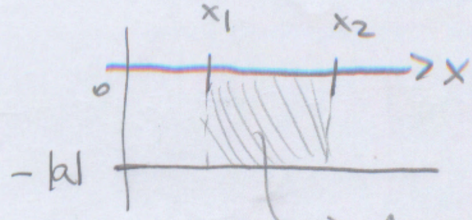
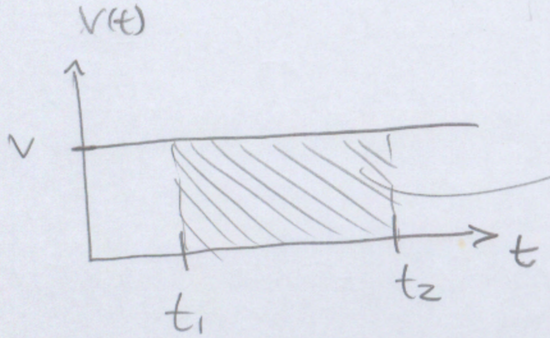
E se fosse $a < 0$



$\rightarrow A = -|a|(x_2 - x_1)$
(negativo)

Então a área "embaixo" da curva pode ser positiva ou negativa...

Ex: Física: Seja a função $v > 0$ e $v = \underline{cte}$ (MRU)



$A = v(t_2 - t_1)$

Essa área tem dimensão de distância.

De fato, essa é a distância percorrida durante $t_2 - t_1$ nesse MRU $\Rightarrow$ $\underline{\Delta x = v\,\Delta t}$

Agora, imagine que $V(t)$ é mais complicada
$\rightarrow$ velocidade instantânea
(Não é MRU)

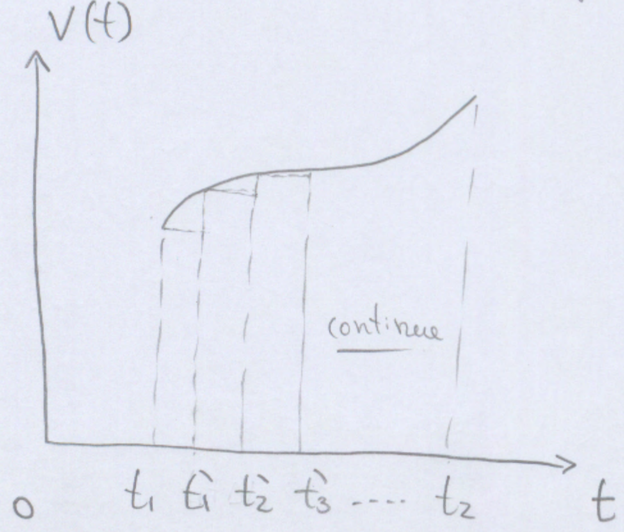
Como calculamos essa área embaixo da curva?

Seja lá como fizermos isso, o resultado te dará a distância percorrida durante $t_2 - t_1$.
(por análise dimensional)

Seguindo Riemann... Subdividimos o intervalo e fazemos retângulos

(mostrar gif)

$t_2 - t_1$



$t_1' = t_1 + \Delta t_1$

$t_2' = t_1' + \Delta t_2$

$t_3' = t_2' + \Delta t_3$ e etc

(Note que Δt_1 não precisa ser o mesmo que Δt_2 e etc)

No limite em que esses Δt_1, Δt_2, e etc forem muito pequenos, a velocidade variará muito pouco dentro de cada intervalo Δt_i. Vamos aproximar a velocidade nesse subintervalo como a velocidade no extremo esquerdo (poderia ser no extremo direito, não importa)

Então, a distância percorrida entre t_3' e t_1 será a soma da área dos retângulos

$$x(t_3') - x(t_1) \approx V(t_1)\Delta t_1 + V(t_1')\Delta t_2 + V(t_2')\Delta t_3$$

Se prosseguirmos até t_2 obteremos

→ aproximadamente

A soma se aproxima do resultado exato quanto menores forem as subdivisões Δt_i. Logo,

$$x(t_2) - x(t_1) = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i{}' \, v(t_i)\,\Delta t_i$$

= Área entre a curva $v \times t$ e o eixo t de t_1 e t_2.

