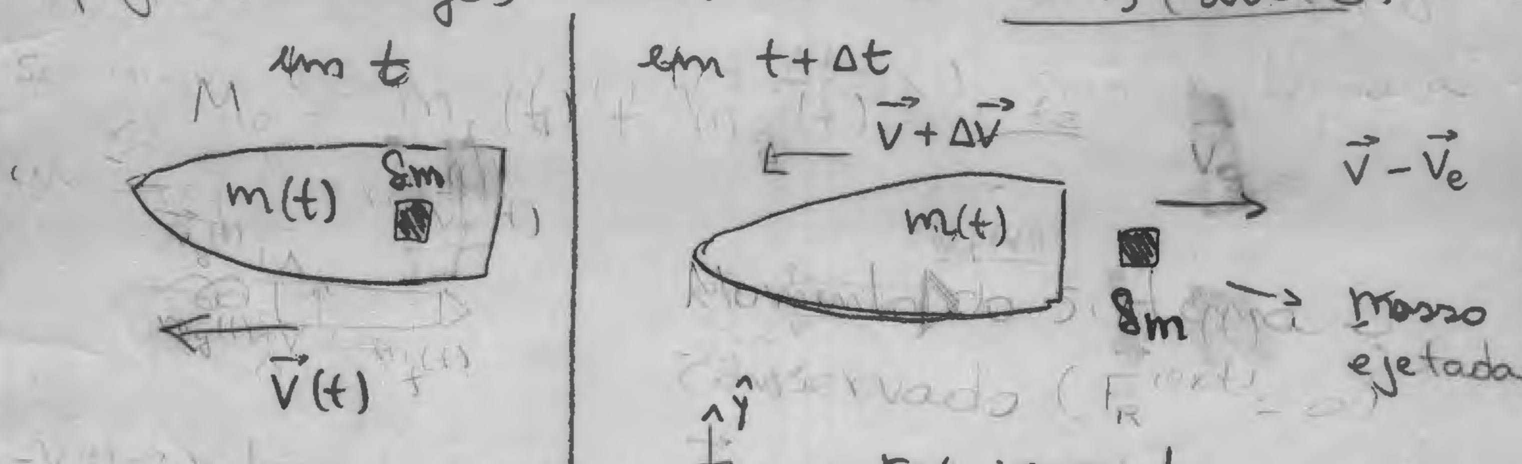
Massa variável

O deslocamento de um corpo em geral ocorre se houverem forças externas.

Assim somos capazes de caminhar porque empurramos o solo para trás e o atrito com o solo nos impele para frente.

Entretanto: (difícil andar sobre gelo).

Imagine que tenhamos um foguete no espaço (longe de qualquer corpo celeste e assim a $\boxed{\vec{F}_R^{(ext)} = 0}$). A massa total do sistema foguete + gás emitido é constante.



Momento total conservado

Variação de momento (total) $= 0$ (já que $\vec{F}_R^{\,ext} = 0$)

$$\cancel{(m+\delta m)\vec{v}} = \cancel{m\vec{v}} + m\Delta\vec{v} + \cancel{\delta m(\vec{v}_g}\,\vec{v}_e)$$

$$\Delta\vec{V} = \frac{\delta m}{m}\vec{V}_e$$

→ isso ocorreu em um Δt

mas $m(t+\Delta t) - m(t) = \Delta m = -\delta m$

$$\Rightarrow \Delta\vec{V} = -\frac{\Delta m}{m}\vec{V}_e$$

toma limite $\Delta t \to 0$

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{dm}{dt}\vec{v}_e}$$

Note que $\frac{dm}{dt} < 0$ nesse problema (massa é ejetada).

$-\vec{V}_e = \vec{V}_{rel}$ → velocidade do gás ejetado com relação ao foguete.

* Em geral, $\vec{V}_e$ é constante (depende das características do sistema ejetor no foguete).

