Eu não vou mostrar isso explicitamente mas o mesmo raciocínio usado anteriormente para relacionar ΔT ao trabalho, pode ser usado aqui para mostrar que

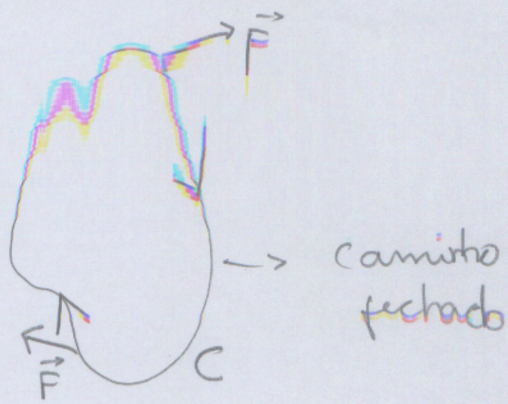
$$\boxed{W^{(C)}_{P_1 \to P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \frac{m\vec{V}_2^{\,2}}{2} - \frac{m\vec{V}_1^{\,2}}{2} = \Delta T}$$

onde C é o caminho entre P_1 e P_2 no espaço.

comentar exemplo com $\vec{P}$

⊕ A força é dita conservativa se

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0$$



(Anteriormente havíamos dito, em 1 dimensão, $W_{x_0 \to x_1} + W_{x_1 \to x_0} = 0$).

Nesse caso, existe um potencial U tal que

$$\boxed{U(P_2) - U(P_1) = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}}$$

Campo vetorial no plano

Ex: Seja $\vec{F}(x,y) = 8x^2y\,\hat{i} + 5x\,\hat{j}$

<u>Trajetória C</u>: $\vec{r}(t) = t\,\hat{i} + t^2\,\hat{j}$, $t \in [0,1]$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 dt\ \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\ ?$$

Calcule $\vec{F}$ sobre a trajetória C. Note que

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} \Rightarrow x(t) = t$$
$$y(t) = t^2$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = 8x^2(t)y(t)\,\hat{i} + 5x(t)\,\hat{j}$$
$$= 8t^4\,\hat{i} + 5t\,\hat{j} \quad // \quad \rightarrow \vec{F} \text{ ao longo da trajetória}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i} + 2t\,\hat{j} \Rightarrow \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = (8t^4\hat{i} + 5t\hat{j})\cdot(\hat{i} + 2t\hat{j})$$

$= 8t^4 + 10t^2$ Então

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 dt\,\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \int_0^1 dt\,(8t^4 + 10t^2) = 8\frac{t^5}{5} + 10\frac{t^3}{3}\Big|_0^1$$

$= 8(1)^5 + 10(1)^3 - 0 = 8 + 10 = 74$ //

⊛ Note então que para uma força conservativa

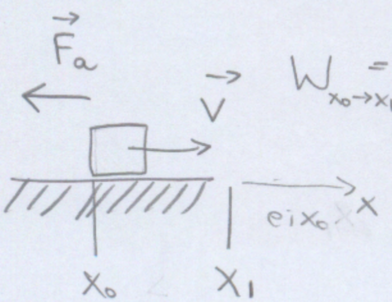
$$\boxed{W_{x_0 \to x} + W_{x \to x_0} = 0}$$

pois em geral

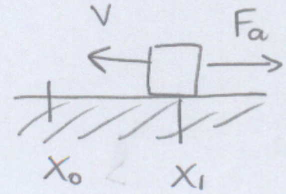
$$\int_a^b dx\, f(x) = -\int_b^a dx\, f(x)$$

Assim, o <u>trabalho total</u> realizado por uma força <u>conservativa</u> numa "viagem de ida e volta" é nulo. Por exemplo, você fornece "trabalho" à partícula na "ida" e ele é integralmente devolvido na "volta".

