Física I - Bloco 3

Prof. Jorge Noronha

Vimos no último bloco a idéia de momento angular e torque

$\vec{p} = m\vec{v}$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad e \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}}$$

Vamos ver agora como fica isso para um sistema de partículas.

Sistema: $\vec{P}_{tot} = \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i$, $\vec{P}_i = m_i \vec{v}_i$ para cada uma das N partículas

Vimos antes que $\frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(ext)}$
(e $\vec{P}_{tot} = \vec{P}_{CM}$)

(resultante de forças internas se anula)

O momento angular total é

$$\boxed{\vec{L}_{tot} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i}$$

Como fica

$d\vec{L}_{tot}$?

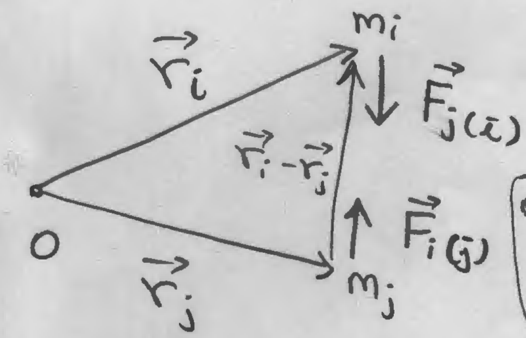
$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left(\cancel{m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{v}_i}^{\,0} + m_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right)$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \underbrace{\frac{d\vec{v}_i}{dt}}_{\vec{a}_i}}$$

Agora, vamos assumir que estamos descrevendo isso de um ref. inercial "O"

$\boxed{2^{\underline{a}} \text{ Lei}}$

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{(ext)} + \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^{N} \vec{F}_{j(i)}}_{\text{forças internas}} \qquad (\text{para } i = 1, \ldots, N)$$



onde $\vec{F}_{i(j)} = -\vec{F}_{j(i)}$

Vamos usar isso na eq. do $\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt}$

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \left[\vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^{N} \vec{F}_{j(i)} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{j(i)}$$

Agora, veja que

$$\sum_{\substack{i=1}}^{N}\sum_{\substack{j=1\\(i\neq j)}}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{j(i)} = \sum_{\substack{i=1}}^{N}\sum_{\substack{j=1\\(i\neq j)}}^{N} \frac{\vec{r}_i \times \vec{F}_{j(i)}}{2} + \underbrace{\sum_{\substack{i=1}}^{N}\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{N} \frac{\vec{r}_i \times \vec{F}_{j(i)}}{2}}_{\text{troca } i \leftrightarrow j}$$

$$= \sum_{\substack{i=1}}^{N}\sum_{\substack{j=1\\(i\neq j)}}^{N} \frac{\vec{r}_i \times \vec{F}_{j(i)}}{2} + \sum_{\substack{j=1}}^{N}\sum_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{N} \frac{\vec{r}_j \times \vec{F}_{i(j)}}{2} \qquad \vec{F}_{i(j)} \longrightarrow = -\vec{F}_{j(i)}$$

par ação/reação

$$= \sum_{\substack{i=1}}^{N}\sum_{\substack{j=1\\(i\neq j)}}^{N} \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\times \vec{F}_{j(i)}}{2} \longrightarrow \text{Zero pois } \vec{F}_{j(i)} \,/\!/\, \vec{r}_i - \vec{r}_j \;!!$$

Assim, obtemos a lei fundamental da dinâmica de rotações para um sistema de partículas

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ext)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i^{(ext)} = \vec{\tau}_R^{(ext)}}$$

relação ao ponto O.

Veja analogia

relação ao ponto O.

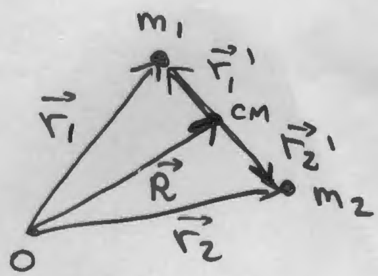
$$\frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} = \sum^{N} \vec{F}^{(ext)}$$

Agora, como $\frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} = \vec{F}_R^{(ext)} = M\vec{A}$

M → total $\qquad \vec{A} = \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt}$

em geral o Centro de massa não será um ref. inercial. Entretanto, veremos que a eq. fundamental da dinâmica para rotações vale mesmo se CM for acelerado.