(se o limite existir)

Esse limite é chamado integral definida de $v(t)$ de t_1 até t_2:

limite superior

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \underbrace{v(t)}_{\text{integrando}} = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i{}' \, v(t_i)\,\Delta t_i$$

limite inferior

(mostrar Vídeo-gif)

$\Rightarrow$ A velocidade é a derivada da posição e a posição é a integral da velocidade.

Ok, na prática, como você usa e calcula

Def: A antiderivada de uma função $f(x)$
(ou seja, sua derivada existe)
é uma função diferenciável $F(x)$ tal que

$F'(x) = f(x)$. Ex: Seja $f(x) = x^2$. Qual

a $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$? Resp: $F(x) = \frac{x^3}{3} + \underset{cte}{c}$

De fato, $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + c\right) = \frac{3x^2}{3} + 0 = x^2$!

Suponha que tenhamos $V(t) = \overset{cte}{a}t + \overset{cte}{V_0}$

Qual a anti-derivada (ou função primitiva)?

$x(t) \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = V(t) \Rightarrow x(t) = \underset{cte}{x_0} + V_0 t + \frac{at^2}{2}$

De fato, $\frac{dx(t)}{dt} = V_0 + at = V(t)$!

Agora você já sabe da onde vem a famosa fómula

Uma outra maneira de expressar F é

$$F(x) - F(a) = \int_a^x d\tilde{x}\, f(\tilde{x})$$ onde subentende-se que $F'(x) = f(x)$

Vocês verão mais sobre isso em cálculo I.

- Podemos então dizer que no movimento unidimensional

$x(t) \rightarrow$ posição , $v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \rightarrow$ velocidade instantânea

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \underbrace{\frac{d^2x(t)}{dt^2}}_{\text{notação}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)$$ então,

derivada segunda

aceleração instantânea

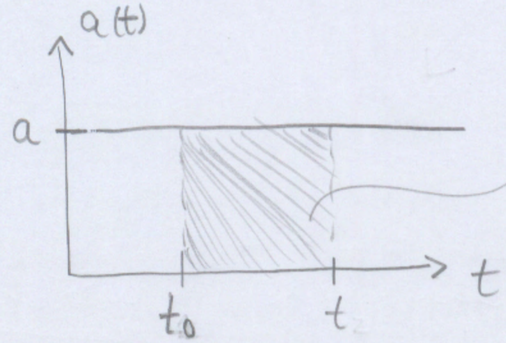
$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, v(t).$$ e analogamente

t_2

Movimento Retilíneo Uniformemente Acelerado

Definido por: $\boxed{\frac{dV(t)}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}X(t) = a = \underline{\text{constante}}}$

Nesse caso,



Área $\Downarrow$

$$V(t) - V(t_0) = \int_{t_0}^{t} a \, d\tilde{t}$$

variável muda (ou de integração)

$$= a(t - t_0)$$

Então,

$\Longrightarrow$ $\boxed{V(t) = V(t_0) + a(t - t_0)}$ → linha reta $V \times t$

Agora, como encontramos a distância percorrida entre t_0 e t?

(*) Na integral definida todas as constantes de integração já estão definidas.

$$X(t) - X(t_0) = \int_{t_0}^{t} d\tilde{t} \, v(\tilde{t})$$

→ Qual a função de t cuja derivada dá $v(t)$? Já vimos isso...

$$X(t) - X(t_0) = V(t_0)t + \frac{at^2}{2}$$

$$\boxed{X(t) = X(t_0) + V(t_0)t + \frac{at^2}{2}}$$

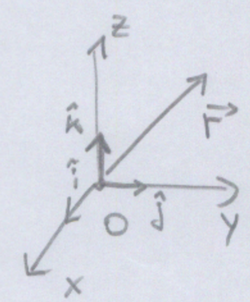
(*) No movimento retilíneo uniformemente acelerado, a aceleração = cte, ou seja, a aceleração instantânea = aceleração média.

