7

Programação Linear

Autores: Luiz J. Corrar
Carlos Renato Theóphilo
Daniel Reed Bergmann

Objetivos de Aprendizado
O estudo deste capítulo permitirá ao leitor:

- compreender os fundamentos de Programação Linear (PL);
- entender o processo de resolução dos problemas de PL com emprego dos métodos gráfico, matricial, simplex e computacional;
- reconhecer situações nas áreas de Controladoria e Finanças passíveis de aplicação de PL;
- resolver problemas de PL e efetuar a análise dos resultados encontrados.

1 INTRODUÇÃO

Diversas decisões tomadas no dia-a-dia das empresas dizem respeito a qual combinação de recursos produz o resultado ótimo, como: Qual deve ser o *mix* de produtos a serem fabricados de forma a atingir a maior margem de contribuição total? Qual a combinação de investimentos que maximiza o retorno de uma carteira? Qual composição de insumos em uma mistura corresponde ao custo mínimo?

As empresas utilizam recursos para produzir bens e serviços. Os recursos são escassos. Daí por que, ao buscarem otimizar a alocação dos recursos, visando produzir o melhor resultado, as empresas devem levar em conta as limitações ou restrições existentes.

A Programação Linear é um dos mais importantes instrumentos do campo da Pesquisa Operacional – área do conhecimento que fornece um conjunto de procedimentos voltados para tratar problemas que envolvem a escassez de recursos. São passíveis de solução com o emprego de PL os problemas nos quais se busca a melhor alocação de recursos, de forma a atingir determinado objetivo de otimização, atendendo a determinadas restrições. Essas limitações podem referir-se ao montante ou à forma de distribuição dos recursos.

Diversos tipos de problemas em Contabilidade e Finanças podem ser modelados para resolução com aplicação de Programação Linear, tais como: decisões de investimento, fluxos de caixa, orçamentos de capital, *mix* de produção, organização de transportes, políticas de estoques etc.

Como o próprio nome indica, as relações matemáticas dos problemas de PL devem ser lineares. Embora muitos dos problemas do mundo de negócios tenham um comportamento de não-linearidade, é certo afirmar que muitos deles podem ser tratados com emprego da Programação Linear, com razoável nível de aproximação.

BREVE HISTÓRICO

A Programação Linear foi desenvolvida conceitualmente após a Segunda Guerra Mundial, pelo soviético Kolmogorov, com o objetivo de resolver problemas de logística militares. A primeira aplicação de PL foi feita em 1945, por Stigler em um problema referente à composição de uma mistura.

O grande marco na evolução dos estudos de PL, contudo, ocorreu em 1947, com o desenvolvimento pelo jovem matemático Dantzig do método que denominou "método simplex". Dantzig, matemático da força aérea e em contato com questões relacionadas à logística, percebeu que problemas que envolviam limitação de recursos podiam ser resolvidos por meio de uma sistemática de busca de solução ótima entre um conjunto de possíveis soluções.

O rápido avanço dos computadores fez com que a Programação Linear passasse a ser utilizada como ferramenta de gestão empresarial. Tanto que o russo Kantorovich ganhou o Prêmio Nobel em Economia pelo desenvolvimento de conceitos de planejamento ótimo.

Mais recentemente, em 1984, Karmakar desenvolveu um algoritmo que se tem mostrado superior ao simplex para a resolução de problemas extremamente grandes. Contudo, o método simplex continua sendo o mais utilizado nos dias de hoje, inclusive como base lógica das planilhas eletrônicas.

2 PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Para iniciarmos o estudo dos problemas de Programação Linear, consideremos o exemplo a seguir. Embora simples, o exemplo permite que se possa apresentar a lógica inerente à solução dos problemas de PL.

A Indústria Maximóveis fabrica dois tipos de produtos: cadeiras e mesas. Os produtos apresentam as seguintes margens de contribuição por unidade:

Tabela 7.1 *Margens de contribuição unitárias dos produtos.*

Produto	Margem de Contribuição por Unidade ($)
Cadeiras	10
Mesas	8

Os produtos são processados por dois departamentos: montagem e acabamento. Ao passar por esses departamentos, cada unidade do produto consome determinado número de horas, conforme indicado na Tabela 7.2:

Tabela 7.2 *Consumo de tempo nos departamentos.*

Departamento	Consumo de horas pelos produtos (em un.)	
	Cadeiras	Mesas
Montagem	3	3
Acabamento	6	3

Os departamentos apresentam, contudo, limitação em sua capacidade produtiva, como mostra a Tabela 7.3:

Tabela 7.3 *Capacidade produtiva dos departamentos.*

Departamento	Capacidade máxima disponível em horas
Montagem	30
Acabamento	48

Desejamos saber qual é a melhor combinação possível de cadeiras e mesas a serem produzidas, de forma a obter a maior margem de contribuição total.

Os problemas de programação linear caracterizam-se por apresentar três elementos fundamentais. O raciocínio aqui empregado, com vistas à identificação desses elementos e à resolução do exemplo, é válido para os problemas de PL em geral.

Visando facilitar a identificação dos elementos fundamentais do caso da Indústria Maximóveis, o problema pode ser enunciado, sinteticamente, como: Quais quantidades de cadeiras e de mesas devem ser produzidas, de forma a obter a maior margem de contribuição possível, consideradas as limitações de capacidade dos departamentos de montagem e de acabamento?

O primeiro elemento fundamental a ser identificado são as *variáveis de decisão*. As variáveis de decisão referem-se às decisões a serem tomadas, visando encontrar a solução do problema. Em nosso exemplo, desejamos identificar quais quantidades de cadeiras e de mesas devem ser produzidas. Essas são, portanto, as variáveis de decisão do problema, as quais representaremos por C e M, respectivamente.

O segundo elemento a ser definido é a *função-objetivo* do problema. A função-objetivo é uma expressão matemática por meio da qual relacionamos as variáveis de decisão e o objetivo a ser atingido. Em nosso exemplo, o que objetivamos é maximizar a margem de contribuição total, produzindo o melhor *mix* possível de cadeiras (C) e mesas (M). Os produtos têm margens de contribuição unitárias de $ 10 e de $ 8, respectivamente. Assim, a função-objetivo do problema é expressa como:

$$\text{Maximizar MCT} = 10\,C + 8\,M$$

As *restrições* são o terceiro elemento fundamental dos problemas de PL. As restrições são limitações impostas sobre os possíveis valores que podem ser assumidos pelas variáveis de decisão. Em nosso exemplo, as limitações na capacidade dos departamentos de montagem e de acabamento representam as restrições às quantidades dos produtos a serem fabricados. O departamento de montagem tem sua capacidade limitada a 30 horas. Para produzir uma cadeira, são consumidas três horas desse departamento; cada mesa também consome três horas. Assim, a função matemática que expressa a restrição do departamento de montagem é:

$$3C + 3M \leq 30$$

Essa inequação indica que a produção de cadeiras e de mesas não pode exceder a capacidade do departamento de montagem. Seguindo o mesmo raciocínio, obtemos a seguinte expressão para o departamento de acabamento:

$$6C + 3M \leq 48$$

É importante verificar, ainda, se existem restrições que incidem diretamente sobre as variáveis de decisão. No caso de nosso exemplo, as quantidades de ca-

deiras e de mesas a serem produzidas não podem, logicamente, ser negativas. Por essa razão, acrescentamos as seguintes restrições:

$$C \geq 0$$
$$M \geq 0$$

Identificados os três elementos fundamentais, podemos definir o modelo completo do problema da seguinte forma:

Modelo Completo do problema Indústria Maximóveis

Encontrar os valores para as variáveis de decisão C e M, de forma a maximizar a função-objetivo MCT = 10 C + 8 M, respeitadas as seguintes restrições:

$$3C + 3M \leq 30$$
$$6C + 3M \leq 48$$
$$C \geq 0;\ M \geq 0$$

O modelo matemático dos problemas de Programação Linear pode ser expresso em termos gerais, como:

Encontrar as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$,

de forma a otimizar a função-objetivo $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n$

(onde c_j = coeficiente de margem de contribuição, custos etc., para a j-ésima variável), respeitando as restrições:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

Assim, para n variáveis decisórias, as restrições exigem a definição de dois termos gerais:

a_{ij} = coeficiente da j-ésima variável na i-ésima restrição

b_i = limitação da capacidade da i-ésima restrição

A evolução dos computadores simplificou bastante a resolução dos diversos tipos de problemas que envolvem a pesquisa operacional. Hoje, problemas

6 SOLUÇÃO COMPUTACIONAL

A solução de problemas de PL por meio da solução computacional envolve as seguintes etapas:

Passo 1: Elaboração da planilha

O primeiro passo é transpor para uma planilha os elementos que compõem o modelo do problema: variáveis, função-objetivo e restrições e suas respectivas relações matemáticas.

A planilha do caso da Indústria Maximóveis é mostrada na Figura 7.10.

	A	B	C	D	E
1		Empresa Maximóveis			
2					
3		Cadeiras	Mesas	Total	
4	Quantidade a produzir	0	0		
5	Margem de Contribuição	10	8	0	
6					
7	*Restrições*			Horas Utilizadas	Horas Disponíveis
8	Departamento Montagem	3	3	0	30
9	Departamento Acabamento	6	3	0	48
10					
11					
12					
13					

Figura 7.10 *Planilha inicial.*

Os dados iniciais do problema são informados nas seguintes células:

- B5 e C5 – margens de contribuição unitárias dos produtos;
- B8 a C9 – tempo gasto pelos produtos em cada departamento;
- E8 e E9 – capacidade produtiva dos departamentos.