Lembra disso?



$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$$

$$(m_1\vec{r}_1' + m_2\vec{r}_2' = 0)$$

$\vec{r}_1 = \vec{r}_1' + \vec{R}$

$\vec{r}_2 = \vec{r}_2' + \vec{R} \implies \vec{a}_1 = \vec{a}_1' + \vec{A}$

$\vec{a}_2 = \vec{a}_2' + \vec{A}$

Agora, para sistema de N partículas teríamos

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{R} \implies \vec{a}_i = \vec{a}_i' + \vec{A}$$

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{M}$$

onde $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

Assim, o momento angular total das N partículas com relação ao CM é

$$\frac{d\vec{L}'_{tot}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\,' \times \vec{a}_i\,' = \sum_{i=1}^{N}{}' m_i \vec{r}_i\,' \times (\vec{a}_i - \vec{A})$$

$$= \sum_{i=1}^{N}{}' m_i \vec{r}_i\,' \times \vec{a}_i - \underbrace{\cancel{\left(\sum_{i=1}^{N}{}' m_i \vec{r}_i\,'\right)}}_{\text{zero, lembram?}} \times \vec{A}$$

$$= \sum_{i=1}^{N}{}' \vec{r}_i\,' \times m\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N}{}' \vec{r}_i\,' \times \vec{F}_i^{(ext)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N}{}' \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^{N}{}' \vec{r}_i\,' \times \vec{F}_{j(i)}}_{\text{zero!}}$$

Como antes já que $\vec{r}_i\,' - \vec{r}_j\,' = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ e assim $\vec{F}_{j(i)} \,/\!/\, \vec{r}_i\,' - \vec{r}_j\,'$. Assim, encontramos que

$$\boxed{\frac{d\vec{L}'_{tot}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i\,' \times \vec{F}_i^{(ext)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i\,'^{(ext)}}$$

em relação ao CM (mesmo se ele estiver acelerado).

Isso vai ser muit…

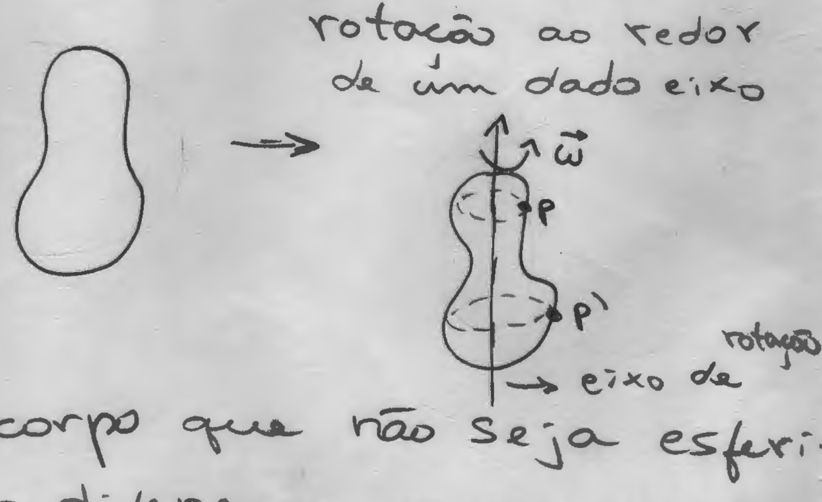
Corpo rígido

Def: Um corpo é rígido quando a distância entre duas partículas quaisquer do corpo é invariável (nenhum corpo é <u>realmente</u> rígido, isso é uma <u>aproximação</u>).