Movimento uniformemente acelerado

(Notação vetorial).

Lembrem que a posição de um corpo com respeito a um dado sistema de referência é um vetor que varia no tempo:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k}$$



A velocidade é um vetor também, dado por

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\,\hat{\jmath} + \frac{dz(t)}{dt}\,\hat{k}$$

ou $\vec{v}(t) = V_x(t)\,\hat{\imath} + V_y(t)\,\hat{\jmath} + V_z(t)\,\hat{k}$

Aceleração, por sua vez

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{dV_x(t)}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{dV_y(t)}{dt}\,\hat{\jmath} + \frac{dV_z(t)}{dt}\,\hat{k}$$

Ou,

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\,\hat{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\,\hat{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\,\hat{k}$$

Isso é claro para um caso geral.

O <u>Movimento uniformemente acelerado</u> é definido por

$$\vec{a}(t) = \vec{a} = \underline{\underline{\vec{Cte}}} \longrightarrow \text{vetor constante!}$$

Isto é, $\frac{d\vec{a}}{dt} = 0$.

Analogamente, <u>nesse caso</u>

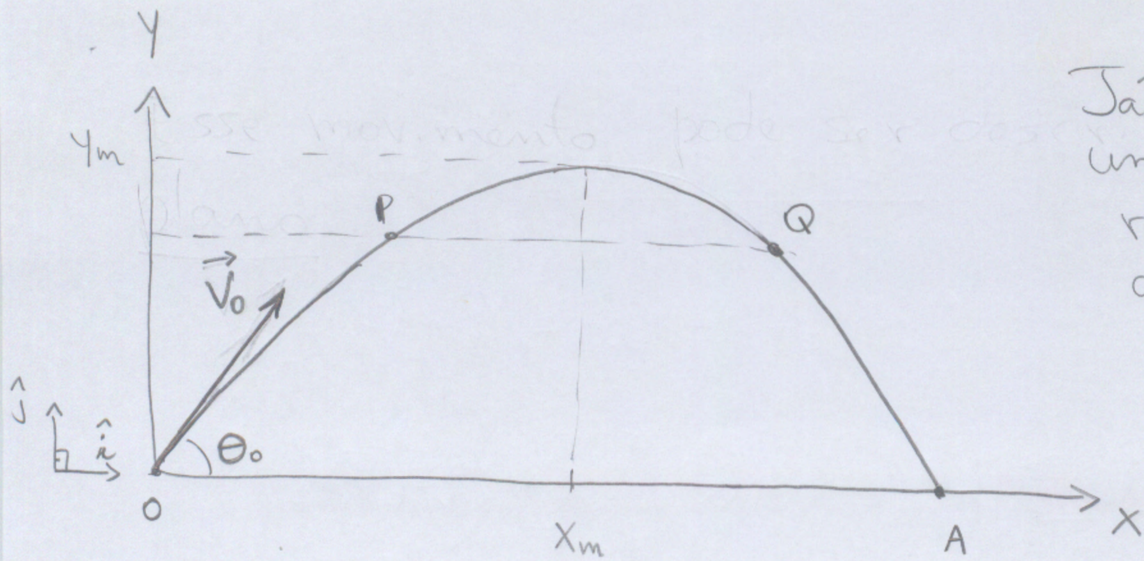
$$\vec{V}(t) = \vec{V}(t_0) + \vec{a}\,(t - t_0)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{V}(t_0)(t - t_0) + \frac{\vec{a}}{2}(t - t_0)^2$$

onde $\vec{r}_0 \equiv \vec{r}(t_0)$ e $\vec{V}_0 \equiv \vec{V}(t_0)$ são constantes que definem a condição inicial para a trajetória da partícula.