As variáveis de decisão – quantidade de cadeiras (C) e de mesas (M) a serem produzidas – estão representadas nas células B4 e C4. Essas células são inicialmente preenchidas com zeros. Poderiam, mesmo, ficar vazias, porque ainda não se sabe qual quantidade de produtos deve ser fabricada. Após o emprego da ferramenta computacional, essas células apresentarão a solução do problema.

A função-objetivo do problema é representada pela expressão $MCT = 10C + 8M$. A equação está reproduzida na célula D5 da planilha: D5 = (B5 * B4) + (C5 * C4).

As fórmulas das restrições são:

Departamento de Montagem $= 3C + 3M \leq 30$
Departamento de Acabamento $= 6C + 3M \leq 48$

Essas fórmulas estão reproduzidas nas células D8 e D9 da planilha:

D8: = (B8*B4) + (C8*C4)
D9: = (B9*B4) + (C9*C4)

Passo 2: Especificar os parâmetros do Solver

Formulada a planilha, selecionamos a ferramenta computacional a ser empregada.

O MS Excel® dispõe da ferramenta Solver que, entre outros, soluciona problemas de programação linear. Para acessar esse recurso, devemos selecionar Ferramentas e, em seguida, a opção Solver.[7]

A Figura 7.11 mostra a caixa de diálogo *Parâmetros do Solver*.

Figura 7.11 *Parâmetros do* Solver.

7 Caso em Ferramentas não exista a opção *Solver*, selecionar a opção *Suplementos*, que abrirá uma caixa com vários suplementos disponíveis, dentre os quais o *Solver*, que deverá ser ativado. Se não for possível a ativação do Solver por meio desse procedimento, é necessário fazer a reinstalação do MS Excel®, utilizando-se a opção *instalação completa*.

O primeiro campo a ser preenchido é a célula de destino, que corresponde à função-objetivo. Como indicamos, a função-objetivo de nosso exemplo está representada na célula D5.

Na opção *Igual a*, devemos informar, no caso de nosso exemplo, que se trata de um problema de maximização, selecionando *Máx*.[8]

No campo *Células variáveis* devem ser informadas as células que contêm as variáveis de decisão. No caso, B4 e C4.

A especificação das restrições é mostrada no próximo passo.

Passo 3: Adicionar as restrições

Para especificar as restrições, clicamos no botão *Adicionar*, existente na caixa de diálogo *Parâmetros do Solver*. Então, é apresentada a tela *Adicionar restrição*, como exibida na Figura 7.12. Nela, exemplificamos o preenchimento dos campos da caixa de diálogo para inclusão da restrição do Departamento de Montagem.

Figura 7.12 *Inclusão das restrições*.

São indicados:

- referência de Célula. A célula que contém a fórmula representativa da restrição. No caso, D8;
- o sinal de <=. Este sinal é *default* (padrão) e coincide com o sinal da restrição do Departamento de Montagem. Clicando na seta (▼) existente ao lado desse sinal, é possível selecionar os outros tipos de restrições disponíves, como ≥, = e outras, que discutiremos ao longo do capítulo;
- restrição. Digitamos o valor de 30, que corresponde à capacidade produtiva do Departamento de Montagem. Opcionalmente, pode ser indicada a célula E8, que contém esse valor.

8 Em tópicos seguintes, discutiremos outros tipos de problemas existentes.

Então, selecionamos novamente o botão *Adicionar* e seguimos o mesmo procedimento para incluir a restrição representativa do Departamento de Acabamento. A Figura 7.13 mostra a caixa de diálogo *Parâmetros do Solver*, após inclusão dessa segunda restrição. Restam, ainda, as restrições indicativas de que as células variáveis devem ser "maiores ou iguais a zero". Um procedimento explicado no próximo passo, feito com a seleção de um único campo, dispensa a necessidade de adicionar uma por uma as eventuais restrições dessa natureza existentes em um problema.

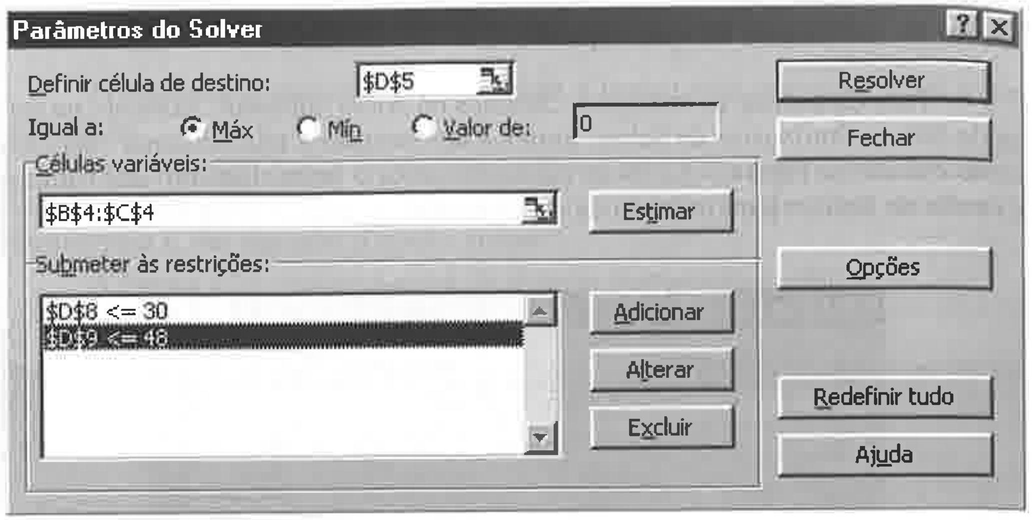


Figura 7.13 *Representação das restrições do problema.*

Passo 4: Definir as opções do *Solver*

Selecionando o botão *Opções*, existente na tela *Parâmetros do Solver*, é acessada a caixa de diálogo *Opções do Solver*. Na Figura 7.14, são apresentadas as opções consideradas para o exemplo da Empresa Maximóveis.

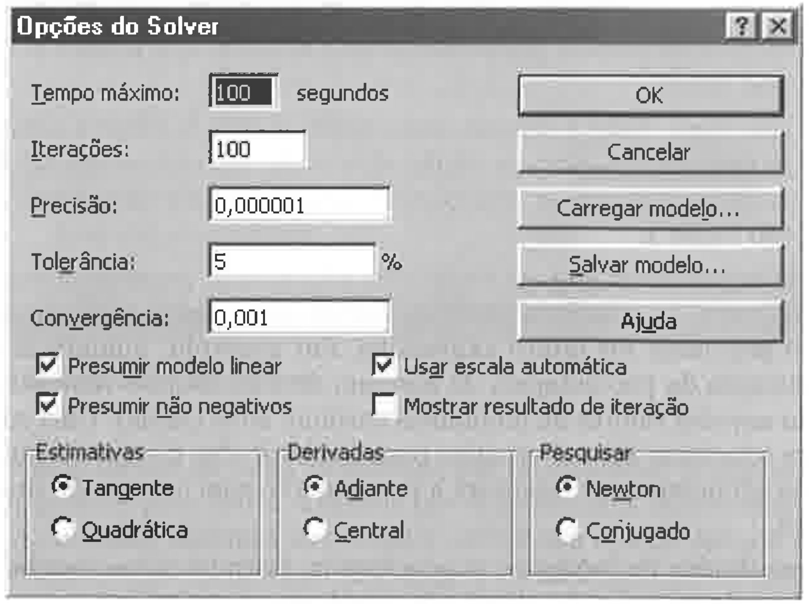


Figura 7.14 *Opções do* Solver.

Essas opções correspondem às definições padrão da caixa de diálogo *Opções do Solver*, da forma como se apresentam quando selecionamos o botão *Opções*. Acrescentamos, apenas, as seleções das opções *Presumir modelo linear*, *Presumir não negativos* e *Usar escala automática*, pelas razões a seguir expostas.

Os significados dos recursos avançados existentes na caixa de diálogo *Opções do Solver* são:

Tempo máximo: limita o tempo usado pelo processo de solução.

Iterações: diz respeito ao número máximo de tentativas de solução que serão realizadas pelo *Solver*.

Precisão: refere-se ao montante de erro que admitimos entre o resultado a ser obtido pelo *Solver* e as metas antes fixadas nas células de restrição. Quanto maior a precisão exigida (maior número de casas decimais), maior o tempo gasto pela ferramenta computacional para solucionar o problema.

Tolerância: essa opção é aplicável apenas aos problemas com restrições de número inteiro, situação que discutiremos em um exemplo seguinte deste capítulo.

Convergência: opção aplicável somente nos casos de problemas não lineares, objeto de capítulo específico deste livro.

Presumir modelo linear: é fundamental que esta opção seja selecionada nos casos de problemas de Programação Linear, como o da Empresa Maximóveis. Indica que todas as relações do modelo do problema são lineares. Também é selecionada nas situações em que se deseja uma aproximação linear para um problema não linear.