<u>Chasles (1830)</u>: O movimento mais geral de um corpo rígido se compõe de uma translação e uma rotação (6 graus de liberdade).
(3 translações + 3 rotações)

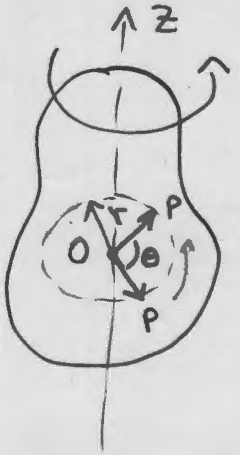
<u>Veja que</u>

Corpo qualquer ;



⊛ Veja que, para um corpo que não seja esfericamente simétrico, faz diferença num corpo qualquer em que direção

Imagine o corpo rígido e o eixo de rotação fixo. Se o corpo é rígido, a distância entre pontos no corpo não pode mudar com uma rotação (ou translação)

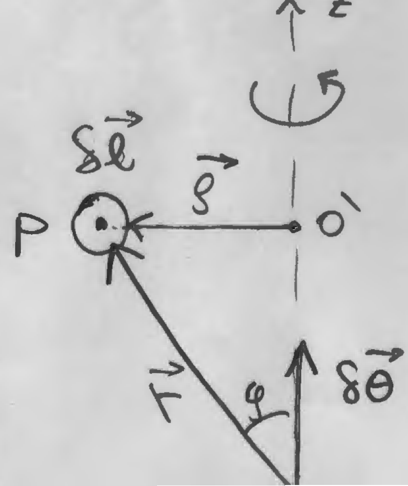


Assim, ao rodarmos de θ com relação ao eixo de rotação (eixo $\hat{z}$ aqui), é como se o ponto P estivesse fazendo um movimento circular na seção transversa. Para descrever esse movimento, efetivamente só precisamos saber $\theta(t)$.
(uma variável dinâmica apenas)

Imagine que façamos uma rotação infinitesimal $\delta\vec{\theta}$

Deslocamento infinitesimal vai ser

$$\boxed{\delta\vec{\ell} = \delta\vec{\theta} \times \vec{r}}$$



$\delta\vec{\theta} = \delta\theta\,\hat{k}$

$\hat{k}$

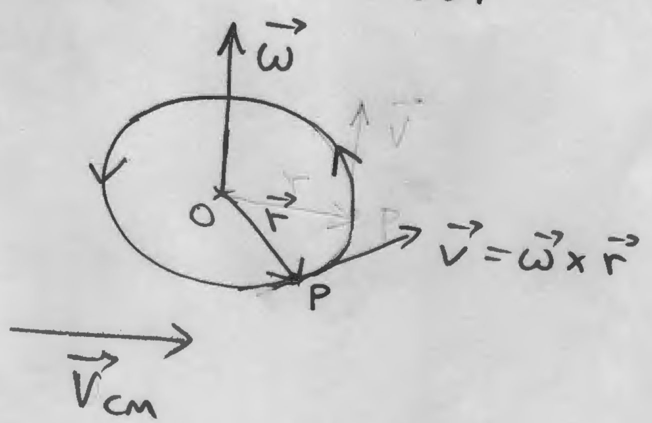
Agora, imagine que o corpo só está girando ao redor do eixo (não há translação rígida do corpo).

A velocidade do ponto P será

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \times \vec{r} = \underline{\underline{\vec{\omega} \times \vec{r}}} \quad \text{onde}$$

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}}$$ $\vec{\text{V}}$elocidade angular (veja que é vetor).

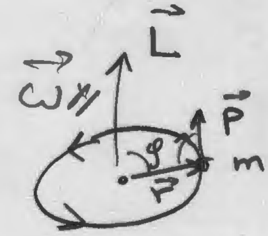
↳ direção do eixo de rotação e magnitude $|\vec{\omega}| = \left|\frac{d\vec{\theta}}{dt}\right|$ (nesse caso $\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\hat{k}$)



Agora, imagine que o corpo como um todo tem velocidade de translação (rígida) $\vec{V}_{cm}$. A velocidade total do ponto P seria

(*) Note que tanto $\vec{V}_{cm}$ quanto $\vec{\omega}$ podem variar no tempo. Por exemplo, em um pião  eventualmente o eixo de rotação varia no tempo.