* Veja que a velocidade do foguete variou pois houve mudança em sua massa (embora $\vec{F}_R^{\,ext} = 0$).

Claro, se houverem forças externas, basta acrescentá-las

$$m(t)\,\frac{d\vec{V}}{dt}(t) = -\frac{dm}{dt}\vec{V}_e + \underline{\underline{\vec{F}_{ext}}}$$

para o foguete

ou

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{V}_f + \frac{d\vec{V}}{dt}m_f = \frac{dm}{dt}\left(\vec{V} + \vec{V}_{rel}\right) + \vec{F}_{ext}}$$

Ex: Suponha $\vec{F}_{ext} = 0$. Dado $\vec{V}_0$ e m_0 em $t=0$ o foguete queima combustível até chegar em m_f. Qual a velocidade $\vec{V}_f$ nesse instante?

Lembre que

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \underbrace{-\frac{dm}{dt}\vec{V}_e}_{= -\vec{V}_e \rightarrow \text{supor constante}}$$

. Suponha $\vec{V} \parallel \vec{V}_e$ (digomos $\underline{\underline{\hat{x}}}$).

supor constante para esse problema

$$\Rightarrow dV = -\frac{dm}{m}V_e$$

$$\int_{V_0}^{V_f} dV = -V_e\int_{m_0}^{m_f}\frac{dm}{m} \Rightarrow V_f - V_0 = -V_e(\ln m_f - \ln m_0)$$

Ou seja,

(gastou combustível)

$$V_{fim} - V_0 = \overset{\text{constante.}}{V_e} \ln\left(\frac{m_0}{m_{fim}}\right)$$

$m_0 > m_{fim}$

Então

↓ Varia lentamente (lembre que

$e^x \Rightarrow \ln(e^x) = x$.

$$e^{\frac{V_{fim} - V_0}{V_e}} = \frac{m_0}{m_{fim}} \Rightarrow \boxed{m_{fim} = m_0\, e^{-\frac{(V_{fim} - V_0)}{V_e}}}$$

⊛ Massa decresceu exponencialmente !.

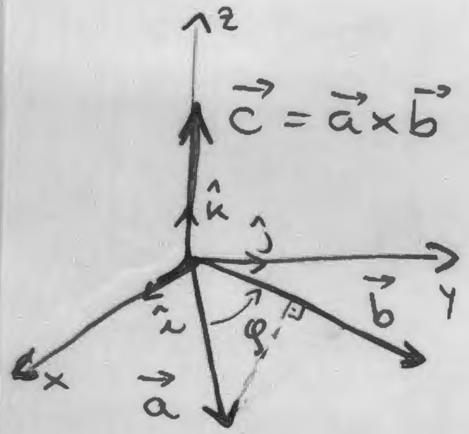
Para levar $V_{fim} \to V_0 + 2V_e$, por exemplo, a massa sai de m_0 e vai para $\left(m_0\, e^{-\frac{(V_{fim} - V_0)}{V_e}}\right) = m_0 e^{-2} \sim \frac{m_0}{7{,}4}$

⊛ Usam-se foguetes de "diferentes estágios" pois em cada estágio, descarta-se a carcaça do estágio anterior que implica em partir de uma uma nova massa inicial bem menor (para esse novo estágio) e de uma velocidade inicial igual à velocidade final do estágio anterior.

Produto Vetorial

Agora, vamos definir a operaçõo que pega 2 vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e leva em um outro vetor $\boxed{\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}}$ tal que

$$\boxed{|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}||\operatorname{sen}\varphi|}$$



Como o sentido de rotacõo de $\vec{a} \to \vec{b}$ é oposto ao $\vec{b} \to \vec{a}$ temos que $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

⊛ Note que $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ é perpendicular ao $\vec{a}$ e ao $\vec{b}$!

