Veja que $F_g = -\frac{dU(r)}{dr}$ onde $U(r) = -\frac{GMm}{r}$

é o potencial gravitacional $\Rightarrow$ Força gravitacional

é conservativa. Para um corpo sobre a

superfície da Terra (raio R)

$$F_g = -mg = -m\left(\frac{GM}{R^2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$U(R) = -\frac{GMm}{R} = -mgR \text{ , pois } g = \frac{GM}{R^2}$$

Agora, no infinito $\lim_{r\to\infty} U(r) = 0$. Queremos

que a partícula "chegue" no infinito com $\vec{V} = 0$.

Assim, $\Delta T = \frac{mV_{infinito}^2}{2} - \frac{m\vec{V}_e^{\,2}}{2}$ mas energia mecânica é conservada então

$$\Delta U = U(\infty) - U(R) = mgR \quad \text{e}$$

(Torricelli no espaço) ☺

$$\Delta T = -\Delta U \Rightarrow \frac{m\vec{V}_e^{\,2}}{2} = mgR \Rightarrow |\vec{V}_e| = \sqrt{2gR}$$

não depende da massa m do corpo.

Terra

$M_{Terra} = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg $\quad \boxed{|\vec{V}_e| \simeq 40.300 \frac{Km}{h}}$

$g = 9{,}81$ m , $R = 6{,}37 \times 10^{6}$ m $\quad G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm² (kg

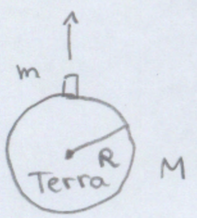
Ex: Qual a velocidade mínima (inicial) necessária para um corpo que se afaste infinitamente da Terra? (chegando no infinito com $v=0$) Despreze resistência do ar.

Velocidade mínima = Velocidade de escape (na superfície da Terra)

Ela depende da massa do corpo (nessa aproximação)?

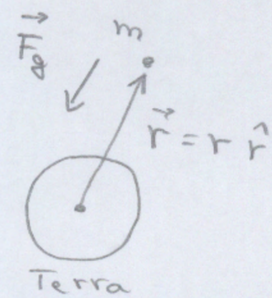
Não. Vamos ver por que...

Corpo parte da superfície da Terra.



Em geral força gravitacional entre Terra e corpo

$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

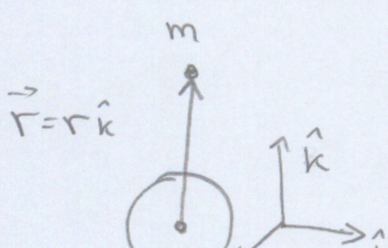


$$\boxed{\hat{r}^2 = 1}$$

R= raio da Terra

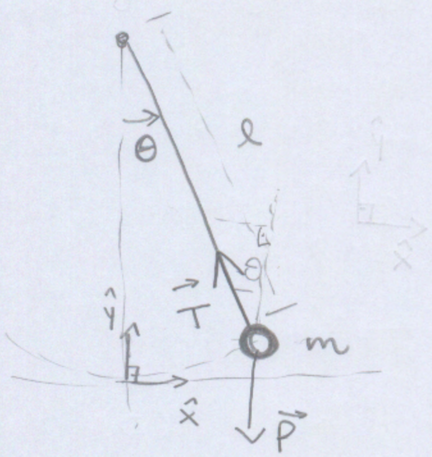
Vamos definir o eixo entre elas como direção $\hat{k}$.

Isso sempre é possível dado o caráter esfericamente simétrico (radial) da $\vec{F}_g$.



$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2}\hat{k} = F_g\hat{k}, \quad F_g = -\frac{GMm}{r^2}$$

Pêndulo como oscilador harmônico



2ª lei para o corpo:

Em x

$$ma_x = -T\,\text{sen}\,\theta$$

$$ma_y = -mg + T\cos\theta$$

Sendo $\vec{a} = \dfrac{d^2x}{dt^2}\hat{x} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\hat{y}$ e $x = \ell\,\text{sen}\,\theta$

$y = \ell(1-\cos\theta)$

Vemos que

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{T}{\ell}x \quad , \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg + T\cos\theta$$

Vamos supor que $a_y \sim 0$, $\theta \sim 0$ $(\cos\theta \sim 1)$

e assim $T \sim mg$. Daí, vemos que

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mg}{\ell}x \Rightarrow \ddot{x} + \frac{g}{\ell}x = 0$$

Já vimos isso antes! É um oscilador harmônico com freq. angular $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$

e assim, o período é

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}} \rightarrow \underline{\underline{cte}}\,!$$

