Claramente, a massa total é $M = m_1 + m_2$.

Veja que (assume m_1 e m_2 cte)

$$\underline{\vec{P}}_{tot} = m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2\right) = M\frac{d\vec{R}}{dt}$$

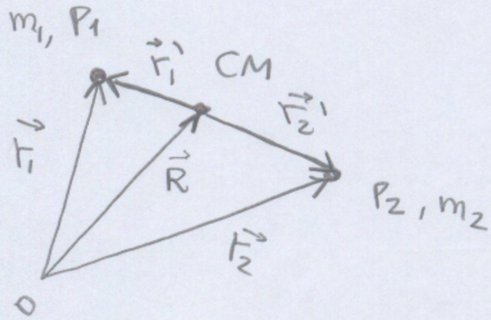
onde $\boxed{\vec{R} \equiv \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{(m_1+m_2)}}$ $\longrightarrow$ vetor posição do <u>centro de massa</u>

⊛ Veja que isso é uma média ponderada (não somente uma média aritmética). O centro de massa fica <u>mais "perto"</u> da partícula com mais massa.

⊛ Assim, vemos que $\dfrac{d}{dt}\left(M\dfrac{d\vec{R}}{dt}\right) = \vec{F}_R^{ext}$.

Ou seja, se $\underline{\vec{F}_R^{ext} = 0}$, o momento total do sistema, que é o momento do centro de massa, $\underline{\vec{P}}_{CM} = M\frac{d\vec{R}}{dt}$, é conservado. Isso vai ser importante quando estudarmos colisões.

Vamos mostrar agora que de foto o momento total do sistema se concentra no movimento do centro de massa.



$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_1' &= \vec{r}_1 - \vec{R} \\ \vec{r}_2' &= \vec{r}_2 - \vec{R} \end{aligned}\right\} \text{ deslocamentos relativos ao centro de massa.}$$

Claramente, $\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \dfrac{(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)}{m_1+m_2} = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

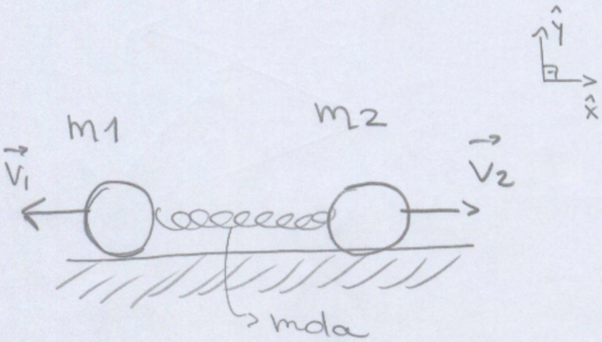
$$\vec{r}_2' = \frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Ou seja, $\boxed{m_1\vec{r}_1' + m_2\vec{r}_2' = 0}$. Então,

$$\frac{d}{dt}\left[m_1\vec{r}_1' + m_2\vec{r}_2'\right] = 0 \Rightarrow m_1\underbrace{\vec{v}_1'}_{\substack{\text{Velocidade}\\ \text{de 1 com respeito}\\ \text{ao CM}}} + m_2\vec{v}_2' = \underbrace{\vec{P}_1' + \vec{P}_2'}_{\substack{\text{momentos com}\\ \text{relação ao CM.}}} = 0$$

$\Rightarrow$ O momento total do sistema relativo ao CM é nulo! Isso significa que o momento total do sistema se concentra no movimento do centro de massa. CM é chamado também de

Ex: Como vimos, $\frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} = \vec{F}_R^{(ext)}$. Claramente, se $\vec{F}_R^{(ext)} = 0$, $\vec{P}_{tot}$ é constante. É uma generalização da lei da inércia.



Inicialmente o sistema (segure as bolinhas) começa do repouso, com a mola comprimida. O que acontece quando soltamos as bolinhas? Despreze atrito.

- Claramente, toda a dinâmica se dá apenas na direção x. (as forças em y se equilibram).

- As forças entre as partículas, por causa da mola, formam um par ação-reação. Assim, (normal cancela peso) a $\vec{F}_R^{(ext)} = 0$. (Comprimento da mola é constante) Assim, tudo que falamos antes se aplica.

- Claramente, nesse exemplo o CM está em repouso e como $\vec{F}_R^{(ext)} = 0$, ele se manterá em repouso.