⊛ Se $\vec{a} \neq 0$ e $\vec{b} \neq 0$, se $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ (paralelo)

⊛ Ou seja $\vec{a} \times \vec{a} = 0$, $\forall \vec{a}$.

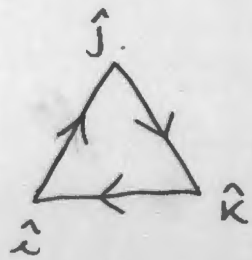
Agora, em termos dos vetores unitários

(truque para lembrar)

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} = -\hat{j} \times \hat{i}$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} = -\hat{k} \times \hat{j}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} = -\hat{i} \times \hat{k}$$



(Claro que $\hat{i} \times \hat{i} = 0$, $\hat{j} \times \hat{j} = 0$, $\hat{k} \times \hat{k} = 0$)

⊛ Propriedade distributiva: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

⊛ Para vetores quaisquer

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

$$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$

Então, $\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})$

$$= a_x b_y \hat{k} - a_x b_z \hat{j} - a_y b_x \hat{k} + a_y b_z \hat{i} + a_z b_x \hat{j}$$

$$- a_z b_y \hat{i} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j}$$

$$+ (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k} \;//$$

香港浸會大學
HONG KONG BAPTIST UNIVERSITY

理學院
FACULTY OF SCIENCE

非線性研究中心
Centre for Nonlinear Studies
主任：胡斑比教授
Director: Prof. Bambi Hu

Pode fazer também

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

→ via 3x3 determinante

Note que no fins tem que ser um vetor!

香港 九龍塘 Kowloon Tong, Hong Kong 電話 Tel: (852) 3411 7029 傳真 Fax: (852)3411 ...

Do ponto de vista cinemático, a direção desse mov. se reduz à do movimento circular de um ponto P do corpo numa secção transversal. É como se fosse mov. circular.

Analogia

Deslocamento linear $x \longleftrightarrow \theta$ âng. de rotação

Velocidade linear $v = \frac{dx}{dt} \longleftrightarrow \omega = \frac{d\theta}{dt}$ Vel. ang.

Acel. linear $a = \frac{dv}{dt} \longleftrightarrow \alpha = \frac{d\omega}{dt}$ acel. ang.

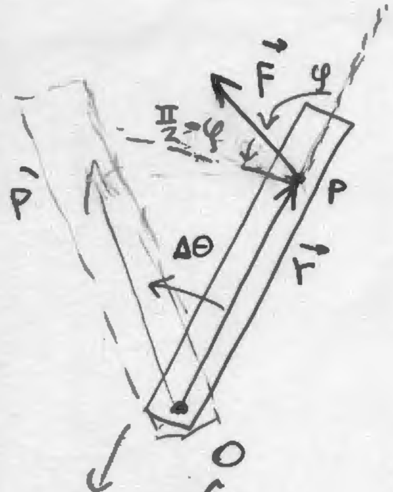
— — — — — Here Bloco 2-Aula 4 — — — — —

Agora, o que faz o papel de força na dinâmica das rotações?

Trabalho: $\Delta W = F \Delta x$, Por analogia

$$\Delta W = \overset{?}{\tau} \, \Delta\theta$$

$\Rightarrow \tau \rightarrow$ dimensão de energia



roda a haste ao redor do pto de apoio O.

trabalho

$$\Delta W = \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = F\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\varphi\right) r\,\Delta\theta$$

$$= F\, r\,\Delta\theta \left[\cancelto{0}{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}\cos\varphi + \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\varphi\right]$$

$$\Delta W = (\underbrace{F\, r\, \operatorname{sen}\varphi}_{\tau})\,\Delta\theta$$

⊛ Veja que somente a componente perpendicular à direção $\vec{r}$ é eficaz na produção de rotação.