Presumir não negativos: a seleção desta opção instrui o *Solver* a presumir um limite mínimo de zero para as células ajustáveis. Esse procedimento dispensa a necessidade de incluir as restrições do tipo "≥", uma a uma, como antes indicado no Passo 3.

Usar escala automática: esta opção deve ser selecionada, necessariamente, quando a diferença de grandezas entre os valores de entradas e os valores de saídas do problema for muito expressiva. Por exemplo, quando se busca a maximização da porcentagem da margem de contribuição (entrada) e o resultado envolve valores de montantes bastante altos (saída). Uma sugestão é sempre selecionar essa alternativa para a solução dos diversos problemas de PL, procedimento que dispensará a preocupação com um tipo de situação específica.

Mostrar resultados de iteração: se selecionada, instrui o *Solver* a exibir o resultado de cada tentativa de solução do problema.

Campos "Estimativas", "Derivadas" e "Pesquisar": referem-se a recursos avançados, cuja explicação depende de conceitos que fogem ao escopo deste livro. No exemplo, mantivemos para esses campos as definições padrão do *Solver*. Alternativas diferentes das aqui adotadas são indicadas apenas para solucionar problemas de maior complexidade ou problemas não lineares.

Clicando em *OK*, retornamos à caixa de diálogo *Parâmetros do Solver*. Após nos certificarmos da correção do preenchimento dos diversos campos, instruímos o *Solver* a buscar a solução do problema, selecionando o botão *Resolver*.

Após o processo de solução do problema, é mostrada a caixa de diálogo *Resultados do Solver*, que exibe uma mensagem de conclusão. No caso do nosso exemplo, como pode ser visto na Figura 7.15, o *Solver* indica ter encontrado uma solução para o problema, atendendo a todas as restrições e condições fixadas.[9]

9 Os significados das eventuais mensagens de erro retornadas pelo *Solver* na solução de problemas de PL podem ser consultados na opção "ajuda". As explicações existentes auxiliam a identificar as causas dos erros, que podem ser relacionadas com equívocos no preenchimento dos dados ou mesmo na concepção dos problemas.

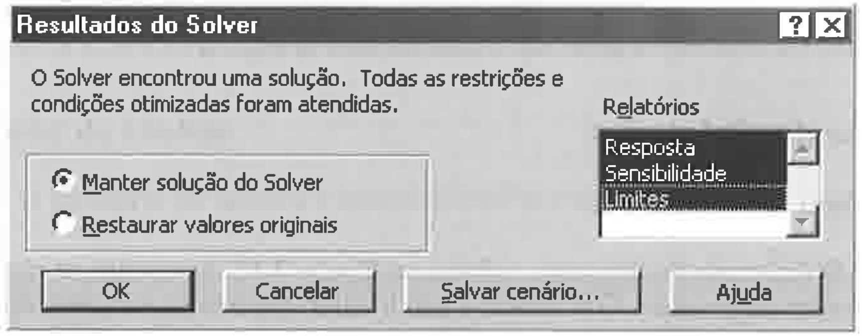


Figura 7.15 *Resultados do* Solver.

No lado direito da caixa de diálogo, são relacionados os relatórios passíveis de ser gerados pelo Solver. Observe que selecionamos os três relatórios disponíveis. Além disso, devemos selecionar a alternativa *Manter solução do Solver.* A seguir, clicamos em *OK*. Então, o *Solver* gera os relatórios selecionados e conclui o processo de solução.

Após esse procedimento, a planilha passa a exibir os resultados obtidos. A Figura 7.16 apresenta a planilha de nosso exemplo, agora com valores da solução encontrada.

	A	B	C	D	E	F
1		Empresa Maximóveis				
2						
3		Cadeiras	Mesas	Total		
4	Quantidade a produzir	6	4			
5	Margem de Contribuição	10	8	92		
6						
7	*Restrições*			Horas Utilizadas	Horas Disponíveis	
8	Departamento Montagem	3	3	30	30	
9	Departamento Acabamento	6	3	48	48	
10						
11						
12						
13						

Figura 7.16 *Planilha final*.

As células variáveis indicam a quantidade de itens a serem produzidos na solução ótima: seis cadeiras e quatro mesas, como encontrado nas soluções anteriores. A margem de contribuição ótima é de $ 92.

Observar no rodapé da Figura 7.16, que foram geradas planilhas para os relatórios solicitados, os quais são a analisados em seguida.

Análise dos Relatórios

Relatório de Respostas

O Relatório de Resposta exibido na Figura 7.17, apresenta os resultados encontrados pelo *Solver*. O relatório é subdividido em três partes, correspondentes aos elementos fundamentais do problema: célula de destino, células ajustáveis e restrições.

Microsoft Excel 8.0 Relatório de resposta

Célula de destino (Máx)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$D$5	Margem de Contribuição Total	0	92

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$B$4	Quantidade a produzir Cadeiras	0	6
$C$4	Quantidade a produzir Mesas	0	4

Restrições

Célula	Nome	Valor da célula	Fórmula	Status	Transigência
$D$8	Departamento Montagem Horas Utilizadas	30	$D$8<=30	Agrupar	0
$D$9	Departamento Acabamento Horas Utilizadas	48	$D$9<=48	Agrupar	0

Figura 7.17 *Relatório de respostas.*

O campo *Valor final* das células ajustáveis mostra a solução ótima encontrada pelo *Solver*: produção de seis cadeiras e de quatro mesas. O resultado da célula de destino indica que esse *mix* de produtos gera uma margem de contribuição de $ 92. O campo *Valor original* aponta que essas células foram inicialmente preenchidas com *zeros*.

No que se refere às restrições, o relatório mostra, no campo *Valor da célula*, o total de horas utilizadas pelos produtos em cada departamento. O campo *Fórmula* contém a expressão representativa de cada restrição. O campo *Status* exibe uma das duas seguintes mensagens: (1) *Agrupar*, que significa que não há sobras, e (2) *Não agrupar*, indicativa da existência de sobras. Em nosso exemplo, verificamos que, fabricando a quantidade de produtos indicada na solução ótima, a capacidade produtiva dos departamentos (30 horas de montagem e 48 horas de

acabamento) é plenamente utilizada. O relatório confirma que, nessas circunstâncias, não há sobra de horas em nenhum dos departamentos.

Relatório de Limites

O Relatório de Limites é mostrado na Figura 7.18 .

Microsoft Excel 8.0 Relatório de limites

Célula	Nome Destino	Valor
$D$5	Margem de Contribuição Total	92

Célula	Nome Ajustável	Valor	Limite Inferior	Resultado Destino	Limite Superior	Resultado Destino
$B$4	Quantidade a produzir Cadeiras	6	0	32	6	92
$C$4	Quantidade a produzir Mesas	4	0	60	4	92

Figura 7.18 *Relatório de limites.*

Na primeira parte do relatório, é indicado o valor da Margem de Contribuição na solução ótima.

A parte do relatório destinada às células ajustáveis mostra, no campo *Valor*, as margens de contribuição unitárias dos produtos. Os campos *Limite inferior* e *Resultado de destino* devem ser analisados em conjunto. Por exemplo, considere a linha do relatório correspondente à *Quantidade a produzir de cadeiras*. A análise dos campos correspondentes indica que, mantidas as demais condições do problema, se reduzirmos a produção de cadeiras a seu *Limite inferior* (zero), o *Resultado destino* (margem de contribuição) será de $ 32. Com efeito, na solução ótima, se deixarmos de produzir cadeiras, a margem de contribuição total se referirá apenas à produção de quatro mesas, que têm margem de contribuição unitária de $ 8, resultando em $ 32.

Raciocínio similar deve ser empregado para interpretar a linha correspondente à *Quantidade a produzir de mesas*: quando não são produzidas mesas, a margem de contribuição total é de $ 60, relativa à fabricação de seis cadeiras, com MCU de $ 10.

A análise do campo *Limite superior* segue a mesma lógica. Consideremos, primeiro, a linha referente à *Quantidade a produzir de cadeiras*. Os valores dos campos correspondentes indicam que, na solução ótima, se produzida a quantidade máxima de 6 unidades de cadeiras, o *Resultado destino* será de $ 92. Ver que esse é o valor da MCT na solução ótima. E não podia ser diferente. Afinal, desde que se mantenha fixa a quantidade de um dos produtos na solução ótima, não será possível aumentar a quantidade do outro produto. Verificar que o valor encontrado para a linha da *Quantidade a produzir de mesas* também é o mesmo. Podemos generalizar esses resultados para todos os problemas de maximização: nos problemas dessa natureza, o *Resultado destino* do *Limite superior* sempre coincidirá com a solução ótima.[10]

As informações fornecidas pelo relatório de limites ganham importância à medida que aumentamos o número de variáveis do problema. Imaginar, por exemplo, o caso de uma empresa que fabrica 30 diferentes produtos e deseja saber qual seria o valor da margem de contribuição total caso se decidisse pela descontinuidade da produção de um desses itens.

Relatório de Sensibilidade

Quando um ou mais dados do problema sofrem alteração, o modelo inicial pode ser atualizado e recalculado com facilidade. O *Solver* permite que se alterem apenas os dados que sofreram alterações, recalculando a planilha e emitindo novos relatórios.

