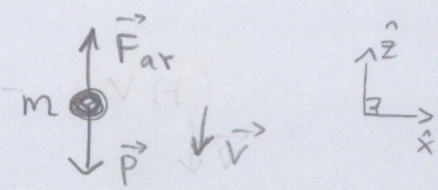
⊛ Outra coisa. Veja que somente a energia <u>cinética</u> depende da <u>$v(t)$</u>. A <u>energia potencial</u> somente depende das <u>coordenadas</u>.

OK, lindo, certo? Mas será que isso funciona para toda força?

Ex: Queda livre com resistência do ar.

$\vec{F}_{ar} = -\mu \vec{v}(t)$. Nesse caso,



$\boxed{\mu > 0}$

$$v(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

2ª lei: $$m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_{ar}$$ (ainda unidimensional efetivamente)

$$\left(m\frac{dv(t)}{dt}\right)\hat{z} = \left(-mg - \mu v(t)\right)\hat{z}$$

Ou seja:

$$\boxed{m\frac{dv}{dt}(t) = -mg - \mu v(t)}$$

Vamos tentar fazer o mesmo

Multiplica tudo por $V(t)$

$$m\, V(t)\frac{dV(t)}{dt} = -mg\, V(t) - \mu V^2(t)$$

$$m\, V(t)\frac{dV(t)}{dt} + mg\frac{dz(t)}{dt} = -\mu V^2(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m V^2(t)}{2} + mg\, z(t)\right] = -\mu V^2(t) < 0$$

Ou seja,

$$\frac{d E_M}{dt} = -\mu V^2(t) < 0$$

Energia mecânica, como definida anteriormente, <u>não é mais conservada</u>.

Porquê? Por causa dessa força de resistência do ar $\vec{F}_{ar} = -\mu \vec{V}(t)$ (tipo uma força de atrito)

→ Note que a soma das forças sobre o corpo, $\vec{F}_R$, agora <u>não depende</u> <u>somente</u> da <u>posição</u>.

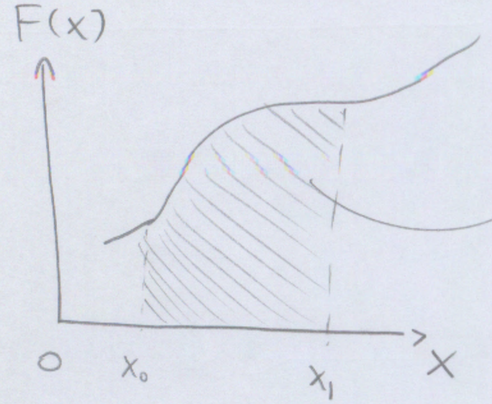
De fato, $\underline{\vec{F}_R} = \vec{P} + \vec{F}_{ar}$, que depende <u>de $\vec{V}(t)$</u>.

As duas primeiras forças, a força gravitacional e a força elástica, são exemplos de forças conservativas onde Em é conservado (isto é, constante no tempo). Por outro lado, forças como essa de resistência do ar (ou atrito em geral) são forças dissipativas ou não-conservativas onde Em não é conservado. Claro, nesse exemplo do corpo caindo com resistência do ar embora Em não seja conservada, a energia total que nesse caso envolve o calor gerado é conservada!

Agora vamos introduzir a idéia de trabalho

—x—

Imagine que você esteja ainda considerando um movimento unidimensional (direção x, por exemplo). Suponha que você tenha uma dada força $\vec{F} = F(x)\,\hat{x}$, ou seja, a força que atua no corpo depende da posição do corpo (com relação a um dado ref.). Ex: força elástica. Suponha que F(x) seja algo assim



a área embaixo da curva tem unidade de energia $N \cdot m = kg\frac{m^2}{s^2}$ = Joule.

Definimos o trabalho realizado por essa força F(x) no deslocamento de x_0 até x_1 através de

$$\underbrace{W_{x_0 \to x_1}}_{\text{trabalho realizado pela força}} \equiv \underbrace{\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx}_{\text{área sobre a curva.}}$$

Ok, esse tal de trabalho tem unidade de energia mas qual é de fato a relação dele com a energia cinética ou potencial?

Suponha que você tenha sua força resultante F (unidimensional) atuando sobre o corpo. Pela 2ª lei, temos

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = F}$$

Agora, considere um deslocamento infinitesimal dx e multiplique isso dos dois lados

$$m\frac{dv}{dt}\cdot dx = F\,dx$$

Entretanto, para se mover de dx, a partícula levou um dt com $v(t)$

ou seja $dx = v(t)\,dt$. Assim, vemos que

$$m\frac{dv}{dt}dx = m\frac{dv(t)}{dt}v(t)\,dt = F\frac{dx}{dt}dt$$

Suponha que a partícula tenha andado de x_0 em $t=t_0$ até x_1 em $t=t_1$. A velocidade era v_0 em t_0 e v_1 em $t=t_1$.