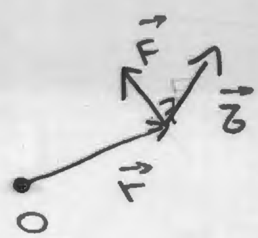
Em geral, definimos o $\vec{\text{Torque}}$

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}}$$

unidade Joule

$\vec{\tau} \perp \vec{r}$ e $\vec{F}$.

direção do eixo de rotação!



$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}|\,|\vec{F}|\operatorname{sen}\varphi$$

Ex:

$\vec{r} = 3\,\hat{\imath}$ m

$\vec{F} = 4\,\hat{\jmath}$ N

$\vec{\tau} = 12\,\hat{k}$ joule

⊛ Note que, como $\vec{r}$ depende do pto de origem (ref.), $\vec{\tau}$ também dependerá.

(*) Um caso importante é o de <u>forças centrais</u>!

(Ex: Lei da gravitação universal)

$$\vec{F} = F(r)\,\hat{r}$$

, onde $\vec{r}$ é o vetor posição em relação a um dado pto O.

Nesse caso,

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times\left(F(r)\,\hat{r}\right) = F(r)\,\underbrace{(\vec{r}\times\hat{r})}_{=0} = 0$$

(lembre que $\vec{r} = r\,\hat{r}$).

<u>Força central Não produz torque.</u>

<u>Momento Angular</u>

2^{a} lei de Newton $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$, lembra?

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\vec{p}\right) - \underbrace{\cancel{\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}}}_{0 \text{ já que } \vec{p}\parallel\vec{v}}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad \boxed{\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}}$$

Momento angular em relação ao pto O.

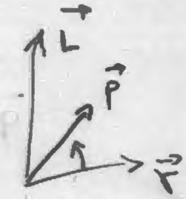
<u>Unidade</u>

<u>J.s</u>

4

2ª lei

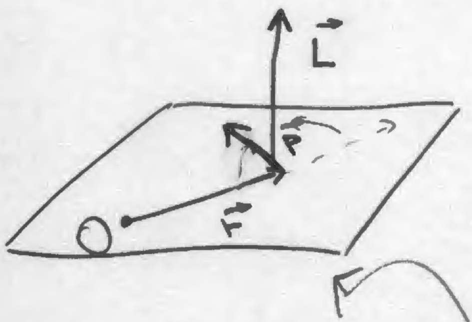
$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \rightarrow \text{Lei fundamental da dinâmica de rotações}}$$



__Analogia__:

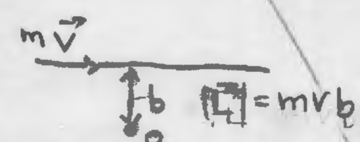
$$\vec{p} \longrightarrow \vec{L}$$

$$\vec{F} \longrightarrow \vec{\tau}$$



$\vec{L}$ é perpendicular ao plano definido por $\vec{r}$ e $\vec{p}$.

Claramente, se $\vec{\tau} = 0$, $\boxed{\vec{L} = \vec{cte}}$

(*) Ex: __Partícula livre__ 

(*) Para forças centrais, $\vec{\tau} = 0$, lembra?

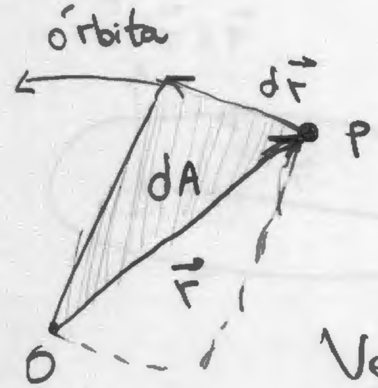
(em relação ao centro de forças)

Isso significa que __$\vec{L}$ é conservado__ para partículas sujeitas a __forças centrais.__

⇒ Conseqüência ⇒ __Movimento ocorre num plano__ e $\underline{\underline{\vec{L}}}$ o define.