Ocorre que podemos desejar conhecer, com base em uma dada situação, quais impactos seriam provocados por eventuais mudanças nos valores atuais das variáveis e restrições. No caso de nosso problema, poderíamos estar interessados em saber, por exemplo, qual o reflexo na solução ótima de um aumento na margem de contribuição das cadeiras; qual o impacto sobre a MCT da empresa caso produzíssemos mais mesas do que o indicado na solução ótima; ou, ainda, qual o ganho proporcionado pelo aumento na capacidade do Departamento de Montagem.

O Relatório de Sensibilidade amplia a solução estática da programação linear. A análise de sensibilidade permite incorporar à resposta considerações sobre eventuais alterações nas condições do problema, dentro de intervalos definidos.

Como podemos observar na Figura 7.19, o Relatório de Sensibilidade é subdividido em duas partes: uma destinada às células ajustáveis e outra, às restrições. Vamos considerar a análise de cada um desses grupos separadamente.

10 Como veremos nos problemas de minimização, essa mesma situação ocorre quando analisado o campo *Limite inferior*.

Microsoft Excel 8.0 Relatório de sensibilidade

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor Final	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
$B$4	Quantidade a produzir Cadeiras	6	0	10	6	2
$C$4	Quantidade a produzir Mesas	4	0	8	2	3

Restrições

Célula	Nome	Valor Final	Sombra Preço	Restrição Lateral R.H.	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
$D$8	Departamento Montagem Horas Utilizadas	30	2	30	18	6
$D$9	Departamento Acabamento Horas Utilizadas	48	0,67	48	12	18

Figura 7.19 *Relatório de sensibilidade.*

Análise 1: Quanto às células ajustáveis

O campo *Valor final* indica as quantidades dos produtos a serem produzidas na solução ótima. Essa é uma informação pontual, que, a princípio, depende da manutenção das condições consideradas na resolução do problema. Ocorre que os dados do problema estão sujeitos a alterações em seus valores. No âmbito das empresas, essas variações ocorrem com certa freqüência.

A análise de sensibilidade revela que, dentro de intervalos determinados, a quantidade de produtos a serem fabricados na solução ótima é mantida, ainda que se alterem suas MCU. Os intervalos são definidos com informações dos campos *Permissível decréscimo* e *Permissível acréscimo*. Por exemplo, a MCU das cadeiras é de $ 10. É possível afirmar que essa margem de contribuição unitária pode variar de $ 8 ($ 10 – permissível decréscimo de $ 2) a $ 16 ($ 10 + permissível acréscimo de $ 6) que a quantidade de cadeiras prevista na solução ótima não se altera.

A mesma afirmação pode ser feita quanto à variação da margem de contribuição das mesas: a quantidade de quatro mesas a serem produzidas, conforme indicado na solução ótima, mantém-se desde que a MCU do produto varie dentro do intervalo de $ 5 ($ 8 – permissível decréscimo de $ 3) a $ 10 ($ 8 + permissível acréscimo de $ 2).

A referida análise é válida desde que consideremos apenas a margem de contribuição de um dos produtos que varia dentro do intervalo correspondente, enquanto mantemos constante a margem do outro produto.

Outra situação em que a solução ótima não se altera refere-se aos casos de aumentos ou diminuições simultâneas nas margens de contribuição unitárias dos produtos, desde que essas alterações se verifiquem dentro dos intervalos antes definidos.

Outra informação importante contida no Relatório de Sensibilidade refere-se ao "reduzido custo". Os valores contidos nesse campo indicam qual o reflexo provocado no "objetivo coeficiente" (MCT, em nosso caso) pela opção por alternativas diferentes da indicada na solução ótima. Como se observa, o "reduzido custo" pode ser entendido como um "custo de oportunidade"; isto é, mostra quanto se está deixando de ganhar (ou perder) por desprezar determinada alternativa.

O "reduzido custo" é zero para as variáveis que fazem parte da solução ótima. Por isso as variáveis de decisão de nosso exemplo – 'quantidade de cadeiras' e 'quantidade de mesas' – apresentam 'reduzido custo' de zero.

Em exemplos seguintes, teremos oportunidade de analisar situações em que o "reduzido custo" assume outros valores. Considerando o caso em análise, o "reduzido custo" deixaria de ser zero, por exemplo, caso a solução ótima indicasse que a empresa deveria produzir apenas cadeiras. Nessas circunstâncias, o campo *Reduzido custo* correspondente à variável "quantidade de mesas" indicaria quanto seria diminuído na margem de contribuição total a cada unidade do produto que a empresa viesse a produzir. Isto é, considerando uma situação em que a empresa obteria a maior MCT produzindo apenas cadeiras, a fabricação de mesas seria feita em detrimento do produto mais rentável. Essa decisão contrariaria a solução ótima, com impacto negativo na margem de ganho da empresa.

Análise 2: Quanto às restrições

Outra informação relevante para a análise de sensibilidade é mostrada no campo *Sombra preço* (ou Preço sombra). Esse campo indica quanto se deixa de ganhar por não se dispor de mais uma unidade de determinada variável restritiva. No caso da Indústria Maximóveis, indica quanto se deixa de aumentar na MCT por não se dispor de uma hora a mais na capacidade dos departamentos. Por exemplo, o sombra preço do Departamento de Montagem é de $ 2. Isso significa que, caso o departamento dispusesse de 31 horas, ao invés das 30 atuais, a margem de contribuição da empresa passaria de $ 92 para $ 94. Esse tipo de análise é válido, logicamente, desde que se mantenham as demais condições do problema.

O raciocínio inverso também é válido: o preço sombra indica qual a perda provocada pela diminuição de uma unidade em uma restrição específica. Em nosso caso, mostra, por exemplo, que a MCT diminuiria dos atuais $ 92 para $ 90, caso a capacidade do Departamento de Montagem fosse diminuída em uma hora. O mesmo raciocínio é válido para a análise do Departamento de Acabamento.

Os valores do preço sombra são válidos para determinados intervalos. O raciocínio para definição desses intervalos é similar ao utilizado para o *Objetivo coeficiente*, considerando-se os campos *Permissível acréscimo* e *Permissível decréscimo*. Assim, podemos afirmar que o preço-sombra de $ 2 é mantido nas variações na quantidade de horas do Departamento de Montagem que se processarem no

intervalo que vai de 24 horas (30 horas menos permissível decréscimo de 6 horas) a 48 horas (30 horas + permissível acréscimo de 18 horas).

Caso desejemos analisar variações que possam ocorrer fora dos intervalos assim definidos, é necessário fazer simulações, alterando os dados iniciais no modelo.

O preço sombra possui importante conteúdo informacional, à medida que permite a comparação dos ganhos que advêm da ampliação da capacidade restritiva da empresa com os eventuais custos envolvidos. A Indústria Maximóveis poderia comparar, por exemplo, o ganho de $ 40 em sua MCT, proporcionado pelo aumento de 20 horas na capacidade produtiva do Departamento de Montagem, com os custos que adviriam dessa ampliação.

Advertência

A análise da solução de problemas de Programação Linear apresenta algumas vezes uma anomalia matemática denominada *degeneração*. Dizemos que um problema de PL é degenerado se o preço sombra de qualquer das restrições tem *permissível acréscimo* ou *permissível decréscimo* de zero.

Nessas circunstâncias, a análise do relatório de sensibilidade, como discutida neste capítulo, fica prejudicada.

Resumo

A programação linear é uma técnica matemática voltada para a solução de problemas que envolvem a busca da melhor alocação de recursos escassos. Entre as ferramentas da Pesquisa Operacional, a PL é uma das que possuem maior utilização no campo de estudos da Contabilidade e Finanças. Neste capítulo, foram tratados alguns exemplos, tais como a maximização da margem de contribuição na produção de um *mix* de produtos, a minimização do risco de uma carteira de investimentos e a alocação ótima de produtos de fábricas para depósitos etc. Com esses exemplos, podemos vislumbrar diversas outras aplicações da ferramenta na solução dos problemas empresariais.

A grande evolução dos recursos computacionais facilitou bastante os cálculos envolvidos na solução dos problemas de programação linear. Com isso, o maior desafio reside na cuidadosa e adequada modelagem do problema. No capítulo, além de demonstrar a utilização da ferramenta *Solver* do MS Excel®, discutimos as soluções gráfica, matricial e com emprego do método simplex – importantes para revelar a lógica do raciocínio de solução dos problemas de PL.

A análise de sensibilidade amplia a solução pontual da programação linear, permitindo avaliar os reflexos sobre a solução ótima de eventuais alterações nos dados e condições do problema. A análise é especialmente importante para estudo dos problemas empresariais, dado que o ambiente no qual as empresas se inserem está sujeito a constantes mudanças. Mostramos que essa análise, originalmente trabalhosa, é bastante simplificada com o relatório de sensibilidade emitido pelo *Solver*.

Glossário

Análise de sensibilidade. Análise que permite avaliar os reflexos sobre a solução ótima de eventuais alterações nos dados e condições do problema, dentro de intervalos definidos.

Função-objetivo. Expressão matemática por meio da qual se relacionam as variáveis de decisão e o objetivo a ser atingido.

Linhas de isossolução. Retas nas quais, em todos os seus pontos, é obtido o mesmo valor para a função-objetivo.

Método simplex. Método matemático que combina conceitos de álgebra matricial com um conjunto de regras básicas que levam à solução dos problemas de Programação Linear.

