale também

para a placa delgada

Então $I_y = \frac{Ma^2}{12}$, Analogamente

$I_x = \frac{Mb^2}{12} \Rightarrow$ Então $I_z = \frac{M(a^2+b^2)}{12}$.

b) 

Disco $\rightarrow I_z = \frac{MR^2}{2}$

simetria $\Rightarrow I_x = I_y$

teorema dos eixos perpendiculares

$\Rightarrow I_z = I_x + I_y = 2I_x$

$\Rightarrow I_x = I_y = \frac{MR^2}{4}$ //

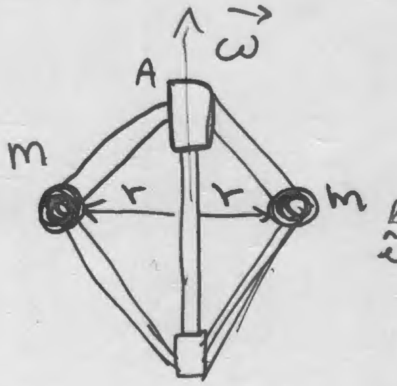
Note que o exercício a) poderia ser feito assim:

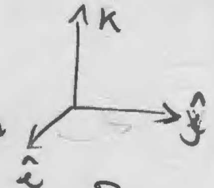
$\Rightarrow$ densidade uniforme $\Rightarrow \frac{M}{ab} = \frac{dm}{dx\,dy} \Rightarrow M = ab \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \frac{dm}{dx\,dy}$ //

Então, $I_z = \int dm(x^2+y^2) = 4\int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_0^{\frac{b}{2}} dy \frac{dm}{dx\,dy}(x^2+y^2)$

$= \frac{4M}{ab}\int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_0^{\frac{b}{2}} dy\,(x^2+y^2) = \frac{M(a^2+b^2)}{12}$ //

<u>Ex: 2</u> Lista 3 $m = 0.2\ kg$





Inicial: $r_0 = 0,15\ m$

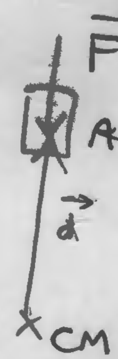
$\omega_0 = 6\ \frac{rad}{s}$, $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \hat{k}$

Pressiona-se A até que

$r_0 \to r_1 = 0.25\ m$.

(a) Novo ω_1? Note que $\vec{\omega}_1 \parallel \vec{\omega}_0 \parallel \hat{k} \to$ eixo de simetria. De fato, inicialmente

$\vec{L}' = I_0 \vec{\omega}_0$, $I_0 = 2 m r_0^2$. Porém, ao fazermos força em A



Note $\vec{d} \parallel \vec{F}$

$\Rightarrow \tau'_{CM} = 0$

(força não produz torque).

Assim, $\frac{d\vec{L}'}{dt} = 0 \Rightarrow$ Depois de chegar em r_1

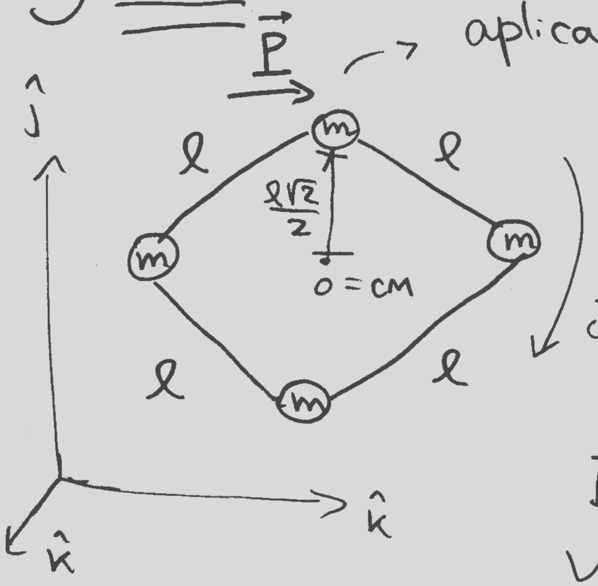
$\vec{L} = I_0 \vec{\omega}_0 = I_1 \vec{\omega}_1 \Rightarrow \cancel{2m} r_0^2 \omega_0 = \cancel{2m} r_1^2 \omega_1$

$\Rightarrow \omega_1 = \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 \omega_0 = 2,16\ \frac{rad}{s}$ //

(b) Trabalho realizado $\Rightarrow W = \frac{I_1 \omega_1^2}{2} - \frac{I_0 \omega_0^2}{2}$

$= m r_1^2 \omega_1^2 - m r_0^2 \omega_0^2 = 0.2\,((0.25)^2 \ldots$

4) Lista 3



$\rightarrow$ aplica momento linear $\vec{P}$.

(conservação de momento

Momento imediatamente depois

$$\vec{P} = \vec{P}_{CM} = \vec{Cte} \Rightarrow \vec{V}_{CM} = \frac{\vec{P}}{4m}$$

$\vec{\omega} \otimes$ (não existem forças externas)

Então, CM se move depois velocidade $\vec{V}_{cm} = \frac{\vec{P}}{4m}$.