3ª lei Kepler
$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3$$

2ª lei de Kepler



$$dA = \frac{|\vec{r} \times d\vec{r}|}{2}$$

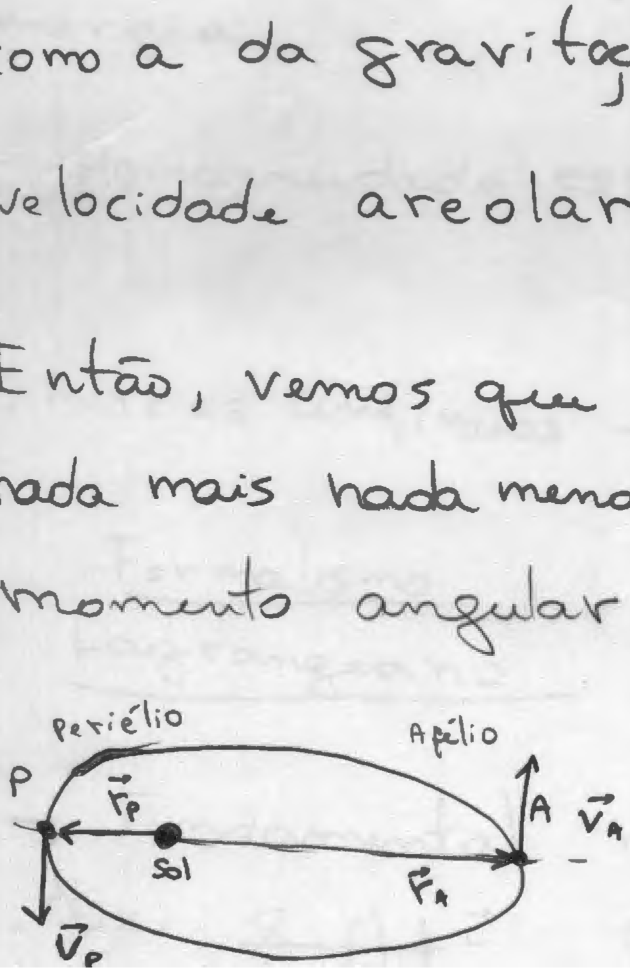
Velocidade Areolar $= \dfrac{dA}{dt}$

$\vec{p} = m\vec{v}$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{|\vec{r} \times \vec{p}|}{2m} = \frac{|\vec{L}|}{2m}$$

Ou seja, sob a ação de uma força central como a da gravitação $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$, a velocidade areolar é cte (pois $\vec{L} = \vec{C}te$).

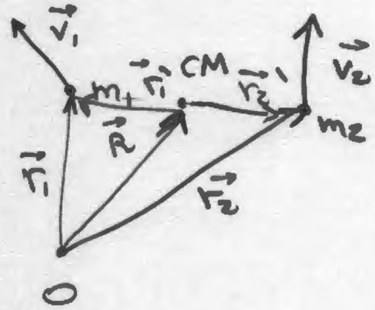
Então, vemos que a 2ª lei de Kepler não é nada mais nada menos que conservação de momento angular (grav. é força central).



$$L = m r_P V_P = m r_A V_A$$

$$\Rightarrow \frac{V_P}{V_A} = \frac{r_A}{r_P}, \quad \boxed{V_P > V_A}$$

Sistema de partículas



total em relação à O.

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{P}_2$$

$M = m_1 + m_2$

$$\underset{\downarrow\ \text{CM}}{\vec{R}} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}$$

$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{R}$ → com respeito ao CM

$\vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \vec{R}$

Vimos que $\boxed{m_1 \vec{r}_1' + m_2 \vec{r}_2' = 0}$, $\boxed{\vec{P}_1' + \vec{P}_2' = 0}$

$$\vec{P}_{CM} = \vec{V}_{CM} M \quad , \quad \vec{V}_{CM} = \frac{d\vec{R}}{dt} \quad ,$$

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_1' + \vec{V}_{CM}$$
$$\vec{V}_2 = \vec{V}_2' + \vec{V}_{CM}$$