Momento de inércia



Vimos no caso de uma partícula que

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m r v \hat{z}$$, mas $v = \omega r$

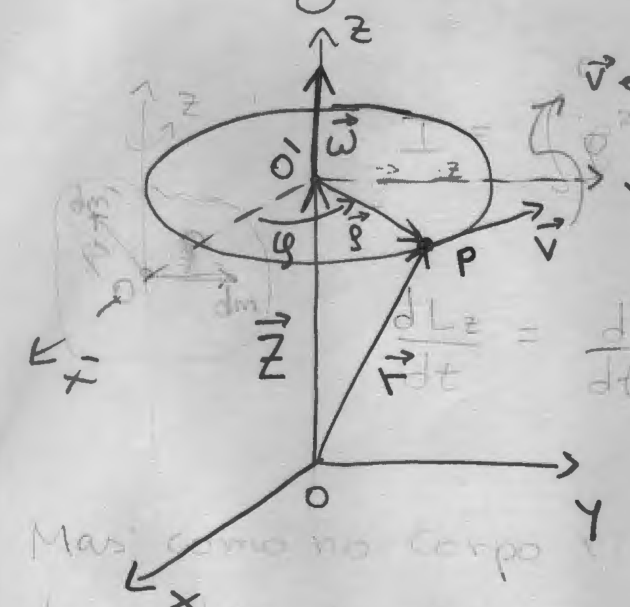
$$L_x = L_y = 0$$

$$L_z = m r^2 \omega = I \omega \qquad \omega = \dot{\varphi}$$

$I = mr^2 \Rightarrow$ <u>momento de inércia</u> em relação ao eixo de rotação.

(esquece translação rígida)

Imagine agora o corpo rígido (uma secção transversal dele)



Note que

$$\boxed{\vec{r} = \vec{Z} + \vec{\rho}} \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

rotação $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times (\vec{\rho} + \vec{Z})$$
$$= \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

já que $\vec{\omega} \parallel \vec{Z}$

Momento angular de uma partícula de massa m em P é: $\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v}$

Como $\vec{r} = \vec{z} + \vec{\rho}$ então

$$\vec{L} = m(\vec{z}+\vec{\rho}) \times \vec{v} = \underbrace{m\vec{z}\times\vec{v}}_{\substack{\text{perpendicular} \\ \text{a } \hat{z}}} + \underbrace{m\vec{\rho}\times\vec{v}}_{\substack{\text{paralelo a} \\ \hat{z}}}$$

contribui   contribui

$$\vec{L} = (L_x \hat{i} + L_y \hat{j}) + L_z \hat{k}$$

Vamos nos focar em L_z!

$$L_z = m\rho v = m\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = \boxed{m\rho^2}\,\omega$$

⊛ (para esse L_z o vetor $\vec{z}$ não importa)

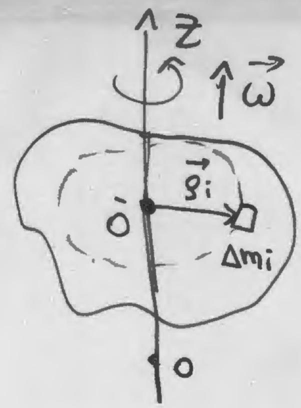
⊛ (somente distância com respeito a O' entrou para L_z)

→ momento de inércia da partícula em P com relação à O.

⇒ Esse é o seu momento de inércia com relação ao eixo de rotação!

Imagine agora o corpo rígido.

Essa distribuição contínua de matéria pode ser decomposta por um número enorme de partículas de massa $\underbrace{\Delta m_i}_{\text{muito pequeno}}$ distantes $\vec{\rho}_i$ do eixo de rotação (na seção transversa).



A componente L_z do momento angular total com relação ao pto O será

$$L_z = \sum_i L_z^{(i)} = \left(\sum_{i=1}^{N} \rho_i^2 \, \Delta m_i \right) \omega$$

já está na direção $\hat{z}$.

<u>Limite do contínuo</u> $\Delta m_i \to 0$, $N \to \infty$
(integral ☺)

$$L_z = \left(\int \rho^2 \, dm \right) \omega$$ onde $$\boxed{I_z = \int \rho^2(m) \, dm}$$

momento de inércia do corpo rígido em relação ao eixo z.

E assim obtemos

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \omega) = \tau_z^{(ext)}$$

componente z da → resultante dos <u>torques externos</u>, em relação ao pto O.

