Potência

aula 2 bloco 2

É importante na prática saber não somente quanto trabalho foi realizado mas quanto tempo levou para que o trabalho fosse realizado.

Definimos Potência (instantânea):

$$\boxed{P_{ot} = \frac{dW}{dt}}$$

unidade (SI)

Watt = $\frac{\text{Joule}}{\text{segundo}}$

$KWh = 10^3 W \times 3{,}6 \times 10^3 s$

$= 3{,}6 \times 10^6 J$

minha conta de Luz

$100 \ KWh = 3{,}6 \times 10^8 J$

massa grão de areia $\approx 10^{-8}$ Kg

$c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$

$E = mc^2 = 10^{-8} \times 9 \times 10^{16} = 9 \times 10^8 J$

energia de repouso em 2-3 grãos de areia = minha conta de Luz

Note que o trabalho é

$$W_{\vec{r}_0 \to \vec{r}_1} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} dW = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Então, $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$P_{ot} = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Mas, pela 2ª lei: (massa constante) $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ então

$$\boxed{P_{ot} = \vec{F} \cdot \vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}^2}{2}\right) = \frac{dT}{dt}}$$

Potência é a derivada da energia cinética, T, no tempo.

Ex: Mov. unidimensional, força conservativa F(X)

$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} dx\, F(x) \Rightarrow F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

(lembra do teorema fundamental do cálculo?).

$$P_{ot} = F\frac{dx}{dt} = -\frac{dU}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{dU}{dt}$$, Mas, como vimos

antes $$P_{ot} = \frac{dT}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(T+U) = 0}$$ Formulação diferencial da conservação de energia mecânica

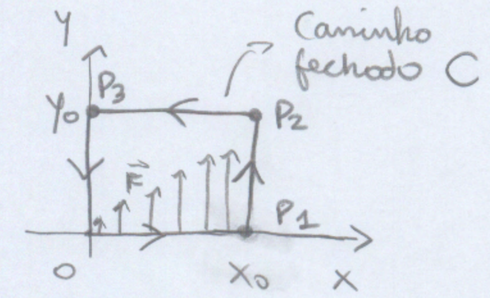
---

Adendo sobre forças não-conservativas

Vimos que em 1d qualquer força que somente dependa da posição, F(x), é conservativa.

Para ver que isso não é o caso em 2 ou 3 dimensões, basta ver o seguinte contra-exemplo.

Suponha que a força seja $\vec{F} = \alpha x \hat{j}$ onde $\alpha = \underline{\underline{Cte}}$. Vamos pegar o caminho fechado



Zero pois $\vec{F}.\vec{dr} = 0$

$$\oint_C \vec{F}.\vec{dr} = \cancel{\int_{(0,0)}^{(x_0,0)} \vec{F}.\vec{dr}} + \int_{(x_0,0)}^{(x_0,y_0)} \vec{F}.\vec{dr}$$

$$+ \cancel{\int_{(x_0,y_0)}^{(0,y_0)} \vec{F}.\vec{dr}} + \underbrace{\int_{(0,y_0)}^{(0,0)} \vec{F}.\vec{dr}}_{?}$$

Zero pois $\vec{F}.\vec{dr}$

$P_1 = (x_0, 0)$

$P_2 = (x_0, y_0)$

$P_3 = (0, y_0)$

Então, $\oint_C \vec{F}.\vec{dr} = \underbrace{\int_{(x_0,0)}^{(x_0,y_0)} \vec{F}.\vec{dr}}_{\substack{\vec{dr} = dy\,\hat{j} \\ \vec{F} = x_0 \alpha \hat{j}}} + \underbrace{\cancel{\int_{(0,y_0)}^{(0,0)} \vec{F}.\vec{dr}}}_{\substack{\vec{dr} = dy\,\hat{j} \\ \vec{F} = \alpha 0 \hat{j}}}$ zero pois não há força sobre a trajetória!

$$\Rightarrow \oint_C \vec{F}.\vec{dr} = \int_0^{y_0} dy\, \alpha x_0 = \alpha x_0 y_0 \neq 0 \Rightarrow$$ Força não é conservativa!

