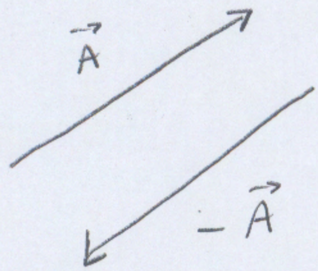
Negativo de um vetor

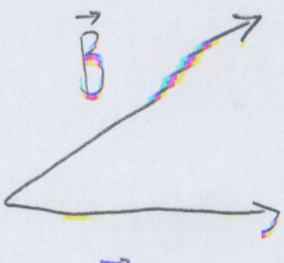


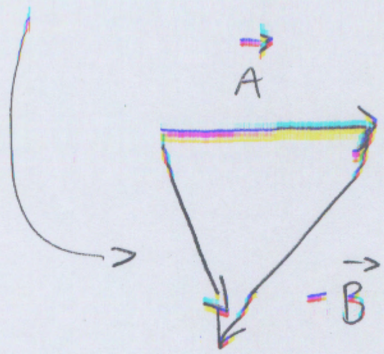
- Mesma magnitude
- sentido oposto

$$\vec{A} + (-\vec{A}) = 0$$

Assim, a subtração de dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é definida como a soma de $\vec{A}$ e $-\vec{B}$.

$$\vec{C} = \vec{A} + (-\vec{B})$$





Multiplicação por um escalar

$\vec{A}$ $\rightarrow$ $3\vec{A}$ $\rightarrow$ Multiplica-se a magnitude mas direção e sentido

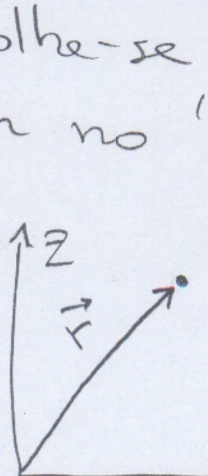
Até agora tratamos apenas do vetor de forma geométrica. Agora vamos ver como tratá-los de forma algébrica.

Embora uma base (ou aqui, um sistema de eixos não seja estritamente necessária para definir o vetor, pode ser bastante conveniente decompor um vetor em suas componentes!

Componentes de um vetor

- Um vetor fica completamente determinado uma vez que você especifica suas componentes numa dada base.

- Escolhe-se o sistema de coordenadas com a origem no "pé" do vetor.

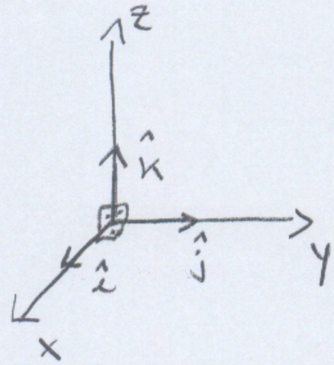


$P(x,y,z) \rightarrow$ ponto arbitrário com coordenadas x,y,z em $\mathbb{R}^3$.

$\vec{r} \rightarrow$ vetor posição da origem

(também conhecidos como versores)

Vetores unitários (base cartesiana)

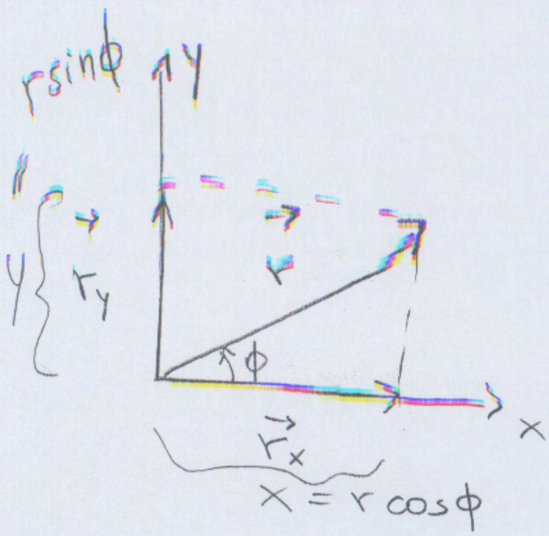


$\rightarrow$ $\hat{k}, \hat{i}, \hat{j}$ $\rightarrow$ vetores apontando na direção dos eixos, todos com magnitude 1. (sem dimensão)

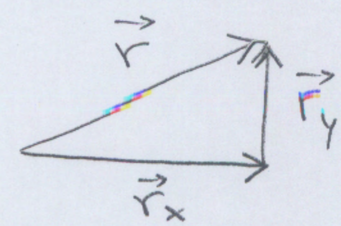
São perpendiculares entre si.

