Bloco 2

Agora daremos início ao 2º bloco de assuntos desse curso. Veremos a idéia de trabalho, energia, conservação de energia e momento, colisões e etc.

Como sempre nesse curso, teremos que introduzir alguns conceitos matemáticos novos para vocês, que vocês somente verão em detalhe no fim do curso de cálculo :-) (integral de linha é cálculo II)

Vamos agora parar com o mimimi sobre a P_1 e começar esse novo bloco !

Bom, lembram da 2ª lei de Newton?

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{M} \vec{F}_i = m\vec{a}$$ sobre um dado corpo de massa m. (constante)

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Interessante, como vimos anteriormente, para determinar o vetor posição do corpo no qual atuam forças, precisávamos resolver a eq. diferencial (ou seja, achar o $\vec{r}(t)$ que satisfaz eq. dif.)

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = \underbrace{\vec{F}_R(\vec{r}(t), \vec{v}(t); t)}_{\text{em geral pode depender de todas as variáveis.}}$$

Isso na realidade são 3 equações (em geral) (não-lineares) (em geral) uma para cada componente de $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$.

Agora, imaginem que tenhamos várias partículas interagindo umas com as outras - digamos <u>N partículas</u>. Teríamos então $\vec{r}_n(t) \rightarrow n = 1, \ldots, N$ ou seja, teríamos que achar <u>3N funções</u> de $t \rightarrow x_n(t), y_n(t)$ e $z_n(t)$.

Como vocês devem ter visto na P_1, é muito mais fácil fazer contas com escalares (ou seja, números reais) do que com vetores.

Ao longo dos anos os físicos entenderam e conseguiram encontrar uma quantidade, um escalar, que em várias situações (quando somente houverem <u>forças chamadas conservativas</u>) possui o mesmo valor durante todo o movimento de um dado corpo (ou sistema com vários corpos). Nós chamamos essa grandeza de <u>energia</u>.

$E_{total} \rightarrow$ conservada no tempo, i.e.,

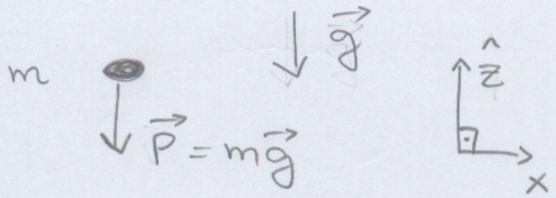
$$\boxed{\frac{dE_{total}}{dt} = 0.}$$

Existem, é claro, vários tipos de energia que você já deve ter ouvido falar: energia mecânica, energia química, energia elétrica e etc. Nessas aulas estaremos interessados apenas na energia mecânica e na sua conservação (ou não).

*De fato existem situações onde a energia mecânica não é conservada (existência de forças não conservativas, por exemplo atrito). Entretanto, a energia total é sempre conservada, embora um tipo de energia (exemplo, a energia mecânica) pode se transformar em outro tipo de energia (como por exemplo energia química).

(*) Vejam que interessante o seguinte: Imagine que uma dada partícula esteja se movendo de forma tal que o problema seja <u>efetivamente unidimensional</u>. Suponha que essa tal <u>energia mecânica</u> seja conservada. Esse problema envolve uma variável, digamos $\underline{x(t)}$. Agora, se sabemos que essa quantidade escalar, a <u>energia mecânica</u>, é conservada no tempo, temos esse $\underline{E_{mec}}$ e uma <u>variável</u> $(x(t))$. Fica claro então que sempre podemos resolver essa eq. dif. para $\underline{x(t)}$ (dizemos que resolvemos por quadratura). É por isso que vocês adoravam resolver os probleminhas da Fuvest de mov. unidimensional usando conser-vação de energia! Claramente facilita

Ex: Suponha que você tenha uma dada partícula (massa m) se movendo em queda livre na ação do campo gravitacional (despreze resistência do ar).



movimento unidimensional

Assim, tomarei $x(t) = x_0$ (cte) e assim existe dinâmica apenas em z.

2ª lei: $m\dfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{P}$

ou

$$\boxed{m\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -mg}$$

Qual a velocidade em z?

$V_y(t) = \dfrac{dz(t)}{dt}$, assim a 2ª lei é também escrita como

$$\boxed{m\frac{dV_y(t)}{dt} = -mg}$$

Multiplique tudo por $V_y(t)$. Obtemos

$$m V_y(t) \frac{dV(t)}{dt} = -mg V(t).$$

Agora, veja que $\frac{d}{dt}(v(t))^2 = 2\, v(t) \frac{dv(t)}{dt}$

Assim, temos do lado esquerdo

$$m\, v(t) \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\, v^2(t)}{2}\right)$$

. Também, veja que o lado direito é

$$-mg\, v(t) = -mg \frac{dz(t)}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(mg\, z(t)\right)$$

(lembre que m e g são constantes aqui nesse caso).