Ok, o $\vec{P}_{tot}$ em $t=0$ (ainda no repouso) como

$\vec{v}_1(0) = \vec{v}_2(0)$, $\vec{P}_{tot}(0) = 0$. Agora, em geral,

depois de soltarmos as bolinhas

$$\vec{P}_{tot} = m_1 \vec{v}_1(t) + m_2 \vec{v}_2(t) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{v}_1(t) = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}_2(t)}$$

(pois tem que ser conservado se $\vec{F}_R^{(ext)} = 0$)

A partícula + pesada se move com velocidade menor!

Energia cinética: $$\frac{T_1 = \frac{m_1 \vec{v}_1^{\,2}}{2}}{T_2 = \frac{m_2 \vec{v}_2^{\,2}}{2}} = \frac{m_1}{m_2}\frac{\vec{v}_1^{\,2}}{\vec{v}_2^{\,2}} = \frac{m_2}{m_1}$$

- Energia mecânica total se conserva e o sistema de duas partículas permanecerá em oscilação (movimento interno), aproximando-se e afastando-se do CM, enquanto este permanece em repouso.

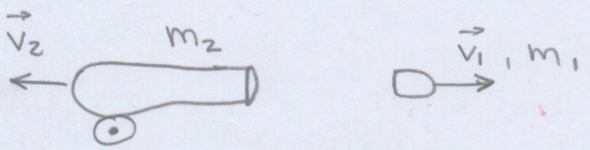
- Se tivéssemos atrito, $F_a^{(1)} = \mu_d m_1 g$, $F_a^{(2)} = \mu_d m_2 g$ mas elas sempre estarão em direções opostas.

$\vec{v}_1$ $\vec{F}_a^{(1)}$ 1 $\quad F_R^{ext} = \mu_d g (m_1 - m_2) \Rightarrow$ Se $m_1 = m_2$

o CM não se move, mas as massas vão oscilar até

- Se $m_1 \neq m_2$, o CM se move enquanto as bolinhas oscilam.

- Agora você pode entender porque um canhão recua quando atira uma bala.



As forças internas são de origem química (combustão à pólvora)

- Veja que $\vec{F}_R^{(ext)} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{tot}$ é constante implica que um sistema não pode deslocar o seu CM sob a ação puramente de forças internas.

- É por isso que foguetes liberam gases em espaço (veremos mais sobre isso depois).

- O fato de que o "movimento interno" é independente do mov. do CM permite-nos ignorar a estrutura interna do sistema e tratá-lo como uma única partícula (

- Extensão a sistemas de várias partículas

N partículas

$(i, j = 1, 2, \dots, N)$

Forças internas Newtoni-anas

$$\vec{F}_{i(j)} + \vec{F}_{j(i)} = 0$$

(pares ação e reação)

2ª lei para cada partícula.

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N}{}' \vec{F}_{i(j)} + \vec{F}_i^{(ext)} \qquad (i = 1, 2, \dots, N)$$

↓ partícula não interage consigo mesma

Note que

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^{N}{}' \vec{F}_{i(j)} = 0$$

→ resultante das forças internas se anula (soma sobre todos os pares ação e reação).

Define $\vec{F}_R^{(ext)} = \sum_{i=1}^{N}{}' \vec{F}_i^{(ext)}$, $M = \sum_{i=1}^{N}{}' m_i$

↓ massa total

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^{N}{}' m_i \vec{r}_i}{M}$$

↓ vetor centro de massa do sistema

e $\vec{P}_{CM} = M \frac{d\vec{R}}{dt}$ (ou total) e $\frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} = \vec{F}_R^{(ext)}$

como antes.

Mostre que

$$\sum^{N}{}' m_i \, d\vec{r}_i{}' = \sum^{N}{}' \vec{p}_i{}' \dots$$

→ momento total do sistema relativo ao CM

- É graças a este resultado que podemos tratar corpos macroscópicos como partículas, usando o conceito de CM.

- Note que as leis da mecânica não distinguem "grande" de "pequeno". Um corpo pode ser composto de um número arbitrário de outros corpos de tamanho menor, e a nossa discussão acima mostra que esse corpo como um todo, tratado como uma partícula, obedece as mesmas leis de movimento que cada uma das partículas que o constituem. Isso é uma (Tipo) invariância de escala.

- Com a descoberta da mecânica quântica vemos que as leis de movimento que regem átomos são diferentes daquelas que regem objetos macroscópicos.