Em geral, se existem N forças conservativas $\vec{F}_i^{(c)}$, $i = 1, \ldots, N$ e M forças não-conservativas $\vec{F}^{(nc)}$ atuando sobre o corpo

Sendo $W_i^{(c)} \rightarrow$ trabalho realizado pela força conservativa $\vec{F}_i^{(c)}$

$W_i^{(nc)} \rightarrow$ trabalho realizado pela força não - conservativa $\vec{F}_i^{(nc)}$

Então, pelo teorema trabalho- energia cinética

$$\boxed{\Delta T = \sum_{i=1}^{N} W_i^{(c)} + \sum_{i=1}^{M} W_i^{(nc)}}$$

Mas, para cada força conservativa temos uma energia potencial $U_i^{(c)}$ tal que

$$\boxed{W_i^{(c)} = - \Delta U_i}$$

Sendo $U_{total} = \sum_{i=1}^{N} U_i^{(c)}$

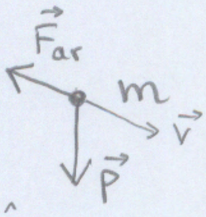
Vemos que a soma dos trabalhos das forças não-conservativas é dado por

$$\sum_{i=1}^{M} W_i^{(nc)} = \Delta T - \sum_{i=1}^{N} W_i^{(c)} = \Delta T + \sum_{i=1}^{N} \Delta U_i$$

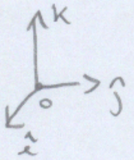
então

Ex: Queda livre + resistência do ar

$$\vec{F}_{ar} = -\mu \vec{v}.$$



2ª lei: $\boxed{m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} - \mu\vec{v}}$



$$\vec{P} = -mg\,\hat{k} \quad , \quad \vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

Fazemos agora $\overrightarrow{(2^a \text{ lei})} \cdot \vec{v}$ para obter

$$m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P}\cdot\vec{v} - \mu\vec{v}^{\,2} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}^{\,2}}{2}\right) - \vec{P}\cdot\vec{v} = -\mu\vec{v}^{\,2}$$

Mas $\vec{P}\cdot\vec{v} = -mg\dfrac{dz}{dt} = -\dfrac{d}{dt}\left[mg(z-z_0)\right]$ para ser geral coloca-se z_0 de referên-cia.

Então, $$\frac{d}{dt}\Big[\underbrace{\frac{m\vec{v}^{\,2}}{2} + mg(z-z_0)}_{E_M}\Big] = -\mu\vec{v}^{\,2} < 0$$

Mas veja que $$\Delta E_M = E_M(t_1) - E_M(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} dt\, \frac{dE_M}{dt}$$

e então $$\Delta E_M = \int_{t_0}^{t_1} dt\,(-\mu\vec{v}^{\,2}) = \int_{t_0}^{t_1} dt\, \vec{F}_{ar}\cdot\vec{v}$$ $\rightarrow$ trabalho realizado pela força não-conservativa

Vimos na aula anterior que em 1 dimensão se $F = F(x)$ essa força é conservativa e existe uma energia mecânica

$$E_m = \frac{mv^2}{2} + U(x) = \underline{\underline{Cte}} \quad \text{onde}$$

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}, \quad \text{ou} \quad U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} du\, F(u)$$

$$= -W_{x_0 \to x}$$

Podemos é claro, fazer

$$\underbrace{\frac{mv^2}{2}}_{\substack{\text{positivo} \\ \text{definido}}} = E - U(x) \geq 0 \quad \text{assim vemos que}$$

$$\boxed{U(x) \leq E}$$

- Essa equação define os <u>valores de x</u> que <u>são acessíveis</u> para a partícula se movimentar dado uma energia E.