Pela definição, o trabalho feito pela força no deslocamento de x_0 até x_1 é

$$W_{x_0 \to x_1} = \int_{x_0}^{x_1} dx\, F(x)$$

. Agora, veja que

era $\frac{dx}{dt} F$

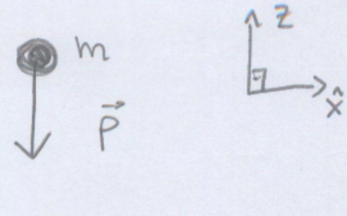
$$\underbrace{\int_{t_0}^{t_1} dt\, m\, v(t) \frac{dv(t)}{dt}}_{} = \int_{t_0}^{t_1} dt\, \frac{dx}{dt}(t)\, F(x(t)) = \int_{x_0}^{x_1} dx\, F(x)$$

mas $\Downarrow$

$$\int_{v_0}^{v_1} dv\, (m\, v) = \underbrace{\frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2}}_{\Delta T} = \int_{x_0}^{x_1} dx\, F(x) = W_{x_0 \to x_1}$$

Ou seja, o trabalho realizado por F no deslocamento de x_0 até x_1 (entre t_0 e t_1) é a variação da energia cinética!

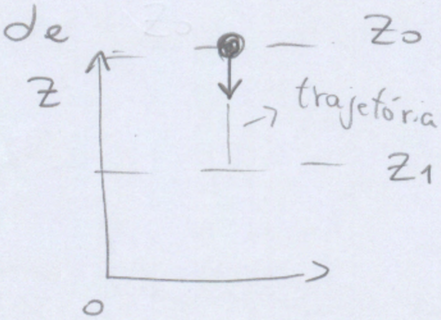
Ex: Queda livre



(sem resist. do ar)

(movimento unidimensional)

Partícula sai de



e vai para

$$z_0 > z_1.$$

Trabalho realizado por $\vec{P} = -mg\,\hat{z}$?

$$W_{z_0 \to z_1} = \int_{z_0}^{z_1} dz\, P = -\int_{z_0}^{z_1} dz\, \underbrace{(mg)}_{\text{constante}} = -mg(z_1 - z_0)$$

$$= -(\underbrace{U_1}_{\substack{\text{energia potencial grav.}\\ \text{da partícula em } z_1}} - \underbrace{U_0}_{\substack{\text{energia potencial grav. da}\\ \text{partícula em } z_0}}) = -\underbrace{\Delta U}_{\substack{\text{variação da energia pot. grav.}\\ \text{de } z_0 \to z_1.}}$$

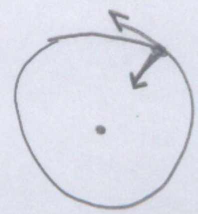
Agora, lembrem que nesse problema $E_M = T + U = \text{cte}$

Assim, $\Delta E_M = \Delta T + \Delta U = 0 \Rightarrow \Delta T = -\Delta U$ ou seja

$$\boxed{W_{z_0 \to z_1} = -\Delta U = \Delta T}$$

Vamos agora falar um pouco mais sobre trabalho e conservação de energia antes de falar de conservação de momento.

Eu falei para vocês que o trabalho era a variação da energia cinética. Mas no movimento <u>circular uniforme</u>

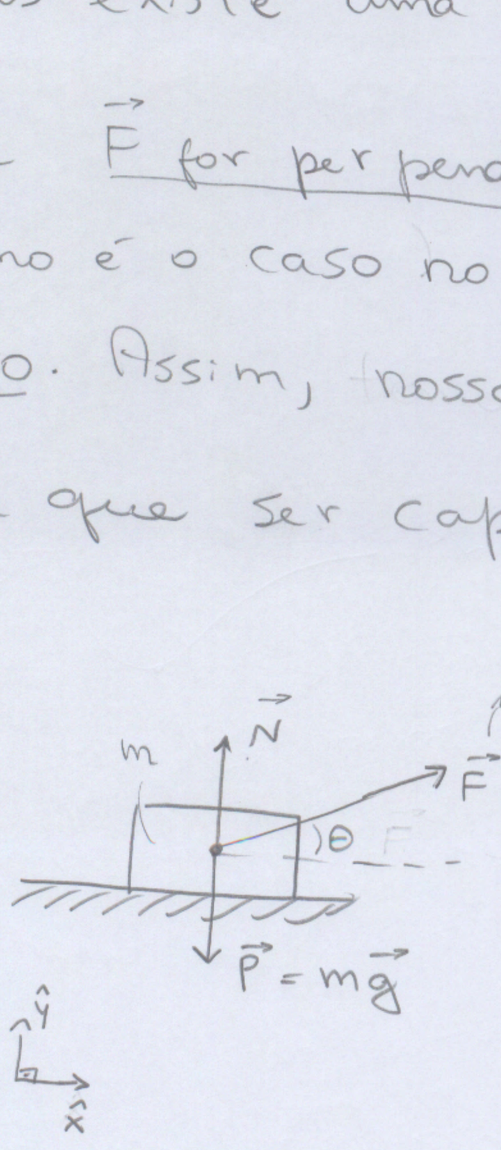


o módulo $|\vec{v}|$ não muda (energia cinética constante)

Mas existe uma $\vec{F}_{cp}$... Como fica?