Qualquer vetor no espaço pode ser escrito em termos desses vetores unitários.

Ex: No plano xy



$\rightarrow$ $\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y$

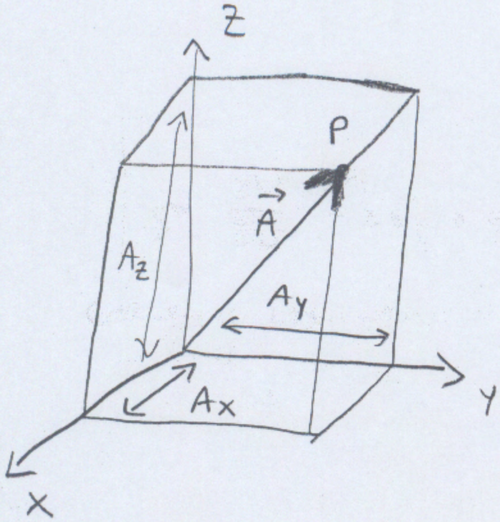


$\vec{r}_x = x\,\hat{i} = r\cos\phi\,\hat{i}$, $\vec{r}_y = y\,\hat{j} = r\sin\phi\,\hat{j}$

Então, $\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$, $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2}$

ou $\vec{r} = r\cos\phi\,\hat{i} + r\sin\phi\,\hat{j}$ $\boxed{\tan\phi = \dfrac{y}{x}}$

Para um vetor arbitrário $\vec{A}$ com componentes (A_x, A_y, A_z) na base $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$



$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

(~anda A_x na direção x, A_y na direção y e A_z na direção z).

Soma de vetores (forma algébrica)

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}.$$

Multiplicação por escalar: $\alpha \vec{A} = \alpha A_x \hat{i} + \alpha A_y \hat{j} + \alpha A_z \hat{k}$.

Fica fácil agora generalizar soma de vetores envolvendo número arbitrário deles

$$\vec{S} = \sum^{N} \vec{A} = \left(\sum^{N} A^x\right)\hat{i} + \left(\sum^{N} A^y\right)\hat{j} + \left(\sum^{N} A^z\right)\hat{k}$$

Desafio: Suponha que você viva em um espaço com D dimensões espaciais (ou que a grandeza que "viva" você esteja trabalhando). Que forma de tratar vetores você usaria: geométrica ou algébrica?

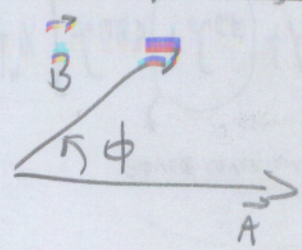
Produto escalar (ou interno)

(essa operação leva 2 vetores em um escalar)

Vetores: $\vec{A}$ e $\vec{B}$

Define a operação

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\phi$$

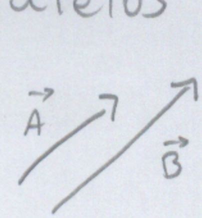


$$= \vec{B}\cdot\vec{A}$$, claramente.

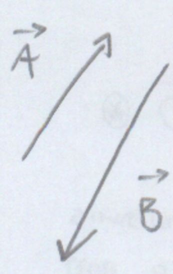
(ordem não importa)

Casos interessantes: Para vetores paralelos

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \geq 0$$



Antiparalelos:



$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\underbrace{\cos\pi}_{-1} = -|\vec{A}||\vec{B}| \leq 0.$$

Claramente, para os vetores unitários

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{i}\cdot\hat{k} = \hat{j}\cdot\hat{k} = 0$$

<u>Propriedade distributiva é válida:</u>

$$(\vec{C}+\vec{D})\cdot\vec{E} = \vec{C}\cdot\vec{E} + \vec{D}\cdot\vec{E}$$

Agora, dado $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$
$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ quanto vale $\vec{A}\cdot\vec{B}$?

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad //$$

Além disso, o que seria $\underbrace{\hat{j}\cdot\vec{A}}_{A_y}$?

$$\hat{j}\cdot\vec{A} = \vec{A}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) = A_y$$

ou seja $\hat{j}\cdot\vec{A}$ lhe dá a componente de $\vec{A}$ na direção y (raciocínio análogo para obter A_x e A_y).

(ou projeção de $\vec{A}$ na [illegible])

(*) Produto escalar vai ser usado no conceito de trabalho.