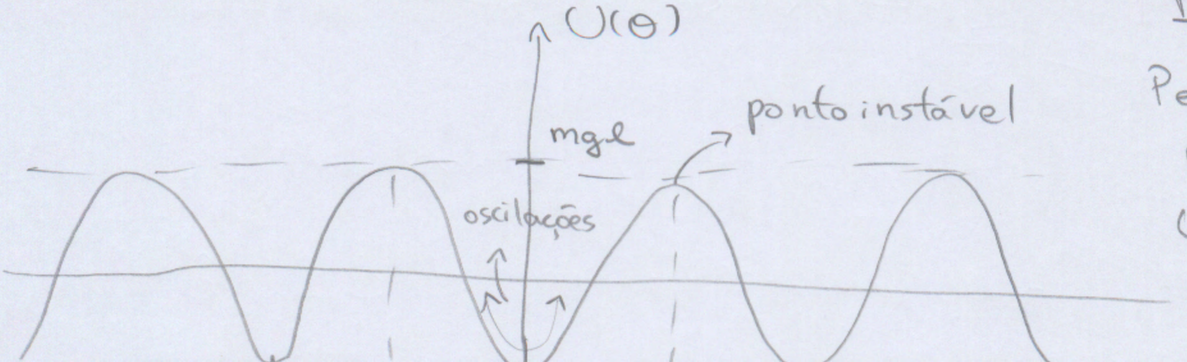
Esse período <u>constante</u> para o pêndulo, ou melhor, essa aproximação de que o pêndulo se comporta como o OHS (oscilador hârmonico simples)

Só é justificada para pequenas amplitudes (ou <u>ângulos</u>). Para "θ" grande o pêndulo não se comporta como um OHS.

Qual seria a energia potencial do problema?

Claramente, a energia potencial gravitacional

$$U(\theta) \overset{= mgy}{=} mg\ell(1-\cos\theta) \rightarrow \text{potencial } \underline{\text{periódico}}.$$



Perto de $\theta \sim 0$

$$U(\theta) \sim \frac{mg\ell\theta^2}{2}$$

Como $x = l \,\text{sen}\,\theta$ e $\underline{\theta}$ pequeno $\text{sen}\,\theta \sim \theta$

2ª lei fica

$$x \sim l\theta \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} \sim l\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \quad ml\ddot{\theta} = -\frac{mg}{l}l\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0, \quad \theta(t) = \theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \varphi_0\right)$$

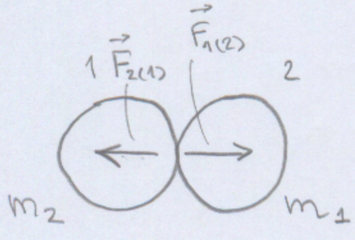
como já vimos antes ...

Conservação de momento

Vocês lembram que a 2ª lei também pode ser escrita como $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_R$, onde

$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$ momento linear.

Imagine agora que você tenha duas partículas (ou corpos) que interagem via um par de ação e reação. (3ª lei)



Então, nesse caso $\vec{F}_{1(2)} + \vec{F}_{(2)1} = 0$

A segunda lei fica nesse caso

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt} = \vec{F}_{2(1)} \quad , \quad \frac{d\vec{P}_2}{dt} = \vec{F}_{1(2)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{P}_1 &= m_1 \vec{v}_1 \\ \vec{P}_2 &= m_2 \vec{v}_2 \end{aligned}}$$

Agora, defina $\vec{P}_{tot} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \rightarrow$ <u>momento total</u> do sistema de 2 partículas.

Assim, é fácil ver que

$$\boxed{\frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} = \vec{F}_{2(1)} + \vec{F}_{1(2)} = 0}$$

Conservação de momento total !

⊛ Embora existem (em eletromagnetismo) exemplos onde a 3ª lei não é válida, conservação de momento permanece válida.

Considere agora o caso mais geral onde existem forças externas atuando sobre cada corpo. A segunda lei fica

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt} = \underbrace{\vec{F}_{2(1)} + \vec{F}_1^{ext} \quad , \quad \frac{d\vec{P}_2}{dt} = \vec{F}_{1(2)}}_{\text{par ação e reação}} + \vec{F}_2^{ext}$$

Novamente, definindo $\vec{P}_{total} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$ obtemos

$$\boxed{\frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} = \vec{F}_R^{(ext)}}$$

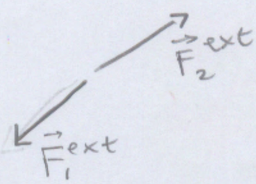
resultante das forças externas

$$\vec{F}_R^{ext} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}$$

Ou seja, o momento total de um sistema é <u>conservado</u> quando a soma das forças externas sobre o sistema é zero.

⊕

Assim, se $\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} = 0$



essas forças não alteram o momento total $\vec{P}_{tot}$ (mas podem produzir rotação, veremos depois).

⊛ Agora, veja que essa equação $\frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} = \vec{F}_R^{ext}$ é <u>como se fosse uma equação para uma</u> "partícula" que "carrega" todo o momento do sistema. Será que conseguimos associar uma <u>posição</u> e uma <u>massa</u> a essa "partícula"?