Como o <u>corpo é rígido</u>, $\frac{dI_z}{dt} = 0$ e assim

$$\tau_z^{(ext)} = I_z \alpha \,, \quad \alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$ → aceleração angular

⊛ Momento de inércia desempenha um papel análogo ao da massa ("relutância" em mudar sua velocidade angular).

⊛ Claramente, para um corpo de forma arbitrária, $I_x \neq I_y \neq I_z$.

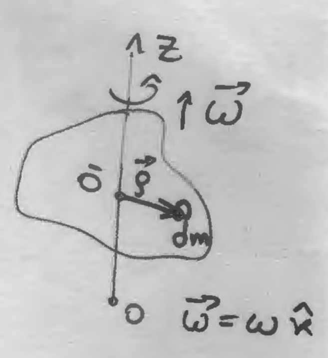
(para esfera $I_x = I_y = I_z$)

<u>Energia cinética de rotação do corpo rígido</u>

Como é corpo rígido, $\underline{V_r}$ (radial) de um certo elemento de <u>massa dm</u> não muda e assim a energia cinética associada à esse dm é (de rotação)

esqueça translação agora $\boxed{V = \rho \dot{\varphi}}$

$$\frac{\vec{V}^2}{2} dm = \frac{dm}{2} \rho^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{\rho^2}{2} dm\, \omega^2.$$



A energia cinética total é (de rotação)

$$T_z = \frac{\omega^2}{2} \int dm\, \rho^2 = \frac{I_z \omega_z^2}{2}$$

<u>Trabalho</u>: $\Delta W = \tau_z^{(ext)} \Delta \varphi$

Mas (limite $\Delta t \to 0$) $\tau_z^{(ext)} d\varphi = \tau_z^{(ext)} \dfrac{d\varphi}{dt} dt = I_z \dot{\varphi} \ddot{\varphi} dt = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{I_z \dot{\varphi}^2}{2}\right) dt$

$$dW = \frac{d}{dt}\left(\frac{I_z \dot{\varphi}^2}{2}\right) dt = dT$$

$$W_{\varphi_0 \to \varphi_1} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} dW = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) dt = \frac{I\omega_1^2}{2} - \frac{I\omega_0^2}{2}$$

$$= \Delta T = T_1 - T_0$$

de rotação (análogo ao anterior no bloco 2).

<u>Analogia</u>

Mov. unid.		rotação em torno de eixo fixo
x	$\longrightarrow$	φ
v	$\longrightarrow$	$\dot{\varphi} = \omega$
a	$\longrightarrow$	$\alpha = \ddot{\varphi} = \dot{\omega}$
m	$\longrightarrow$	I momento de inércia
P	$\longrightarrow$	$L_z = I\omega$
$F = ma$	$\longrightarrow$	$\tau_z = I\alpha$
$T = \dfrac{mv^2}{2}$	$\longrightarrow$	$T = \dfrac{I\omega^2}{2}$
$\int^{x_1}$		$\int^{\varphi_1}$

Cálculo de momentos de inércia

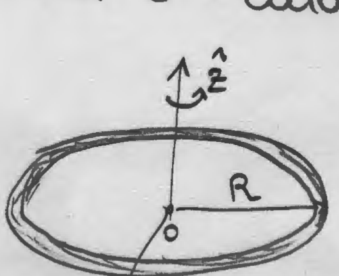
$$I = \int \rho^2(m)\,dm$$

Corpos rígidos homogêneos (e uniformes)

$$dm = \mu \underbrace{dV}_{\text{volume infinitesimal}} \qquad \mu = \underline{\underline{cte}}$$

tipo densidade

1) Anel circular delgado, em torno do centro.