Ex: $\vec{A} = 3\hat{i} + 20\hat{k} \rightarrow A_x = 3,\ A_y = 0,\ A_z = 20$

$\vec{B} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 8\hat{k} \rightarrow B_x = -1,\ B_y = 2,\ B_z = 8$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (3).(-1) + (0).(2) + (20).(8)$$

$$= -3 + 160 = 157$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{9 + 400} = \sqrt{409}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{1 + 4 + 64} = \sqrt{69}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\phi \Rightarrow \cos\phi = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\,|\vec{B}|} = \frac{157}{\sqrt{409}\,\sqrt{69}}$$

$$\cos\phi = 0.9346 \rightarrow \phi = 0.3637\,\pi \text{ rad}$$

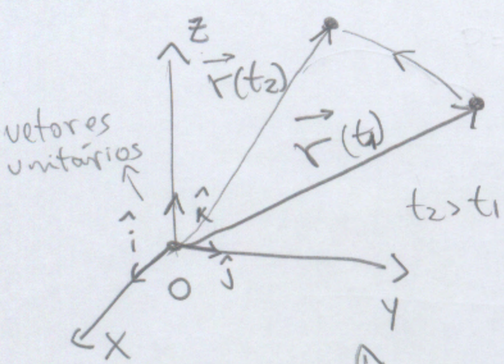
(essa idéia aqui é útil para o cálculo do ângulo entre vetores)

Feita nossa digressão matemática, vamos voltar a física... (boa hora

Bom, agora que já sabemos tudo sobre vetores podemos definir matematicamente o que seria a <u>trajetória de uma partícula</u>: Imagine

que você definiu o sistema de referência e por conseguinte, o vetor posição da partícula.

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k}$$



Suponha que você pudesse "pintar" de vermelho cada ponto do espaço pelo qual a partícula passou. Essa "linha vermelha" no espaço seria a trajetória da partícula.

Agora, caso alguém somente lhe dê a posição da partícula num tempo t_1, $\vec{r}(t_1)$, você saberá o $\vec{r}(t_1 + \Delta t)$? <u>Não</u>, você precisa saber também a <u>velocidade $\vec{v}(t)$</u>

(para saber para onde a partícula está

Velocidade → Fundamental na descrição do movimento.

- Você já sabe, por exemplo, que a magnitude da velocidade de um carro pode ser medida em Km/h ou milhas/hora. Isso já indica que a velocidade é algo que se obtem ao se dividir $\frac{\text{distância}}{\text{tempo}}$.

- Claramente, não existem nomes especiais para as unidades de velocidade (tirando o nó, claro). Usamos basicamente $\frac{\text{unidade de distância}}{\text{unidade de tempo}}$. Entretanto, note que podemos definir velocidade em termos da velocidade da luz no vácuo $c \simeq 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$. Não faremos isso aqui...

- Seguindo o que vocês viram no Colegial, a medição da velocidade requer pelo menos duas medições do vetor posição do objeto e as duas medições correspondentes de tempo.

Medição 1

$\vec{r}_1 \equiv \vec{r}(t_1)$

em t_1

$(\vec{r}_1, t_1)$

Medição 2

$\vec{r}_2 \equiv \vec{r}(t_2)$

em t_2

$(\vec{r}_2, t_2)$

$t_1 \neq t_2$

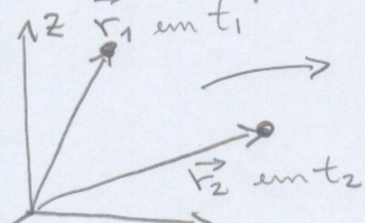
<u>Velocidade média</u>: $\boxed{\vec{V}_m = \dfrac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}}$

⊛ Note que $\vec{V}_m$ é vetor $\Rightarrow$ $\vec{V}_m = V_m^x \hat{\imath} + V_m^y \hat{\jmath} + V_m^z \hat{k}$

(decompõe-se na base cartesiana) (fazer com detalhe)

⊛ Agora, isso não é muito útil às vezes...
(<u>piada do Feynman</u>) ☺

Suponha que tenhamos



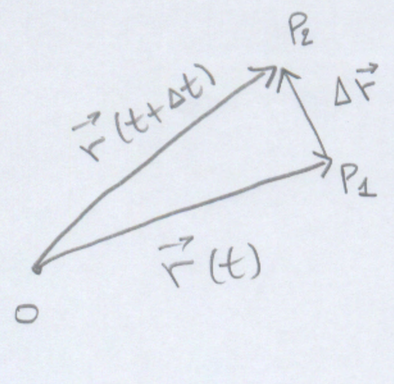
se eu lhe der $\vec{V}_m$, será que você sabe qual foi a trajetória da partícula de $(\vec{r}_1, t_1)$

$\boxed{\text{NÃO}}$ Pois existe um número infinito de trajetórias (possíveis) entre $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ que dão o mesmo $\vec{v}_m$.