Pesquisa operacional. Área do conhecimento que fornece um conjunto de procedimentos voltados para tratar, de forma sistêmica, problemas que envolvem a utilização de recursos escassos.

Preço sombra (ou sombra preço). Campo do relatório de sensibilidade do *Solver* que indica quanto se deixa de ganhar por não se dispor de mais uma unidade de determinada variável restritiva.

Programação Linear. Técnica matemática destinada a determinar a melhor utilização de recursos limitados, de forma que uma função-objetivo seja otimizada e sejam satisfeitas determinadas condições estabelecidas.

Reduzido custo. Informação contida no relatório de sensibilidade emitido pelo *Solver*, que pode ser entendida como um "custo de oportunidade", indicando quanto se deixa de ganhar (ou perder) por adotar alternativa diferente da indicada pela solução ótima.

Restrições. Limitações impostas sobre os possíveis valores que podem ser assumidos pelas variáveis de decisão.

***Solver*.** Ferramenta do *software* Microsoft Excel® que, para solução dos problemas lineares, utiliza o método simplex com limites sobre as variáveis e o método de desvio e limite.

Variáveis de decisão. Variáveis que correspondem às decisões a serem tomadas visando encontrar a solução para o problema em análise.

Variáveis de folga. Variáveis que representam eventuais folgas entre limites fixados pelas restrições e o montante efetivamente definido na solução do problema; introduzidas nas inequações representativas das restrições, transformam-nas em equações.

Questões Propostas

1. Citar três situações em Contabilidade e Finanças passíveis de ser tratadas com emprego da Programação Linear.
2. Citar quais são os três elementos fundamentais de um problema de programação linear e conceituá-los.
3. Formular uma frase que sintetize o modelo dos problemas de programação linear, inter-relacionando os elementos fundamentais referidos no item anterior.
4. Explicar sinteticamente o processo de obtenção da solução ótima de um problema de programação linear por meio do método gráfico.
5. Qual o fundamento básico do método simplex?
6. Qual a utilidade da análise de sensibilidade?
7. Que significam os campos *Objetivo coeficiente* e *Sombra preço* do relatório de sensibilidade emitido pelo *Solver*?

Exercícios Resolvidos

1. Na qualidade de assessor de investimentos da Fundabanc, uma fundação de empregados de determinado banco, estudar a melhor forma de aplicar os recursos disponíveis.

A necessidade de minimizar os riscos limita as alternativas a três tipos de aplicações: ações preferenciais, ações de companhias de utilidade pública e títulos da dívida pública. Na composição da carteira, devem ser levadas em conta, ainda, restrições impostas pela legislação e normas vigentes.

A seguir, é apresentado um quadro com as taxas de retorno esperadas para esses tipos de investimentos:

Investimento	Símbolo	Taxa de retorno esperada (%)
Ações da Comgas	COMG	4,3
Ações da Cesp	CESP	3,7
Ações da Eletropaulo	ELP	1,8
Ações da Nestlé	NES	2,8
Títulos públicos federais	TPF	1,5
Títulos públicos municipais	TPM	2,4

O montante disponível para aplicação está limitado a $ 100.000. As restrições adicionais que se apresentam para as aplicações, de acordo com a legislação vigente, são as seguintes:

- títulos públicos (federais e municipais) não podem representar, juntos, menos que $ 30.000 dos investimentos;
- ações preferenciais (Nestlé) estão limitadas a $ 25.000 dos investimentos;
- ações de companhias de utilidade pública devem contabilizar pelo menos $ 30.000 dos investimentos;
- nenhuma das três possíveis alternativas de aplicações – ações preferenciais, ações de companhias de utilidade pública e títulos públicos – pode representar mais de $ 50.000 dos investimentos.

Pede-se definir os valores a serem aplicados em cada investimento, tendo como objetivo a maximização do valor do retorno da carteira.

Solução

Solução computacional

Optamos por resolver o problema empregando a solução computacional. Os passos, aqui apresentados de forma resumida, foram detalhados ao longo do capítulo.

1 Modelagem do problema

Variáveis de decisão:

O que pretendemos é identificar quais montantes devem ser aplicados em cada um dos investimentos. As variáveis de decisão do problema são, portanto, os seis tipos de papéis disponíveis: COMG, CESP, ELP, NES, TPF e TPM.

Função-objetivo:

O objetivo é maximizar o valor do retorno da carteira, com base na melhor combinação possível dos investimentos disponíveis.

A função-objetivo do problema é, portanto, expressa como:

Maximizar Retorno = 0,043 COMG + 0,037 CESP + 0,018 ELP + 0,028 NES + 0,015 TPF + 0,024 TPM

Restrições:

São as seguintes as restrições definidas para o problema:

- a primeira limitação do problema consiste no total de recursos disponíveis para aplicação de $ 100.000. Assim: COMG + CESP + ELP + NES + TPF + TPM = 100.000;
- uma restrição comum às três modalidades de aplicações indica que o volume de recursos destinado a cada uma delas deve ser menor ou igual a $ 50.000. Como também existem limitações específicas para cada um desses tipos de investimentos, podemos definir as seguintes restrições:
  - títulos públicos: 30.000 ≤ (TPF + TPM) ≤ 50.000
  - ações de companhias de utilidade pública: 30.000 ≤ (COMG + CESP + ELP) ≤ 50.000
  - ações preferenciais: NES ≤ 25.000 e NES ≤ 50.000. Nesse caso, um dos limites atende às duas condições: NES ≤ 25.000

2 Elaboração da planilha inicial

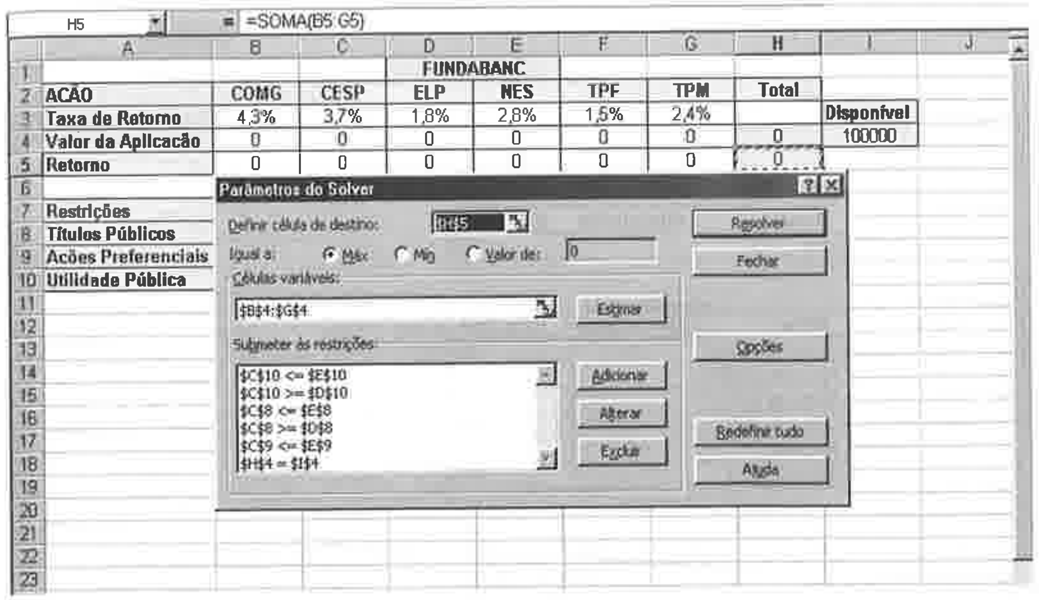
Dispomos os dados do problema na planilha a seguir. As células B3 a G3 contêm as taxas de retorno dos títulos. As células B4 a G4, que correspondem às variáveis do problema, são inicialmente preenchidas com zeros; em I4, informamos o valor total de recursos disponível para investimento.

As fórmulas utilizadas são indicadas logo após a planilha.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				FUNDABANC					
2	ACÃO	COMG	CESP	ELP	NES	TPF	TPM	Total	
3	Taxa de Retorno	4,3%	3,7%	1,8%	2,8%	1,5%	2,4%		Disponível
4	Valor da Aplicacão	0	0	0	0	0	0	0	100000
5	Retorno	0	0	0	0	0	0	0	
6									
7	Restrições			Mínimo	Máximo				
8	Títulos Públicos		0	30000	50000				
9	Acões Preferenciais		0		25000				
10	Utilidade Pública		0	30000	50000				

Células	Fórmulas	Copiar para
H4	=SOMA(B4:G4)	
B5	=B3*B4	C5 a G5
H5	=SOMA(B5:G5)	
C8	=F4+G4	
C9	=E4	
C10	=B4+C4+D4	

3 Definição dos parâmetros do *Solver*



A célula de destino contém a função objetivo (célula H5), que corresponde ao retorno total.

Como desejamos maximizar o retorno total, selecionamos a opção *Máx*.

As células variáveis (B4 a G4) correspondem aos montantes a serem aplicados em cada tipo de investimento.

As restrições referem-se à limitação no montante disponível para aplicação e às condições estabelecidas para as três modalidades de investimentos.