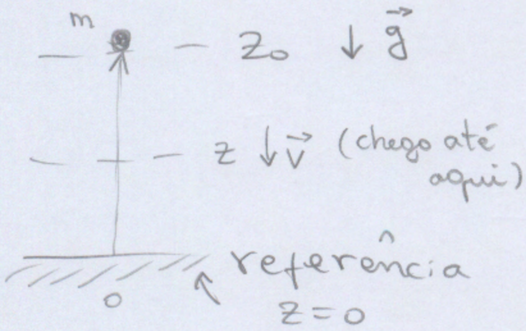
Onde $U(x) \leq E \rightarrow$ região "permitida" (<u>experimento</u>)

$U(x) > E \rightarrow$ região "proibida"

Ex: Queda livre partindo do repouso.

Vimos que $E = mgz_0 \Rightarrow$

$$\frac{mv^2}{2} = mgz_0 - \underbrace{mgz}_{U_g(z)} \geq 0$$



$$\Rightarrow z_0 \geq z$$

Ou seja, a partícula não vai subir além do z_0 inicial. (isso estaria na região "proibida").

Então, em geral, vemos que

$$V(x(t)) = \pm\sqrt{\left(\frac{2}{m}\right)\left(E - U(x(t))\right)}$$

↳ para uma dada energia E, partícula pode estar "indo" ou "vindo".

(velocidade = 0)

Nos pontos x_0 onde $U(x_0) = E \rightarrow x_0$ é ponto de retorno.

Ex: Oscilador harmônico: $x_0 = \pm A \rightarrow$ pontos de retorno.
(experimento)

Ex: Potencial de Lennard-Jones:

A interação entre dois átomos que formam uma molécula diatômica é geralmente

$$U(r) = D\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{a}{r}\right)^{6}\right]$$

$r > 0 \rightarrow$ dis
entre os "cen
dos átomos.

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$F(r) = -\frac{dU}{dr} = 12\frac{D}{a}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{13} - \left(\frac{a}{r}\right)^{7}\right]$$

Ok, vamos analisar isso um pouco...

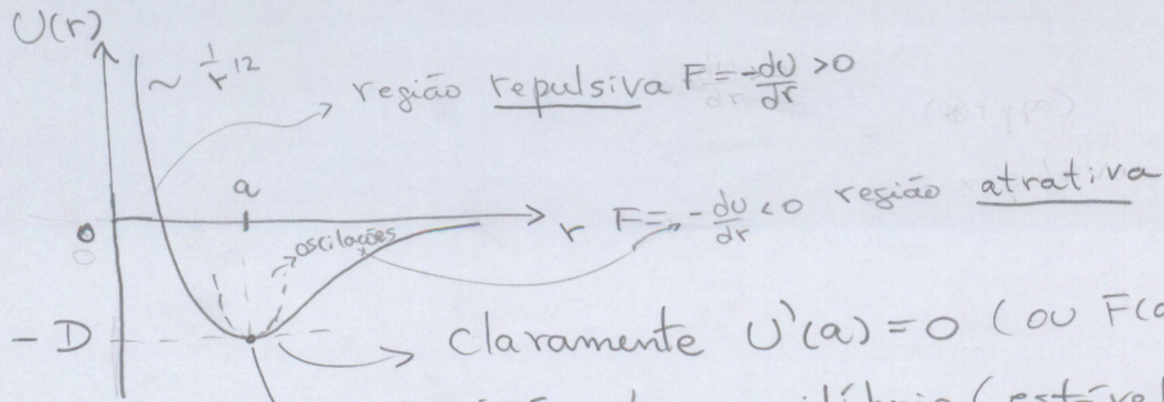
Veja que $F(a) = 0$. Além disso, veja que

$\lim_{r\to\infty} F(r) = 0$. Claramente, $\lim_{r\to\infty} U(r) = 0$ mas

$\boxed{U(a) = -D}$

$\lim_{r\to 0} U(r) \to \infty$

Podemos fazer o gráfico de $U(r)$



Embora o tratamento correto desse tipo de fenômeno só pode ser feito usando mecânica quântica, já dá para entender alguns aspectos qualitativos interessantes...