⊛ Porque isso não ocorre para forças de atrito?



$$W_{x_0 \to x_1} = \int_{x_0}^{x_1} dx\, F_a < 0$$



$$W_{x_1 \to x_0} = \int_{x_1}^{x_0} dx\, F_a < 0$$

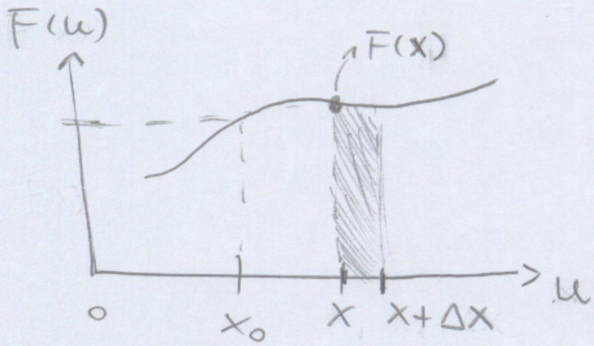
$$\Rightarrow W_{x_0 \to x_1} + W_{x_1 \to x_0} \neq 0$$

Força $\vec{F}_a$ não é conservativa!

(cálculo)

Vamos agora falar de matemática (isso será útil depois).

Seja F uma função (agora não é força é uma função qualquer).



Área sombreada $\sim F(x)\underbrace{\Delta x}_{\text{pequeno}}$

Suponha que exista uma função $\Phi(x)$ tal que

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) \approx \underbrace{F(x)\,\Delta x}_{\text{área}}$$ $\longrightarrow$ vemos que

$$F(x) \approx \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x}$$. No limite $\Delta x \to 0$ obtemos

$$F(x) = \frac{d\Phi(x)}{dx}$$. O teorema fundamental do cálculo estabelece que

$$\boxed{\Phi(x) - \Phi(x_0) = \int_{x_0}^{x} du\, F(u)} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} du\, F(u)\right) = F(x)}$$

(+ contínua)

OK, agora vamos usar esse conhecimento matemático ao nosso favor.

Eu vou mostrar para vocês que <u>toda força em uma dimensão que só dependa da posição</u>
(mov. unidimensional)
<u>da partícula é conservativa</u>, ou seja, <u>existe uma energia mecânica $= T + U$ que é constante no tempo</u>.

<u>Demonstração:</u> Seja $F(x)$ a força. É sempre possível nesse caso definir uma função U

$$\underbrace{U(x) - U(x_0)}_{\Delta U} = \overset{\text{conveniência}}{-}\int_{x_0}^{x} du\, F(u)$$ (pelo teorema fundamental do cálculo).

Veja que $\boxed{F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}}$ Agora, veja que

$$\Delta U = -W_{x_0 \to x}$$

Mas vimos que $\overset{\text{(em geral)}}{W_{x_0 \to x}} = \overset{\text{variação da cinética}}{\Delta T}$. Assim,

$$\Delta U + \Delta T = 0 \Rightarrow \exists\ E_M = T + U = \underline{cte}$$ //

Por outro lado, para o $\vec{P} = -mg\,\hat{z}$

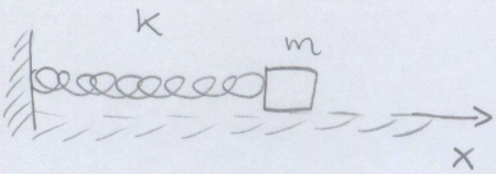
$$W_{z_0 \to z_1} = \int_{z_0}^{z_1} dz\,(-mg) = -mg(z_1 - z_0)$$

$$W_{z_1 \to z_0} = \int_{z_1}^{z_0} dz\,(-mg) = -mg\,(z_0 - z_1)$$

Claramente, nesse caso $\boxed{W_{z_0 \to z_1} + W_{z_1 \to z_0} = 0}$

(DEPOIS) —x—X—~~X~~—
(quinta)

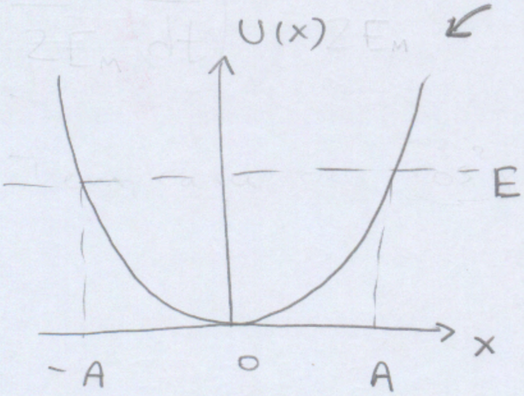
Ex: Oscilador harmônico simples em 1 dimensão