4 Análise dos Relatórios

Relatório de Respostas

Microsoft Excel 8.0 Relatório de resposta

Célula de destino (Máx)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$H$5	Retorno Total	0	3430

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$B$4	Valor da Aplicacão COMG	0	50000
$C$4	Valor da Aplicacão CESP	0	0
$D$4	Valor da Aplicacão ELP	0	0
$E$4	Valor da Aplicacão NES	0	20000
$F$4	Valor da Aplicacão TPF	0	0
$G$4	Valor da Aplicacão TPM	0	30000

Restrições

Célula	Nome	Valor da célula	Fórmula	Status	Transigência
$C$9	Acões Preferenciais	20000	$C$9<=$E$9	Sem agrupar	5000
$C$8	Títulos Públicos	30000	$C$8<=$E$8	Sem agrupar	20000
$H$4	Valor da Aplicacão Total	100000	$H$4=$I$4	Agrupar	0
$C$10	Utilidade Pública	50000	$C$10<=$E$10	Agrupar	0
$C$10	Utilidade Pública	50000	$C$10>=$D$10	Sem agrupar	20000
$C$8	Títulos Públicos	30000	$C$8>=$D$8	Agrupar	0

O Relatório de Respostas indica que, dadas as condições do problema, o retorno máximo que pode ser obtido é de $ 3.430. E que, na solução ótima, devem ser aplicadas as seguintes quantias nos títulos disponíveis: $ 50.000 em COMG, $ 20.000 em NES e $ 30.000 em TPM.

Como antes explicado, o campo *transigência* indica as eventuais sobras verificadas em relação às restrições. Podemos observar, por exemplo, que, no caso de títulos públicos, há uma folga de $ 20.000 no que se refere à restrição de máximo (linha 19): poderiam ter sido aplicados até $ 50.000, mas foram destinados apenas $ 30.000 para esses papéis. Observar que esse valor coincide com a restrição de mínimo estabelecida para aplicação em títulos públicos. Por isso, na linha 23 do relatório a transigência (folga) é de zero, indicando que foi exatamente $ 30.000 o valor investido nesses títulos.

Relatório de Limites

Microsoft Excel 8.0 Relatório de limites

Célula	Nome Destino	Valor
$H$5	Retorno Total	3430

Célula	Nome Ajustável	Valor	Limite Inferior	Resultado Destino	Limite Superior	Resultado Destino
$B$4	Valor da Aplicacão COMG	50000	50000	3430	50000	3430
$C$4	Valor da Aplicacão CESP	0	0	3430	0	3430
$D$4	Valor da Aplicacão ELP	0	0	3430	0	3430
$E$4	Valor da Aplicacão NES	20000	20000	3430	20000	3430
$F$4	Valor da Aplicacão TPF	0	0	3430	0	3430
$G$4	Valor da Aplicacão TPM	30000	30000	3430	30000	3430

No caso deste exemplo, o Relatório de Limites é de pouca utilidade. Observe que os limites inferior e superior das variáveis em solução (COMG, NES e TPM) são iguais e coincidem com a quantia definida na solução ótima para ser aplicada nesses investimentos.

O motivo para isso é a existência no problema de uma restrição que impõe um valor fixo para a função-objetivo: a soma das aplicações deve sempre totalizar R$ 100.000. Como indicamos neste capítulo, a análise dos limites inferior e superior de determinada variável é feita sempre considerando fixos os valores das outras variáveis na solução ótima. Por exemplo, no caso da variável NES, devemos analisar eventuais variações no valor indicado para esse investimento, mantidos fixos os montantes aplicados em COMG e TPM. Já que esses dois investimentos somam $ 70.000, o valor a ser aplicado em COMG deve ser de $ 30.000, para completar os $ 100.000 exigidos. Esse raciocínio repete-se na análise dos limites das demais variáveis.

Relatório de Sensibilidade

Microsoft Excel 8.0 Relatório de sensibilidade

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor Final	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
\$B\$4	Valor da Aplicacão COMG	50000	0	0,043	1E+30	0,006
\$C\$4	Valor da Aplicacão CESP	0	-0,006	0,037	0,006	1E+30
\$D\$4	Valor da Aplicacão ELP	0	-0,025	0,018	0,025	1E+30
\$E\$4	Valor da Aplicacão NES	20000	0	0,028	0,015	0,004
\$F\$4	Valor da Aplicacão TPF	0	-0,009	0,015	0,009	1E+30
\$G\$4	Valor da Aplicacão TPM	30000	0	0,024	0,004	0,009

Restrições

Célula	Nome	Valor Final	Sombra Preço	Restrição Lateral R.H.	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
\$C\$9	Acões Preferenciais	20000	0	25000	1E+30	5000
\$C\$8	Títulos Públicos	30000	0	50000	1E+30	20000
\$H\$4	Valor da Aplicacão Total	100000	0,028	100000	5000	20000
\$C\$10	Utilidade Pública	50000	0,015	50000	20000	5000
\$C\$10	Utilidade Pública	50000	0	30000	20000	1E+30
\$C\$8	Títulos Públicos	30000	-0,004	30000	20000	5000

Como antes explicado neste capítulo, o reduzido custo é zero para as variáveis que estão em solução: no caso, COMG, NES e TPM. Para as demais variáveis, o valor do reduzido custo representa o impacto no retorno total caso sejam adotadas alternativas diferentes da indicada pela solução ótima.

Devemos lembrar que a análise do reduzido custo pressupõe a manutenção das demais condições do problema – entre elas, em nosso exemplo, o valor total disponível para aplicação, de \$ 100.000. Assim, ao aumento no valor aplicado em um título corresponde a redução em igual quantia em outro investimento. Por exemplo, caso se decidisse por investir \$ 1 a mais na CESP, o retorno total diminuiria em 0,006 (ou 0,6%). Podemos atestar que essa é exatamente a diferença entre os retornos da CESP (na qual estaríamos aplicando mais \$ 1) e o da COMG (investimento no qual reduziríamos \$ 1). Isto é, CESP (0,037) – COMG (0,043) = redução no retorno total de 0,006. O aumento do investimento em ELP também deve ser analisado comparando-se o ganho proporcionado pela quantia acrescida nessa aplicação com a perda correspondente em COMG. É que CESP, ELP e COMG são investimentos de mesma natureza: eles são títulos de companhia de utilidade pública. Como vimos pelo relatório de resposta, esse tipo de aplicação já está no limite máximo permitido pelas restrições. Por isso, os aumentos na aplicação em um desses papéis levam à diminuição de igual montante em outro título do mesmo grupo.

Como discutido, o relatório de sensibilidade também fornece o intervalo dentro do qual os objetivos coeficientes podem variar e, ainda assim, a solução ótima ser mantida. Por exemplo, nas eventuais mudanças no percentual de retorno (objetivo coeficiente) da NES dentro do intervalo aberto de 0,024 (0,028 menos permissível decréscimo de 0,004) a 0,043 (0,028 mais permissível acréscimo de 0,015), a solução ótima não se altera. A notação 1E + 30, que aparece nas colunas de permissíveis acréscimo/decréscimo de diversos tipos de investimentos, corresponde a 10^{30}, o que representa um valor significativamente grande. Assim, por exemplo, o intervalo dentro do qual o objetivo coeficiente da COMG pode variar, sem alterar a solução ótima, vai de um limite mínimo de 0,037 (0,043 menos 0,006) até um limite máximo que tende ao infinito (0,043 mais 1E + 30).

O campo Sombra preço indica que cada \$ 1 adicionado aos recursos disponíveis para aplicação produziria um aumento no retorno total de 2,8%. A análise dos campos permissíveis acréscimo/decréscimo correspondentes mostra que isso é válido para as variações no montante total da aplicação que se processarem dentro do intervalo de \$ 80.000 a \$ 105.000 (\$ 100.000 ± pemissíveis decréscimo/acréscimo).

Um raciocínio similar mostra, por exemplo, que ao aumento de uma unidade na restrição de máximo da companhia de utilidade pública corresponde um aumento no retorno total de 0,015 (1,5%). Como podemos deduzir, essa é a diferença entre o aumento no retorno total proporcionado por esse investimento (+ 4,3%) e a diminuição no retorno devida à redução de \$ 1 na aplicação na NES (– 2,8%). Observar que, na solução ótima o tipo de investimento menos rentável são os títulos públicos. Esses, porém, não podem ter seu montante diminuído, porque já estão no limite mínimo permitido.

Um problema de minimização da função-objetivo

A Mínimo Risco é uma empresa especializada em gestão de riscos. O Dr. Alexandre Assaf, proprietário da empresa, é especialista em planejar carteiras de investimentos. Ele acaba de realizar uma consultoria a um cliente que dispõe de \$ 500.000. O cliente deseja aplicar em dois tipos de fundos de investimentos: fundo de ações e fundo de renda fixa.

Cada quota do fundo de ações custa \$ 100 e proporciona uma taxa de retorno de 8%. Cada quota do fundo de renda fixa custa \$ 200 e proporciona uma taxa de retorno de 4%.

O objetivo do cliente é minimizar o risco, mas pretende obter o retorno de pelo menos \$ 25.000.

Cada quota do fundo de ações apresenta um índice de risco = 6 e cada quota do fundo de renda fixa um índice de risco = 2.

O cliente especificou também que devem ser investidos em pelo menos 800 quotas do fundo de renda fixa.

Pede-se determinar quantas quotas devem ser adquiridas de cada fundo, com o objetivo de minimizar o índice de risco total da carteira.