Ex: Movimento balístico {(demonstração do trem) + Exp. martelo

$\Rightarrow$ Movimento de projéteis na vizinhança da superfície da Terra. Em geral, para distâncias e alturas pequenas com relação à curvatura da Terra, considera-se a Terra como plana e a aceleração da gravidade como constante (isso não é uma boa aproximação para foguetes intercontinentais).



Já que isso é um movimento retilíneo uniforme a trajetória é uma parábola

($\sin\theta_0 > 0$)

Aceleração da gravidade (de acordo com nossa escolha de ref.) é

(Não tem componente em x)

$$\vec{g} = -g\,\hat{j} \quad , \quad g = 9.8\ \frac{m}{s^2}$$

$\hookrightarrow$ essa é a aceleração constante !

- $\vec{V}_0$ é a velocidade do projétil no instante de lançamento $\boxed{t_0 = 0}$. Posição inicial é $\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = 0$.

- Note que, $\vec{V}_0 = V_0 \cos(\theta_0)\,\hat{i} + V_0 \,\text{sen}(\theta_0)\,\hat{j}$ ou

$$\vec{V}_0 = V_0^{(x)}\,\hat{i} + V_0^{(y)}\,\hat{j}.$$

- Não existe aceleração no eixo x. Assim a velocidade do projétil no eixo x é <u>cte</u>

$$\boxed{V_x = V_0 \cos(\theta_0)} \Longrightarrow \text{Mesmo } \forall t. \text{ É MRU no eixo x.}$$

para todo

- No eixo y, o movimento é retilíneo uniformemente acelerado.

Em geral $\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{g}t$

$$\boxed{V_y(t) = V_0 \,\text{sen}(\theta_0) - gt}$$

Podemos escrever o vetor velocidade $\vec{V}(t)$ como

$$\vec{V}(t) = V_0 \cos(\theta_0)\,\hat{i} + \left(V_0 \,\text{sen}(\theta_0) - gt\right)\hat{j}.$$

E o vetor posição?

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2} = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$$

Decompondo no eixo x: $\underline{\vec{r}_0 = 0}$

Lembre que $\vec{g} = -g\hat{j}$.

$$\hat{i} \cdot \vec{r}(t) = x(t) = V_0 \cos(\theta_0)\, t$$

Decompondo no eixo y:

$$\hat{j} \cdot \vec{r}(t) = y(t) = V_0 \operatorname{sen}(\theta_0)\, t - \frac{gt^2}{2}$$, Assim

$$\boxed{\vec{r}(t) = V_0 \cos(\theta_0)\, t\, \hat{i} + \left(V_0 \operatorname{sen}(\theta_0)\, t - \frac{gt^2}{2}\right)\hat{j}}$$

Com isso, você sabe tudo sobre o movimento!

Note que:

- $\vec{r}_0$ e $\vec{v}_0$ são as condições iniciais em $\underline{t_0 = 0}$.

- Movimento é tal que na direção x é MRU (aceleração = 0) enquanto em y ele é uniformemente acelerado.

Vamos ver algumas outras características desse movimento:

$$\theta_0 \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$$
$$sen(\theta_0) > 0$$

$$x(t) = V_0 \cos(\theta_0)\, t \Rightarrow t = \frac{x(t)}{V_0 \cos(\theta_0)}$$

Como $y(t) = V_0 sen(\theta_0) t - \frac{gt^2}{2}$ então

$$y(t) = V_0 sen(\theta_0)\left(\frac{x(t)}{V_0 \cos(\theta_0)}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{x(t)}{V_0 \cos(\theta_0)}\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \tan(\theta_0)\, x - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2\theta_0}}$$

Essa é a equação da trajetória !