Agora, claramente, esse quadrado vai gira

com $\vec{\omega} = \omega(-\hat{k})$ com relação ao CM. O mo

de inércia é $I_{CM} = 4m\left(\frac{\sqrt{2}}{2}l\right)^2 = 2ml^2$.

Depois da aplicação de $\vec{P}$, momento angular

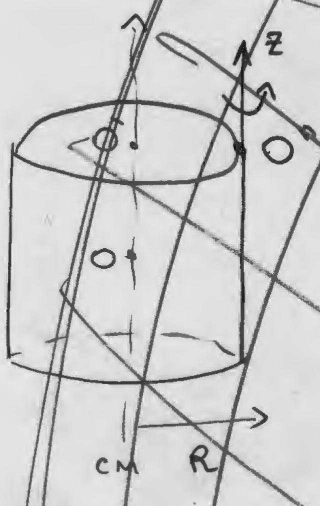
da massa m (onde aplicou $\vec{P}$) com relação ao CM é $\vec{L}' = |\vec{P}|\frac{l\sqrt{2}}{2}(-\hat{k}$

Mas não há torque depois e assim, $\vec{L}' =$

$$\Rightarrow \vec{L}' = I_{CM}\vec{\omega} = |\vec{P}|\frac{l\sqrt{2}}{2}(-\hat{k})$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{|\vec{P}|\frac{l\sqrt{2}}{2}}{2ml^2} = \frac{|\vec{P}|\sqrt{2}}{4ml} \quad //$$

Cilindro, em torno de uma geratriz



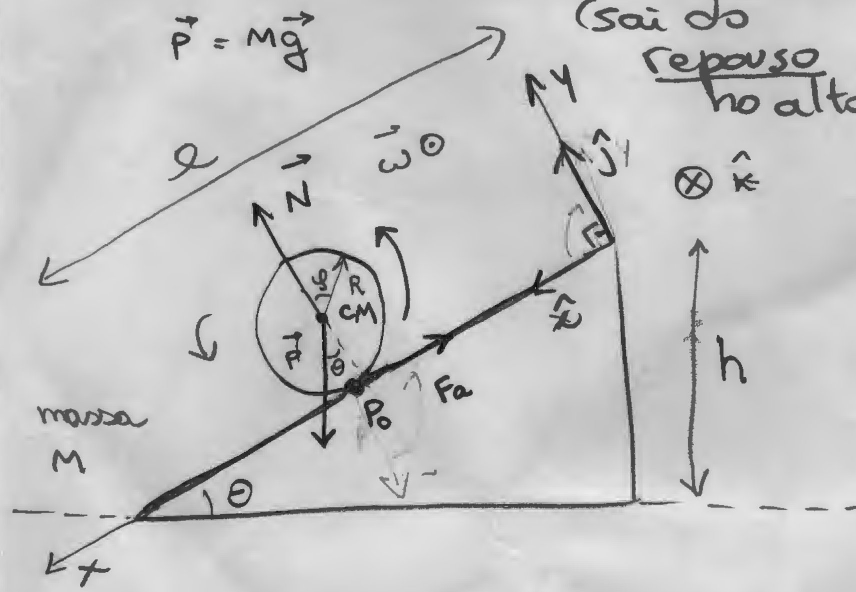
$$I = \underbrace{I_{CM}}_{\frac{MR^2}{2}} + MR^2 = \frac{3MR^2}{2}$$

Energia cinética: $T = \dfrac{I_{CM}\,\omega^2}{2} + \dfrac{M\,\vec{V}_{CM}^{\,2}}{2}$

(inclui rotação ao redor de um eixo que cruza CM e a translação do CM)

Ex: Rolamento sobre um plano inclinado

(sai do repouso no alto)



Seção circular (anel, disco, esfera)

rola sem deslizar

IPC!!

$\vec{N}$ e $\vec{P}$ não exercem torque em relação ao CM (distância até ele = 0)

Força de atrito ⇒ Exerce torque em relação ao centro CM → Torque F R (...) → esse é a soma de torques ex... terno...

No caso de rolamento puro, P_0 pertence ao eixo instantâneo de rotação, de modo que está em repouso em cada instante. Logo, F_a é força de atrito estático!.

Eq. mov. associada à translação do CM.