Precisamos de algo chamado velocidade instantânea (ou, simplesmente, a velocidade).

Conceito de Velocidade instantânea

Suponha que você saiba $\vec{r}(t)$ e que depois um tempo Δt, a partícula está em $\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta\vec{r}$



Veja agora a quantidade

$$\frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Assuma que a trajetória da partícula seja bem definida.
(contínua)

O que acontece quando diminuímos Δt?

$$\frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

(se $\Delta t = 0$, $\Delta \vec{r} = 0$)

Com certeza, $\Delta \vec{r}$ diminuirá também.

O que acontece quando tomamos Δt tão pequeno quanto se queira? Claramente $\frac{1}{\Delta t}$ fica cada vez maior e maior. Agora, será que Δt tendendo a zero, ou seja, Δt tão próximo de zero quanto se queira, necessariamente implica em dizer que

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \longrightarrow \infty$$ (perde o sentido tudo)?

Não, se quando $\Delta t \to 0$, $\Delta \vec{r} \longrightarrow \vec{v}(t)\,\Delta t$ (finito; vetor)

ou seja

No limite em que $\Delta t \to 0$ (tende a zero) se

$\Delta \vec{r} \longrightarrow \vec{v}(t)\Delta t$ (tende à) então

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}\,\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}} = \vec{v}(t)$$

Vetor com componentes finitos

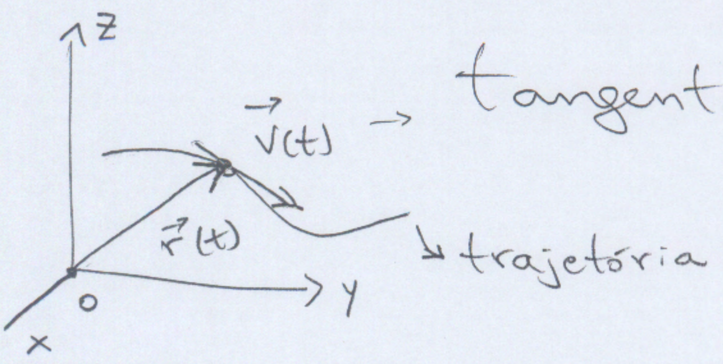
(Se você entende isso, já sabe mais matemática que os gregos antigos)

Esse limite acima define $\underline{\vec{v}(t)}$, ou o

<u>Vetor velocidade</u> no instante t.

(note que para um movimento geral, se $t_1 \neq t_2$, $\vec{v}(t_1) \neq \vec{v}(t_2)$)

* Se o movimento for retilíneo uniforme $\vec{v}(t) = \vec{v}_m = \underline{\vec{cte}}$ independente de t.
* <u>MRU $\to$ $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t$, $\vec{v}$ constante!</u>
* <u>A representação geométrica de $\vec{v}(t)$</u>

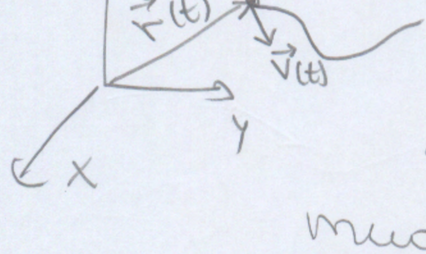


$\to$ tangente da trajetória no ponto.

(*) Matematicamente, para a descrição de uma linha no espaço (aqui, fisicamente, a trajetória da partícula), se sabemos o vetor posição e velocidade em um dado t, deveremos ser capazes de calcular toda a trajetória da partícula (tanto para frente quanto para trás no tempo?)

(*) <u>A cinemática</u> lhe diz como descrever essas quantidades. A <u>dinâmica</u>, que veremos depois, tratará das "leis" que "governam" ou determinam a trajetória da partícula (dada as condições iniciais de $\vec{r}(t_0)$ e $\vec{v}(t_0)$).