Você pode mostrar que

$$\vec{L} = \vec{L}' + \boxed{\vec{R} \times \vec{P}_{CM}}$$ → Mom. Ang. do CM em relação à O.

$$\vec{L}' = m_1 \vec{r}_1' \times \vec{P}_1' + m_2 \vec{r}_2' \times \vec{P}_2'$$ → Mom. ang. em relação ao CM

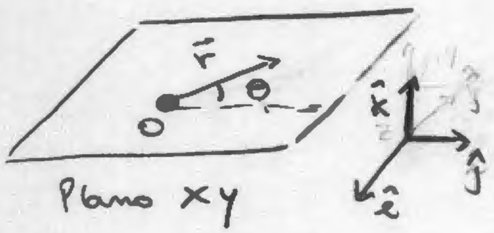
Se $\vec{P}_{CM} = 0$, $\vec{L}$ não depende da origem.
(tanto faz usar O ou CM como origem).

Ex: Potencial efetivo.

Potencial

Força central : $U(r)$, $F(r) = -\dfrac{dU}{dr}$

$\vec{L}$ conservado (já que $\vec{F} = F(r)\hat{r} \parallel \vec{r}$)



$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath}.$$

ou $\vec{r} = r\,\hat{r}(\theta) = r\cos\theta\,\hat{\imath} + r\,\text{sen}\theta\,\hat{\jmath}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta\,\hat{\imath} - r\,\text{sen}\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{\imath} + \frac{dr}{dt}\text{sen}\theta\,\hat{\jmath} + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{\jmath}.$$

$\hat{r}^2 = 1$, $\hat{\theta}^2 = 1$

$$= \frac{dr}{dt}\underbrace{(\cos\theta\,\hat{\imath} + \text{sen}\theta\,\hat{\jmath})}_{\hat{r}} + r\frac{d\theta}{dt}\underbrace{(-\text{sen}\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath})}_{\hat{\theta}}$$

para MCU, $\frac{dr}{dt} = 0$

velocidade radial

velocidade angular

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}}$$

$\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{k}$

Claramente, $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m r^2 \dfrac{d\theta}{dt}\hat{k}$.

$= I\,\omega\,\hat{k}$

momento de inércia.

Energia: $E = T + U(r)$

Revisão para P_2

Embora $\frac{dE_{total}}{dt} = 0$ nem sempre $\frac{dE_{mecânica}}{dt} = 0$.

Quando isso ocorre, temos uma força conservativa!

Ex: força elástica, peso, etc.

$$E_{mec} = \underbrace{\frac{m\vec{v}^2}{2}}_{T} + \underbrace{U}_{U}$$

$U \to$ energia potencial $= \frac{K(\vec{x} - \vec{x}_{eq})^2}{2}$, ou $mg(z - z_0)$ ou etc.

Força dissipativa $\to$ atrito, $\vec{F} = -\mu\vec{v}$ por exemplo.

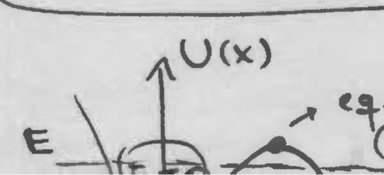
Trabalho: $W_{x_0 \to x_1} = \int_{x_0}^{x_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}$ (1 dimensão), **Potência** $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

$$W_{x_0 \to x_1} = \Delta T = -\Delta U$$ se for força conservativa

$$\boxed{F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}}$$ para forças conservativas

(Além disso $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

$W_{x_0 \to x_1} + W_{x_1 \to x_0} = 0$)



Conservação de momento : $\vec{P} = m\vec{v}$, 2^a lei: $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_R$

$$\vec{P}_{total} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \rightarrow \frac{d\vec{P}_{total}}{dt} = \underbrace{\vec{F}_R^{(ext)}}$$

Se $= 0$, $\vec{P}_{total} = \vec{cte}$

$\vec{P}_{CM} = M\vec{V}_{CM}$

CM : $\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$, $\vec{P}'_{total}$ relativo ao CM é nulo.