Se <u>$\vec{F}$ for perpendicular</u> à trajetória (como é o caso no MCU), o <u>trabalho</u> é <u>zero</u>. Assim, nossa definição de trabalho tem que ser capaz de descrever isso.

Ex:



constante $F = |\vec{F}|$

(Atrito desprezível)

Vimos anteriormente que

$$\boxed{N + F\,\text{sen}\,\theta - P = 0}$$

Mas agora, tem uma componente em x

$$\boxed{F\cos\theta = ma}$$

Assim, para o deslocamento entre $\underline{x_1 - x_0 = \ell}$ na direção x, o trabalho seria

$$\boxed{W_{x_0 \to x_1} = F\cos\theta\,\ell}$$

. Agora, sabemos que nesse problema $a = \frac{F\cos\theta}{m} = \underline{Cte}$.

Então, a diferença entre as velocidades quadradas

$$V_1^2 - V_0^2 = 2a\ell = \frac{2F\cos\theta\,\ell}{m}$$

Demonstração

<u>MUA</u>

$V_1 = V(t_1)$, $X(t_1) = x_1$

$V_0 = V(t_0)$; $X(0) = x_0$

$\underline{\Delta t = t_1 - t_0}$

$V_1 - V_0 = a\Delta t$

$x_1 - x_0 = \ell = V_0\Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2}$

$\Rightarrow \ell = v_0\left(\frac{V_1 - V_0}{a}\right) + \frac{a}{2}\left(\frac{V_1 - V_0}{a}\right)^2$

$\ell = \left(\frac{V_1 - V_0}{a}\right)\left[V_0 + \frac{a}{2}\left(\frac{V_1 - V_0}{a}\right)\right]$

$\ell = \left(\frac{V_1 - V_0}{a}\right)\left[\frac{V_0}{2} + \frac{V_1}{2}\right] = V_1^2 - V_0^2$

Assim, multiplicando por $\frac{m}{2}$...

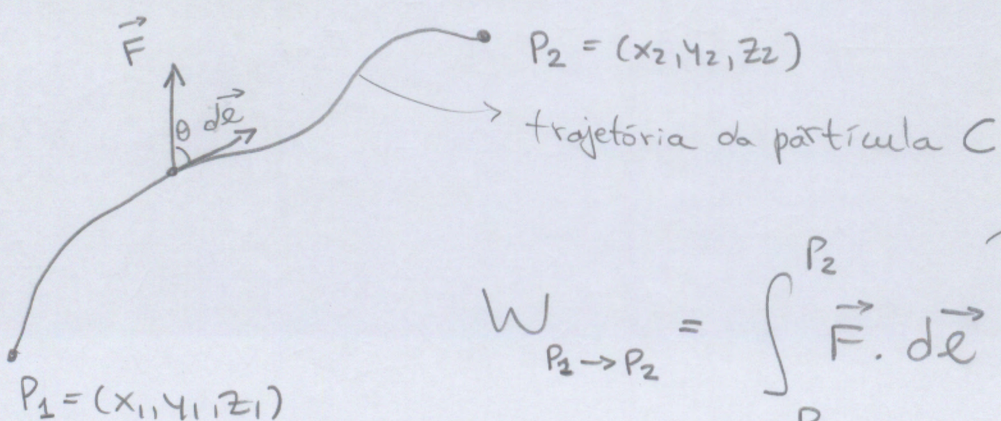
$$\underbrace{\frac{m}{2}(V_1^2 - V_0^2)} = F\cos\theta\,\ell$$

$$\underbrace{\Delta T}_{\text{Variação de energia cinética}} = \underbrace{F\cos\theta\,\ell}_{\text{trabalho}}$$

Veja que se $\underbrace{\theta = \frac{\pi}{2}}$ não há variação de T

Ou seja, a variação de energia cinética devido ao trabalho "vê" o ângulo entre a $\vec{F}$orça e o $\vec{d}$eslocamento. Nós já vimos uma operação, o produto escalar, que leva dois vetores em um número (que depende de $\cos\theta$ entre os vetores).

Trabalho de uma Força em 3 dimensões



Chamamos isso de integral de linha !

$$W_{P_1 \to P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$

$d\vec{\ell} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$

$$\boxed{W_{P_1 \to P_2} = \int_{P_1}^{P_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)}$$

Vemos que se $\vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0$ (ou seja, se forem ortogonais) o trabalho será zero !