(*) Vejam que interessante. Numa dada trajetória de uma partícula, veja que a variação do vetor posição no tempo definiu a velocidade (usando aquele limite). Veja que a tangente dessa curva muda em vários pontos. Ou seja,



$\vec{v}$ [illegible]

Definimos:

Aceleração (instantânea)

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t}$$

⊛ Veremos mais sobre $\vec{a}(t)$ na outra aula.

— × — × —

O estudante que possui um "senso" mais matemático poderia ficar um pouco inquieto com o uso de limites assim, de forma intuitiva porém não rigorosa.

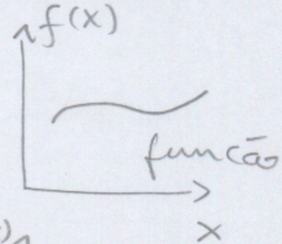
De fato, esse aluno (ou aluna) poderia dizer:

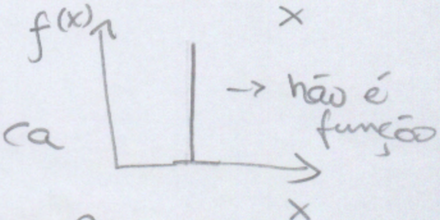
Então $\vec{V}(t)$ é a derivada do vetor $\vec{r}(t)$

A resposta é sim. Para satisfazer esse aluno, vamos agora adiantar (ou revisar) um pouco sobre o conceito de limites e derivadas de uma função de uma variável (que vocês verão com todo

Definição de Limite

Maneira informal: Seja $f(x)$ uma função de x (lembram o que é função?)





Função $f(x) \to$ operação matemática que leva um número real $x \in \mathbb{R}$ em outro número real $y = f(x) \in \mathbb{R}$.

googol ☺

Ex: $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^{10^{100}}$

Dizer que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ↳ finito

Significa: O valor de f se torna tão próximo do número L quão próximo do valor "a" x estiver.

Ou seja, se $x \to a$ então $f \to L$.

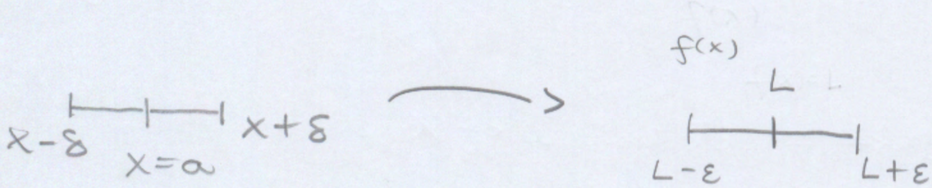
<u>Definição formal:</u> Seja $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ números reais muito pequenos (reais, positivos com valor muito próximo de zero). Seja $f(x)$ definida num intervalo que contém a. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = \underset{\text{finito!}}{\overset{f(a)}{\overset{\shortparallel}{L}}} \quad \text{se}$$

$$\forall \delta \ll 1, \ \exists \varepsilon \ll 1 \ \text{tal que} \ \forall x \ \text{no qual}$$

$$0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon .$$

Ou seja, para que o limite exista, (L é finito) temos que ser capazes de mostrar que se pegarmos valores de x numa pequena janela de tamanho δ centrada em $x=a$, o valor de $f(x)$ fica definido numa outra pequena janela de largura ε ao redor de L.



Ex: Prove que $\lim\limits_{\underset{a}{x \to 3}} \overbrace{2x+4}^{f(x)} = \overbrace{10}^{L}$ $\quad \delta << 1$

Prova: Temos que provar que se $0 < |x-3| < \delta$

existe um $\varepsilon << 1$ tal que $|(2x+4)-10| < \varepsilon$

Bom, ~~Assume~~ $\cancel{|(2x+4)-10| < \varepsilon}$

$\cancel{|2x-6| < \varepsilon \Rightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{2}}$

~~Ok, então se fizermos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ deve funcionar.~~

De foto, ~~ou seja~~

$0 < |x-3| < \delta$ $\qquad$ Multiplica tudo por 2

$0 < 2|x-3| < 2\delta$

ou seja $0 < |2x-6| < 2\delta$ ou

$0 < |2x+4-10| < \underbrace{2\delta}_{\equiv \varepsilon}$. Eu falei: quanto vale ε? Não

Então, $\forall \delta << 1$, $\exists \varepsilon << 1$ tal que $|f(x)-L| < \varepsilon$ quando

$0 < |x-a| < \delta$.

(*) Vocês verão vários exemplos