Assim, igualando o lado esquerdo com o direito, vemos que

$$\boxed{m \frac{dv(t)}{dt} = -mg} \xRightarrow[\text{em}]{\text{implica}} \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2(t)}{2}\right) = -\frac{d}{dt}\left(mgz(t)\right)$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{mv^2(t)}{2} + mg\,z(t)\right] = 0$$

Ok, vamos ver essa quantidade dentro dos colchetes. Essa quantidade (vocês já sabem que isso é a <u>energia mecânica</u> mas vamos manter o suspense) tem como unidade

$$\mathrm{Kg}\cdot\left(\frac{m}{s}\right)^2 \longrightarrow \text{Joule no } \underline{\text{SI}}$$

Essa quantidade, $\frac{mv^2(t)}{2} + mgz(t)$
(que possui unidade de energia)
tem <u>derivada zero</u> no tempo. Isto é, seja lá o que isso for, durante a queda livre da bolinha essa quantidade <u>não muda no tempo</u>.

(E_M)

$$\underbrace{\frac{mv^2(t)}{2}}_{\substack{\text{energia}\\ \text{cinética}\\ (T)}} + \underbrace{mgz(t)}_{\substack{\text{energia}\\ \text{potencial} \ (U)}} \Longrightarrow \underline{\text{Energia mecânica}}$$

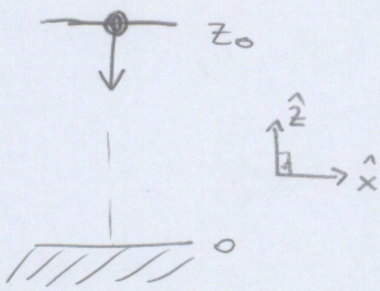
(nessa caso, energia potencial <u>gravitacional</u>)

(lembre que
eh é zero se

$$\Rightarrow E_M = T + U \Rightarrow \boxed{\frac{dE_M}{dt} = 0}$$

Nesse caso, suponha que a bolinha estivesse em repouso em z_0 em $t=0$. Ou seja

$$V(0) = 0 \quad (\text{repouso})$$



$$\underline{E_M = mgz_0} \quad \text{em } t=0$$

Quando a bola chego ao chão, onde $z(t_{final}) = 0$, vemos que

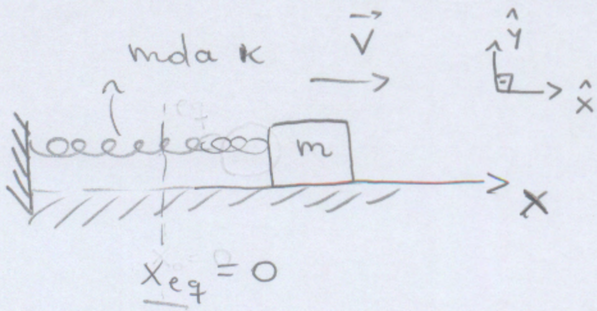
$$E_M = \frac{m v^2(t_{final})}{2}$$

. Mas E_M é constante no tempo assim, a velocidade com que a bola chego ao chão é

$$\frac{m}{2} V^2(t_{final}) = mgz_0 \Rightarrow V_{final} = \sqrt{2gz_0}$$

<u>vetor</u> velocidade $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{V}(t_{final}) = -\sqrt{2gz_0}\ \hat{z}}$

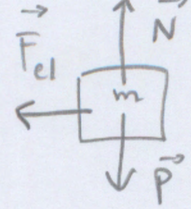
<u>Ex:</u>



Outro problema cuja dinâmica ocorre apenas em 1 dimensão

<u>Despreze atrito</u>.

$2^{\underline{a}}$ lei para o <u>bloco</u>.



(Lei de Hooke)

$$F_R = F_{el} = -K(x - \underbrace{x_{eq}}_{0}) = -Kx.$$

Daí, temos

$$\boxed{m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -K\,x(t)}$$

Será que podemos achar a E_M conservada?

Novamente, $m\frac{dv}{dt}(t) = -K\,x(t)$.

nesse caso $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

Multiplique ambos os lados por $v(t)$. Obtemos

$$m\,v(t)\frac{dv(t)}{dt} = -K\,x(t)\,v(t)$$

. Agora o lado <u>esquerdo</u>.

$$m\,v(t)\frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\,v(t)^2}{2}\right)$$

. E o lado direito?

Note que

$$-K\,x(t)\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{K\,x(t)^2}{2}\right)$$

certo?

Assim, igualando lado direito e esquerdo vemos que

$$\boxed{m\frac{dv}{dt}(t) = -Kx(t)} \xRightarrow[\text{implica}]{} \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2(t)}{2} + \frac{Kx^2(t)}{2}\right) = 0$$

$$\boxed{E_M = \underbrace{\frac{mv^2(t)}{2}}_{\substack{\text{energia (T)}\\ \text{cinética}}} + \underbrace{\frac{Kx^2(t)}{2}}_{\substack{\text{energia potencial (U)}\\ \text{(elástica, nesse caso).}}} = \text{cte no tempo}}$$

Notaram um padrão aqui?

$$\circledast \quad E_M = \underset{\text{(cinética)}}{T} + \underset{\text{(potencial)}}{U} = \underline{\underline{\text{cte}}}$$

$$T(t) = \frac{mv^2(t)}{2} \longrightarrow \text{não é cte no tempo!}$$

$$U(t) = \frac{Kx^2(t)}{2} \longrightarrow \text{não é cte no tempo!}$$

Mas <u>a soma sim</u>! Vemos claramente nesses exemplos que durante o movimento