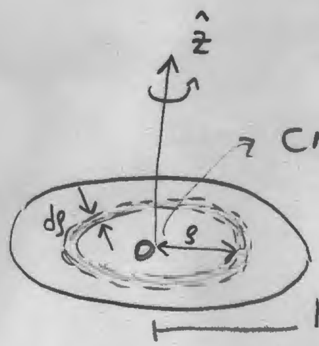


$$\boxed{I = R^2 \int dm = M R^2}$$

massa do anel

CM (não está no corpo)

2) Disco circular, em torno do centro



Disco = superposição de anéis (concêntricos) circulares delgados de raio ρ, largura infinitesimal $d\rho$, onde

$$\rho \in [0, R]$$

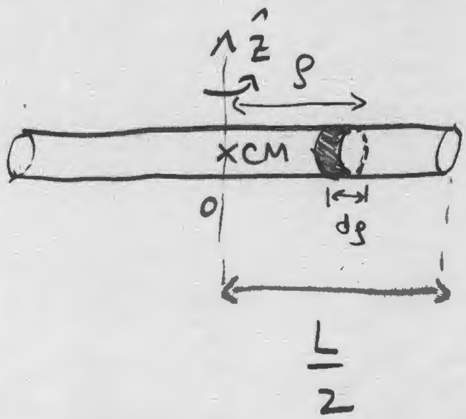
$$\frac{dm}{M} = \frac{2\pi \rho\, d\rho}{\pi R^2} = \frac{2}{R^2}\rho\, d\rho$$

Independente da espessura

$$I = \int \rho^2(m)\,dm = \frac{2M}{R^2}\int_0^R \rho^3\, d\rho = \frac{2M}{R^2}\frac{\rho^4}{4} = \boxed{\frac{MR^2}{2}}$$

(*) Válido também para cilindro

3) Barra delgada, em torno do centro



$$dm = \frac{d\rho}{L} M$$

veja que $\Rightarrow \frac{1}{2}\int dm = \frac{M}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} d\rho$

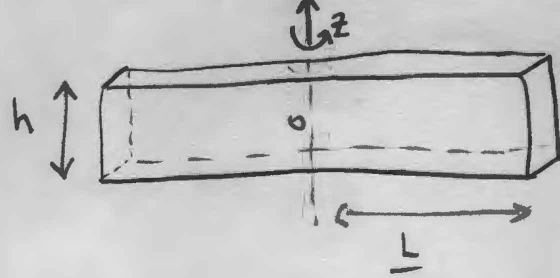
$\rho \in \left[0, \frac{L}{2}\right]$

simetria

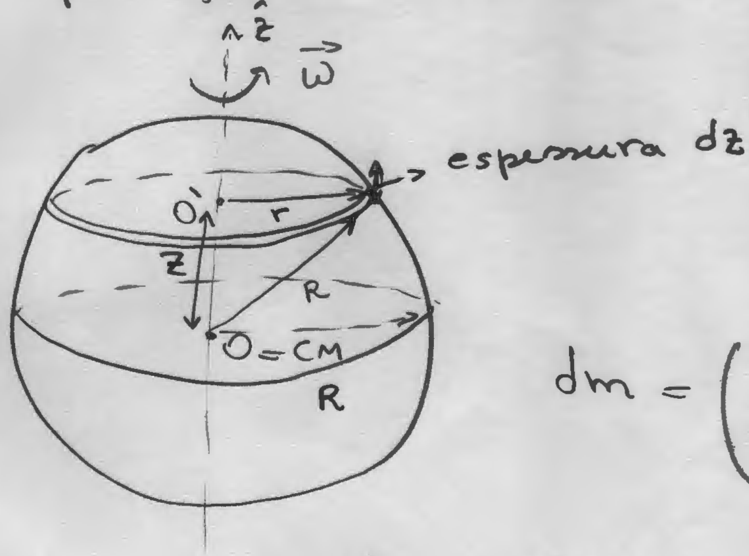
$$I = 2\int_0^{L/2} \rho^2(m)\, dm = \frac{2M}{L}\int_0^{L/2} \rho^2 \, d\rho$$

$$I = \frac{2M}{L}\left(\frac{L}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{ML^2}{12}}$$ → independe da espessura da barra

⇒ Resultado válido para placa delgada também.



4) Esfera, em torno do diâmetro



esfera = pilha de discos concêntricos

$$dm = \left(\frac{\pi r^2 dz}{\frac{4\pi R^3}{3}}\right) M = \frac{3}{4}\frac{r^2}{R^3} dz$$

$dI = r^2 dm$