Solução

A solução dos problemas de minimização segue os mesmos passos empregados nos casos de maximização. As principais diferenças entre os dois modelos referem-se à relações matemáticas envolvidas. Como solucionaremos o exemplo com emprego de recursos computacionais, as eventuais dificuldades inerentes ao cálculo são minimizadas.

1 Modelagem do problema

Variáveis de decisão:

As variáveis de decisão do problema são as quantidades de quotas do fundo de ações e do fundo de renda fixa, as quais identificamos pelas notações FA e RF, respectivamente.

Função-objetivo:

O objetivo do problema é o de minimizar o índice de risco total da carteira. A equação representativa da função-objetivo consiste no somatório dos produtos dos riscos específicos pelas quantidades aplicadas em cada um dos investimentos:

Minimizar risco total da carteira = 6 FA + 2 RF.

Restrições:

- os recursos disponíveis para aplicação são de \$ 500.000. Como cada quota do fundo de ações custa \$ 100 e cada quota do fundo de renda fixa, \$ 200, uma das restrições do problema é: 100 FA + 200 RF = 500.000;
- o cliente pretende obter um retorno de, no mínimo, \$ 25.000. As taxas de retorno do fundo de ações e do fundo de renda fixa são, respectivamente, de 8% e 4%. Essa restrição é representada pela seguinte equação: (8% de 100) FA + (4% de 200) RF $\geq$ 25.000 ou 8 FA + 8 RF $\geq$ 25.000;
- estabeleceu-se que devem ser adquiridas pelo menos 800 quotas do fundo de renda fixa. Portanto: RF $\geq$ 800.

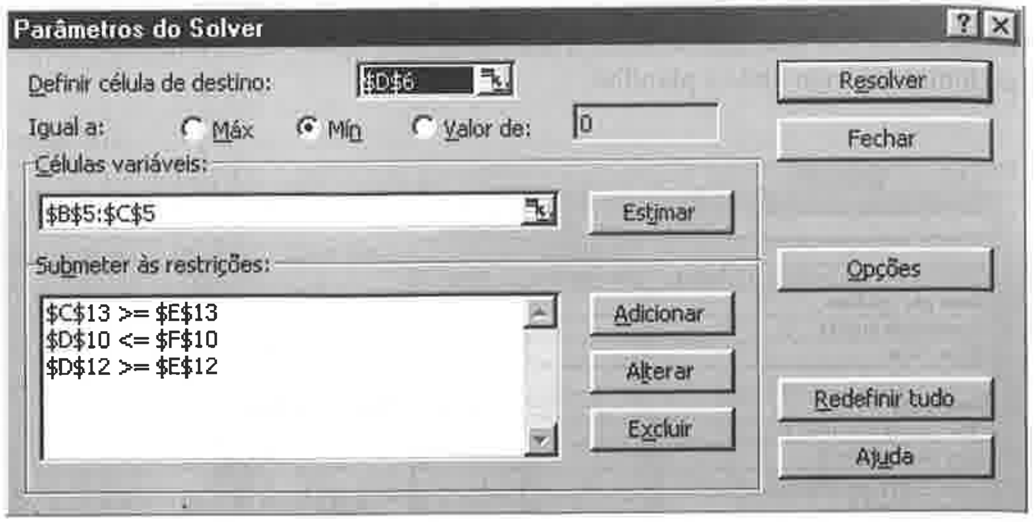
2 Elaboração da planilha inicial

Os dados do problema estão dispostos na planilha a seguir. As células variáveis (B5 a C5) são inicialmente preenchidas com zeros. As fórmulas utilizadas são indicadas logo após a planilha.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		CONSULTORIA MÍNIMO RISCO						
2		FUNDOS						
3		Ações	Renda Fixa	Total				
4	Risco por unidade	6	2					
5	Quantidade quotas	0	0					
6	Risco Total	0	0	0				
7								
8	Restrições			Total	Mínimo	Máximo		
9	Valor Quota por unid. \$	100	200					
10	Valor Quota Total \$	0	0	0		500000		
11	Retorno por Quota \$	8	4					
12	Retorno Total \$	0	0	0	25000			
13	Quant. quotas renda fixa		0		800			
14								
15								
16								

Células	Fórmulas	Copiar para
B6	=B4*B5	C6
D6	=SOMA(B6:C6)	
B10	=B5*B9	C10
D10	=B10+C10	
B12	=B5*B11	C12
D12	=B12+C12	

3 Definição dos parâmetros do *Solver*



A célula de destino D6 corresponde ao índice de risco total da carteira. No caso desse problema, a função-objetivo envolve uma minimização. Portanto, selecionamos *Mín* na alternativa *Igual a*.

As células variáveis (B5 e C5) correspondem ao número de quotas a serem calculadas.

As restrições indicam as limitações antes definidas, que recaem sobre valor do recurso total a ser investido, valor do retorno total e quantidade mínima de quotas do fundo de renda fixa.

4 Análise dos Relatórios

Relatório de Resposta

Microsoft Excel 8.0 Relatório de resposta

Célula de destino (Mín)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$D$6	Risco Total	0	17500

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$B$5	Quantidade quotas Ações	0	2500
$C$5	Quantidade quotas Renda Fixa	0	1250

Restrições

Célula	Nome	Valor da célula	Fórmula	Status	Transigência
$C$13	Quant. quotas renda fixa	1250	$C$13>=$E$13	Sem agrupar	450
$D$12	Retorno Total	25000	$D$12>=$E$12	Agrupar	0
$D$10	Valor Quota Total	500000	$D$10<=$F$10	Agrupar	0

O relatório de resposta indica que, para atender às condições fixadas para o problema, devem ser adquiridas 2.500 quotas do fundo de ações e 1.250 quotas do fundo de renda fixa. Dessa maneira, o risco total da carteira é minimizado, atingindo 17.500, e fica assegurado um retorno mínimo desejado de $ 25.000.

A linha 17 do relatório indica que, adquirindo-se as 1.250 quotas do fundo de ações, há uma folga de 450 unidades em relação ao limite mínimo de 800 unidades fixado no enunciado do problema.

Relatório de Limites

Microsoft Excel 8.0 Relatório de limites

Célula	Nome Destino	Valor
$D$6	Risco Total Total	17500

Célula	Nome Ajustável	Valor	Limite Inferior	Resultado Destino	Limite Superior	Resultado Destino
$B$5	Quantidade quotas Ações	2500	2500	17500	2500	17500
$C$5	Quantidade quotas Renda Fixa	1250	1250	17500	1250	17500

Pelo mesmo motivo indicado no exercício anterior (Fundabanc), o relatório de limites tem pouca utilidade neste exemplo. Isso ocorre devido à restrição que determina que deve ser aplicado, necessariamente, o montante de $ 500.000. Essa condição impede que possamos analisar possíveis flexibilizações nos limites de uma variável, uma vez que devemos manter fixa a outra variável. Por exemplo, mantendo-se fixa a quantidade a ser adquirida de ações, não é possível investir mais no fundo de ações, porque os recursos não permitem; por outro lado, não podemos adquirir menor quantidade desses títulos porque, assim, deixaríamos de aplicar todo o recurso disponível.

Relatório de Sensibilidade

Microsoft Excel 8.0 Relatório de sensibilidade

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor Final	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
$B$5	Quantidade quotas Ações	2500	0	6	1E+30	2
$C$5	Quantidade quotas Renda Fixa	1250	0	2	1	1E+30

Restrições

Célula	Nome	Valor Final	Sombra Preço	Restrição Lateral R.H.	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
$C$13	Quant. quotas renda fixa	1250	0	800	450	1E+30
$D$12	Retorno Total	25000	0,8333	25000	5400	15000
$D$10	Valor Quota Total	500000	-0,0067	500000	750000	67500

A análise da parte relativa às células variáveis no relatório de sensibilidade mostra que o aumento no risco do fundo de ações ou a diminuição no risco do

fundo de renda fixa não alteram a solução ótima (veja informação 1E+30 nos campos permissível acréscimo/decréscimo). Observamos, contudo, que diminuições iguais ou maiores que 2 no risco das ações ou aumentos de pelo menos 1 na renda fixa alteram a solução ótima. Por exemplo, façamos uma simulação com o risco das ações passando de 6 para 4, mantendo o risco da renda fixa inalterado. Como mostra a figura a seguir, a solução ótima passaria a indicar forte aumento na aplicação em ações, sendo o investimento em renda fixa feito em seu limite mínimo fixado (de $ 800).

	A	B	C	D	E	F
1		CONSULTORIA MÍNIMO RISCO				
2		FUNDOS				
3		Ações	Renda Fixa	Total		
4	Risco por unidade	4	2			
5	Quantidade quotas	2725	800			
6	Risco Total	10900	1600	12500		
7						
8	Restrições			Total	Mínimo	Máximo
9	Valor Quota por unid. $	100	200			
10	Valor Quota Total $	272500	160000	432500		500000
11	Retorno por Quota $	8	4			
12	Retorno Total $	21800	3200	25000	25000	
13	Quant. quotas renda fixa		800		800	

Voltando à análise do relatório de sensibilidade, verificamos, no campo relativo às restrições, que cada $ 1 a mais de retorno mínimo que o cliente viesse a exigir levaria a um aumento de 0,83 no risco total da carteira. Certamente, o retorno maior seria obtido com a substituição de títulos da renda fixa por ações, investimento que possui maior taxa de retorno e maior risco.