Na altura máxima y_m a velocidade em y se anula, e isso ocorre no instante t_m

$$V_y(t_m) = 0 = V_0 sen(\theta_0) - g t_m \Rightarrow t_m = \frac{V_0 sen\theta_0}{g}$$

Usando isso para encontrar a altura máxima

$$y_m = y(t_m) = V_0 \operatorname{sen}(\theta_0) t_m - g \frac{t_m^2}{2}$$

$$y_m = V_0 \operatorname{sen}(\theta_0) \left(\frac{V_0 \operatorname{sen}\theta_0}{g} \right) - \frac{g}{2} \left(\frac{V_0 \operatorname{sen}\theta_0}{g} \right)^2$$

$$\boxed{y_m = \frac{V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta_0}{2g}}$$

Quanto tempo leva para o projétil atingir o solo? $t_f \Rightarrow y(t_f) = 0$

$$y(t_f) = 0 = V_0 \operatorname{sen}(\theta_0) t_f - g \frac{t_f^2}{2} \rightarrow \text{eq. do 2º grau}$$

$$t_f = -\frac{V_0 \operatorname{sen}(\theta_0) \pm \sqrt{V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta_0}}{(-g)} = \begin{cases} t_f = 0 & \text{(óbvio pois no lançamento } t_f = t_0 = 0) \\ t_f = \dfrac{2 V_0 \operatorname{sen}\theta_0}{g} = 2 t_m \end{cases}$$

$\operatorname{sen}(\theta_0) > 0$

Com qual velocidade o projétil atinge o solo?

$$\vec{V}(t_f) = V_0 \cos(\theta_0) \hat{i} + \left(V_0 \operatorname{sen}(\theta_0) - g t_f \right) \hat{j}$$

$$\vec{V}(t_f) = V_0 \cos(\theta_0)\hat{\imath} + \left(V_0 \operatorname{sen}(\theta_0) - g\, 2\frac{V_0 \operatorname{sen}\theta_0}{g}\right)\hat{\jmath}$$

$$\vec{V}(t_f) = V_0 \cos(\theta_0)\hat{\imath} - V_0 \operatorname{sen}(\theta_0)\hat{\jmath}$$

---

ou seja, ele atinge o solo com uma velocidade em y oposta à inicial V_0.

Note que $|\vec{V}_0| = |\vec{V}(t_f)| = V_0$. Isso é uma manifestação da conservação da energia mecânica nesse problema.

– Trajetória é simétrica com respeito à X_m.
Note que $V_y\hat{\jmath}$ em P é $-V_y\hat{\jmath}$ em Q.

Aonde o projétil atinge o solo? Ponto A no eixo X.

$$X(t_f) = A = V_0 \cos(\theta_0)\frac{2V_0 \operatorname{sen}(\theta_0)}{g}$$ ou seja

Distância percorrida em X

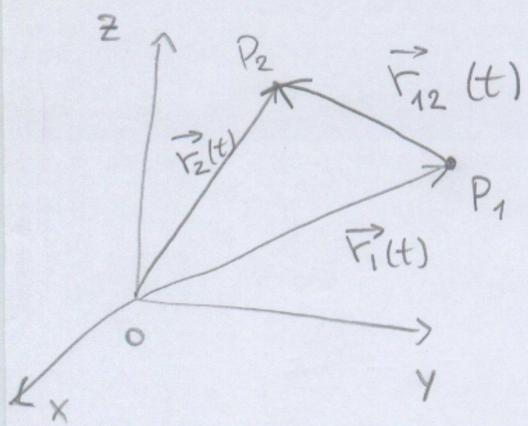
$$\boxed{A = \frac{V_0^2}{g}\operatorname{sen}(2\theta_0)}$$

$\operatorname{sen}(2\theta_0) = 2\operatorname{sen}\theta_0 \cos\theta_0$.

Assim, vemos que a máxima distância será quando $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$. Até Galileu sabia disso ☺.

⊛ Claro, desconsideramos a resistência do ar e etc aqui. O tratamento feito aqui é portanto idealizado mas ainda é uma boa aproximação para os casos de interesse nesse curso.

Velocidade Relativa



$$\vec{r}_{12}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$$

↳ deslocamento relativo.
(como um observador em P_1 vê P_2).

Tomando a derivada ...

$$\frac{d}{dt}\vec{r}_{12}(t) = \vec{V}_{12}(t) = \frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} - \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} = \vec{V}_2(t) - \vec{V}_1(t)$$