2ª lei

Em y: $N - Mg\cos\theta = 0$

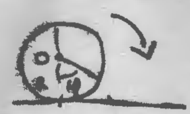
Em x: $Mg\,\mathrm{sen}\,\theta - F_a = M\ddot{x}$

$\vec{\alpha} = -\ddot{\varphi}\,\hat{k}$

$\vec{\omega} = -\omega\,\hat{k}$

(Muito importante)

Eq. Mov. para rotação ao redor do CM: $\boxed{F_a R = I_{CM}\,\ddot{\varphi}}$



$s = R\varphi$

$V_{CM} = \omega R$

Rolamento sem deslizamento (cada ponto toca o chão em intervalos de $2\pi R$)

Rolamento sem deslizamento (para CM)

$$\boxed{\dot{x} = R\dot{\varphi} \rightarrow \ddot{x} = R\ddot{\varphi}}$$

Conveniente,

$I_{cm} = MK^2$ (raio de giração)

Então,

$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{R} \rightarrow F_a = \frac{I_{cm}\,\ddot{x}}{R^2} \text{ assim.}$$

$$M\ddot{x} = Mg\,\text{sen}\,\theta - \frac{\overset{\to MK^2}{I_{CM}}}{R^2}\ddot{x}$$

$$\ddot{x}\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right) = Mg\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = \frac{g\,\text{sen}\,\theta}{\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right)}}$$

(embora tenha atrito!)

(*) Mov. ainda é unif. acelerado, não depende da massa, mas a aceleração diminui pelo fator $1/\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right) < 1$ → devido a energia cinética de rotação que tem que ser gerada.

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right)} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{para anel} \\ \frac{2}{3} & \text{para cilindro} \\ \frac{5}{7} & \text{para esfera} \end{cases}$$

Na "corrida", sem deslizamento $a_{esfera} > a_{cil} > a_{an}$

(*) Qual velocidade ao atingir a base do plano

Começo do repouso no alto.
(aceleração cte)

$$V_{CM}^2 = 2a\ell = 2\ddot{x}\ell = \frac{2g\ell\,\text{sen}\,\theta\, R^2}{K^2 + R^2} = 2gh\frac{R^2}{K^2+R^2}$$

já que $h = \ell\,\text{sen}\,\theta$.

(Se k→ volta caso o part.

Energia cinética: $T = \underbrace{\frac{MV_{CM}^2}{2}}_{\text{translação do CM}} + \underbrace{I_{CM}\dot{\theta}^2}_{\text{rotação ao redor do CM}}$

$$T = \frac{M V_{cm}^2}{2} + \frac{M k^2}{2} \frac{V_{cm}^2}{R^2} = \frac{M V_{cm}^2}{2} \left(1 + \frac{k^2}{R^2} \right)$$

eixo instantâneo de rotação

$\left(T = \frac{\tilde{I} \omega^2}{2} \right.$ onde $I = I_{cm} + MR^2$ steiner

Agora, como $V_{cm}^2 = 2gh \frac{R^2}{k^2 + R^2}$ (na base) Vemos que ao chegar na base

$T = Mgh$! $\rightarrow$ energia potencial inicial!

Conservação de energia ! E a força de atrito?

Ela não realiza trabalho pois o ponto de aplicação da força de atrito (P_0) está sobre o eixo instântaneo de rotação, ou seja, está em repouso a cada instante. Logo, $\vec{F}_a$ não realiza trabalho!

(velocidade relativa com relação ao chão é zero)

(é como se P_0 "não se deslocasse")

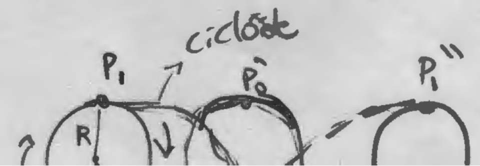
Ou seja, $\vec{F}_a$ apenas converte energia cinética de translação em rotação, o que freia o corpo (por conservação de energia). Nota que $\frac{1}{\left(1 + \frac{k^2}{R^2}\right)} < 1$.

Lindo, não é mesmo? ☺

CM anda de

$s = R\varphi$

$\boxed{V = R\dot{\varphi}}$ característico desse movimento!



rolamento

Rolamento sem deslizamento nesse problema

$$F_a = Mg \,\text{sen}\,\theta \; \frac{K^2}{K^2+R^2}$$

(usando $F_a = \frac{I_{CM}\ddot{x}}{R^2}$)

Se $\mu_e \rightarrow$ coef. atrito estático

$$F_a \leq F_e = \mu_e |\vec{N}| = \mu_e Mg\cos\theta$$

Senão deslizaria (P. começaria a "andar")

$$Mg\,\text{sen}\,\theta \frac{K^2}{K^2+R^2} = \mu_e Mg\cos\theta \Rightarrow \tan\theta \leq \underbrace{\mu_e . \frac{K^2+R^2}{K^2}}_{\tan\theta_r}$$

$\theta_r \rightarrow$ ângulo máximo para o qual é possível o rolamento sem deslizamento.

$$\tan\theta_r = \begin{cases} 2\mu_e \rightarrow \text{anel} \\ 3\mu_e \rightarrow \text{cilindro} \\ \frac{7}{2}\mu_e \rightarrow \text{esfera} \end{cases}$$

esfera vai deslizar a partir de um âng. maior que o anel.

~~Um ponto P nesse rolamento sem deslizamento descreve uma ciclóide (Trajetória)~~

$$\cancel{\vec{V} = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

~~posição com relação~~