↓

também é centro de momento.

Massa variável : $M_0 = Cte = m_1(t) + m_2(t)$

$\dot{m}_1(t) \neq 0$, $\dot{m}_2(t) \neq 0$.

Colisões : Basicamente use cons. de momento e energia.

$\vec{I}$mpulso $\rightarrow \Delta\vec{P} = \int_{t_i}^{t_f} dt\, \vec{F}(t) = \vec{P}_f - \vec{P}_i$

Colisão elástica. Ecinética total conservada

Inelástica $\rightarrow \frac{dE_{cinética\ total}}{dt} \neq 0$

(5) Depois de lançado, a velocidade do corpo fica $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$. Potência da gravidade (instantân

$$P = m\vec{g}\cdot\vec{v} = m\vec{g}\cdot(\vec{v}_0 + \vec{g}t) = mg(gt - v_0 \operatorname{sen}\alpha)$$

Como $m\vec{g}$ é força constante, a potência média é

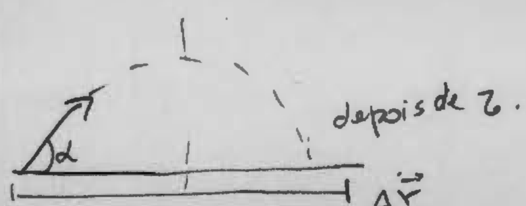
$$\langle P \rangle = \bar{P} = \frac{W}{\tau} = \frac{m\vec{g}\cdot\Delta\vec{r}}{\tau}$$

$\Delta\vec{r}$ → deslocamento líquido durante movimento

τ → tempo de duração do movimento

$\vec{g} \perp \Delta\vec{r}$

$$\Rightarrow \bar{P} = 0$$



(6) $U(r) = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r} \Rightarrow F(r) = -\frac{dU}{dr} = \frac{2a}{r^3} - \frac{b}{r^2}$

(Torque = 0) $L = mvr$ conservado.

(a) Equilíbrio em $r = r_0 \Rightarrow F(r_0) = 0 = \frac{2a}{r_0^3} - \frac{b}{r_0^2} = 0$

$$\boxed{r_0 = \frac{2a}{b}}$$

Para ser equilíbrio estável

$$\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_0} > 0 \Rightarrow U''(r) = \frac{d}{dr}\left[-\frac{2a}{r^3} + \frac{b}{r^2}\right]$$

$$= \frac{6a}{r^4} - \frac{2b}{r^3} \quad \text{e}$$

$$U''(r_0) = \frac{6a}{r_0^4} - \frac{2b}{r_0^3} = \frac{6a}{\left(\frac{2a}{b}\right)^4} - \frac{2b}{\left(\frac{2a}{b}\right)^3} = \frac{b^4 6}{16a^3} - \frac{b^4}{4a^3}$$

$$U''(r_0) = \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\right)\frac{b^4}{a^3} = \frac{b^4}{8a^3} > 0$$ então equilíbrio estável!

(b) Valor Máximo da F em r_1 (atração) $\rightarrow F'(r_1) = 0 \Rightarrow -\frac{6a}{r_1^4} + \frac{2b}{r_1^3} =$

$$-\frac{3a}{r_1^4} + \frac{b}{r_1^3} \Rightarrow r_1 = \frac{3a}{b} \Rightarrow F_{max} = F(r_1) = \frac{2a}{\left(\frac{3a}{b}\right)^3} - \frac{b}{\left(\frac{3a}{b}\right)}$$

$$\Rightarrow F(r_1) = \frac{2}{27}\frac{b^3}{a^2} - \frac{b^3}{9a^2} = -\frac{b^3}{27a^2}$$ $\rightarrow$ negativo, força atrativa