2^a lei: $m\dfrac{dv}{dt} = -kx$ → "lei de Hooke"

Vimos que a $E_M = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{kx^2}{2}$. Assim,

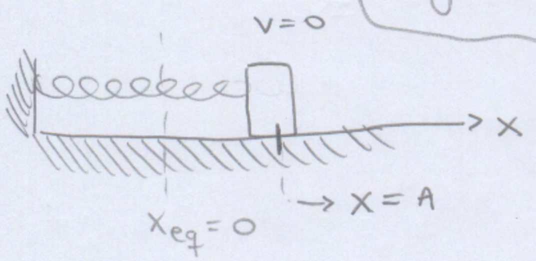
o potencial é $U(x) = \dfrac{kx^2}{2}$, $k > 0$



Imagine que a energia mecânica total (que é conservada) é E.

Sabemos que tem que existir um desloca-mento máximo $x = A$ onde $v = 0$.

Page 429



Nesse caso, $E = \frac{KA^2}{2} = U(\pm A)$ pois $v = 0$. Note que de fato, $x = -A$ também tem a mesma energia.

Veja que, de fato, $U(x) = U(-x) \Rightarrow$ função par!

e veja que $x = x(t)$ mas $\boxed{|x(t)| \leq A}$

Esse valor máximo de $|x| = A$ chamamos de amplitude de oscilação. Agora, veja que

$$\underbrace{E}_{\text{constante}} = \underbrace{\frac{mv^2}{2}}_{\text{função de } t} + \underbrace{\frac{kx^2}{2}}_{\text{função de } t} = \frac{KA^2}{2}.$$

Assim,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{K}{2}(A^2 - x^2) \Rightarrow v = \pm\sqrt{\frac{K}{m}(A^2 - x^2)}$$

de fato, numa dada posição x, você pode encontrar o bloco "indo ou vindo".

Agora, $v = \frac{dx}{dt} = + \sqrt{\frac{K}{m}(A^2 - x^2)}$

(escolho o +) por exemplo

Reescrevendo, $\dfrac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = dt\sqrt{\dfrac{K}{m}}$

Suponha que a partícula vai de x_0 em t_0 até x_1 até t_1.

$$\sqrt{\frac{K}{m}}\int_{t_0}^{t_1} dt = \sqrt{\frac{K}{m}}(t_1 - t_0) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}}$$

Poderíamos continuar <u>por aí</u> e achar <u>$x(t)$</u>.
Entretanto, seremos um pouco mais "espertos".

Veja que $\dfrac{mv^2}{2E} + \dfrac{Kx^2}{2E} = 1$. mas $E = \dfrac{KA^2}{2}$

$$\frac{mv^2}{KA^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1$$

tem cara de $\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

frequência angular   fase inicial

De fato, façamos $x(t) = A\operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$

Assim,

$$\frac{mv^2(t)}{KA^2} = 1 - \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi_0) = \cos^2(\omega t + \varphi_0).$$

Ou, $v^2(t) = \frac{kA^2}{m}\cos^2(\omega t + \varphi_0)$,

$$v(t) = \sqrt{\frac{k}{m}}\, A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Mas, $v(t) = \frac{dx}{dt}(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)$

Comparando, vemos que $\underbrace{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}_{cte}$ (já sabíamos isso, certo?)

→ Esse é um <u>oscilador harmônico simples.</u>

⊛ É um sistema fundamental na física.

$\varphi = \omega t + \varphi_0$ → fase, φ_0 → <u>fase inicial</u>, <u>A → amplitude</u>

⊛ A dinâmica é a mesma do mov. circular uniforme.

⊛ É fácil mostrar que $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$

(já vimos isso...)

⊛ Seja $x(0) = A\,\mathrm{sen}\,\varphi_0$, $v(0) = \omega A \cos\varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \tan^{-1}\left(\frac{\omega x(0)}{v(0)}\right)$

$\mathrm{sen}^2\varphi_0 + \cos^2\varphi_0 = 1 \Rightarrow \frac{x^2(0)}{A^2} + \frac{v^2(0)}{\omega^2 A^2} = 1$ ou

$A = \sqrt{x^2(0) + \frac{v^2(0)}{\omega^2}}$ <u>Discutir interplay das energias</u>