É possível observar no relatório também que eventual aumento de $ 1 nos recursos totais disponíveis levaria a uma diminuição do risco da carteira de 0,0067. Observe que o aumento desse valor, a cada unidade, é válido até que a aplicação total perfaça $ 1.250.000 ($ 500.000 + permissível acréscimo de $ 750.000). Esse raciocínio também é válido para as eventuais diminuições do montante disponível para aplicação (há aumento no risco total a cada unidade a menos no investimento total), dentro do limite mínimo estabelecido pelo permissível decréscimo.

5 Um tipo especial de problemas de PL: os problemas de transporte

A Transportes Ótimos é responsável pela distribuição de produtos de uma indústria de refrigerantes, que possui duas fábricas e três depósitos. A administração da distribuidora está empenhada em reduzir ao mínimo possível os custos de transporte dos produtos das fábricas para os depósitos.

O *controller* da empresa reconhece que esse caso pode ser modelado como um tipo especial de problemas de PL: os problemas de transporte, que requerem a alocação de unidades que partem de certo número de pontos de origem para certo número de destinos.

Visando à modelagem do problema, o *controller* reuniu dados relativos ao próximo período. Em seguida, elaborou as seguintes tabelas, com o propósito de determinar a distribuição ótima do produto.

A Tabela 7.4 dispôs os custos de remessa por caminhão, com carga total, para cada um dos trajetos.

Tabela 7.4 *Custo de remessa por caminhão, com carga total, para cada trajeto.*

		Depósitos		
		1	2	3
Fábricas	1	\$ 450	\$ 580	\$ 380
	2	\$ 630	\$ 720	\$ 410

Na Tabela 7.5, foram organizados os dados relativos à produção de cada fábrica e à capacidade de armazenagem de cada depósito, em números de caixas. As quantidades de caminhões a serem enviados em cada trajeto foram identificadas pela letra Q, seguida de um índice em que o primeiro algarismo representa a fábrica e o segundo algarismo, o depósito.

Tabela 7.5 *Produção das fábricas/capacidade dos depósitos.*

		Depósitos			
		1	2	3	
Fábricas	1	Q_{11}	Q_{12}	Q_{13}	160
	2	Q_{21}	Q_{22}	Q_{23}	100
			100	120	80

Observar, na Tabela 7.5, que a capacidade total de armazenagem dos depósitos, de 300 unidades (100 + 120 + 80), é superior à produção, de 260 caixas (160 + 100). Nessa situação, caso fôssemos resolver o problema através de cálculos manuais, seria necessário criar uma fábrica fictícia, visando igualar quantidades a serem distribuídas com quantidades a serem alocadas nos depósitos. Atribuiríamos custo zero para os trajetos a partir dessa fábrica hipotética, o que faria com que as supostas unidades dela transportadas não interferissem na determinação da solução ótima do problema. Como vamos solucionar o caso utilizando a ferramenta *Solver*, esse procedimento não é necessário.

Pede-se determinar as quantidades de caminhões que devem ser enviados de cada fábrica para cada depósito, de forma que o custo total seja minimizado. Analisar os relatórios emitidos pelo *Solver*.

Solução

1 Modelagem do problema

Variáveis de decisão:

As variáveis de decisão do problema são as quantidades de caixas de refrigerantes a serem distribuídas nos trajetos de cada uma das duas fábricas para cada um dos três depósitos: Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}.

Função-objetivo:

A função-objetivo que se deseja otimizar é a minimização dos custos com transportes entre as fábricas e depósitos:

Minimizar custo

total de transporte $= (450.Q_{11}) + (580.Q_{12}) + (380.Q_{13}) +$

$+ (630.Q_{21}) + (720.Q_{22}) + (410.Q_{23})$

Restrições:

Como indicamos, a capacidade de armazenagem dos depósitos é superior à produção das fábricas. Por essa razão, representaremos as restrições relativas às fábricas com sinal de igual (=), indicando que toda a sua produção deve ser distribuída:

- fábrica 1: $Q_{11} + Q_{12} + Q_{13} = 160$;
- fábrica 2: $Q_{21} + Q_{22} + Q_{23} = 100$.

Já as restrições correspondentes aos depósitos serão representadas com sinal de menor ou igual (≤), pois a capacidade total deles não será plenamente utilizada:

- depósito 1: $Q_{11} + Q_{21} \leq 100$;
- depósito 2: $Q_{12} + Q_{22} \leq 120$;
- depósito 3: $Q_{13} + Q_{23} \leq 80$.

2 Elaboração da planilha inicial

A planilha e as respectivas fórmulas empregadas são mostradas a seguir.

As células B6 a D7 (variáveis) são preenchidas com zeros. As células B13 a D14 contêm os custos da remessa por caminhão, com carga total, entre os trajetos.

Transportes Ótimos

Nº de caminhões das fábricas para depósitos

	Depósito 1	Depósito 2	Depósito 3	Total
Fábrica 1	0	0	0	0
Fábrica 2	0	0	0	0
Total	0	0	0	

Custo remessa (por caminhão, c/ carga total)

	Depósito 1	Depósito 2	Depósito 3
Fábrica 1	450,00	580,00	380,00
Fábrica 2	630,00	720,00	410,00

Custo total de remessa fábricas para depósitos

	Depósito 1	Depósito 2	Depósito 3	Custo Total
Fábrica 1	0,00	0,00	0,00	0,00
Fábrica 2	0,00	0,00	0,00	0,00
				0,00

Células	Fórmulas	Copiar para
E6	=SOMA(B6:D6)	E7
B8	=SOMA(B6:B7)	C8:D8
B19	=B6*B13	B:20;C19:D20
E19	=SOMA(B19:D19)	E:20
E21	=SOMA(E19:E20)	

3 Definição dos parâmetros do *Solver*

O propósito é o de minimizar a célula de destino (E21), que corresponde ao custo total com transporte.

As células variáveis (B6 a D7) correspondem às quantidades que devem ser enviadas de cada uma das fábricas para cada um dos depósitos.

Como antes indicado, as restrições de igual (=) referem-se às fábricas, e as restrições de menor ou igual (≤), aos depósitos.

4 Análise dos Relatórios[11]

Relatório de resposta

Microsoft Excel 8.0 Relatório de resposta
Planilha: [TransportesÓtimos.xls]Plan1

Célula de destino (Mín)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$E$21	Custo Total	0,00	127.000,00

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$B$6	Fábrica 1 Depósito 1	0	100
$C$6	Fábrica 1 Depósito 2	0	60
$D$6	Fábrica 1 Depósito 3	0	0
$B$7	Fábrica 2 Depósito 1	0	0
$C$7	Fábrica 2 Depósito 2	0	20
$D$7	Fábrica 2 Depósito 3	0	80

Restrições

Célula	Nome	Valor da célula	Fórmula	Status	Transigência
$B$8	Total Depósito 1	100	$B$8<=100	Agrupar	0
$C$8	Total Depósito 2	80	$C$8<=120	Sem agrupar	40
$D$8	Total Depósito 3	80	$D$8<=80	Agrupar	0
$E$6	Total Fábrica 1	160	$E$6=160	Agrupar	0
$E$7	Total Fábrica 2	100	$E$7=100	Agrupar	0

11 Deixamos de apresentar o relatório de limites porque, pelas razões expostas nos dois exercícios anteriores, sua análise fica prejudicada nesse tipo de exemplo.

O relatório de resposta indica que, na solução ótima, o custo total de transporte das fábricas para os depósitos é de $ 127.000,00.

Na primeira parte do relatório, são mostradas as quantidades de caminhões que devem ser alocados em cada trajeto. Verifique que para dois dos trajetos não é previsto transporte de produtos.

Na parte relativa às restrições, podemos observar que o Depósito 2 é o que não tem sua capacidade plenamente ocupada, ficando com a folga correspondente a 40 caminhões. Atente para os campos *status* e *transigência*.

Relatório de Sensibilidade

Microsoft Excel 8.0 Relatório de sensibilidade
Planilha: [TransportesÓtimos.xls]Plan1

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor Final	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
$B$6	Fábrica 1 Depósito 1	100	0	450	40	1E+30
$C$6	Fábrica 1 Depósito 2	60	0	580	110	40
$D$6	Fábrica 1 Depósito 3	0	110	380	1E+30	110
$B$7	Fábrica 2 Depósito 1	0	40	630	1E+30	40
$C$7	Fábrica 2 Depósito 2	20	0	720	40	110
$D$7	Fábrica 2 Depósito 3	80	0	410	110	1E+30

Restrições

Célula	Nome	Valor Final	Sombra Preço	Restrição Lateral R.H.	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
$B$8	Total Depósito 1	100	-130	100	60	40
$C$8	Total Depósito 2	80	0	120	1E+30	40
$D$8	Total Depósito 3	80	-310	80	20	40
$E$6	Total Fábrica 1	160	580	160	40	60
$E$7	Total Fábrica 2	100	720	100	40	20

Pela análise do relatório de sensibilidade, podemos observar que a solução ótima não prevê a destinação de nenhum caminhão da Fábrica 1 para o Depósito 3, justamente o trajeto que possui o menor custo entre todos os itinerários considerados. Isso ocorre devido à conjunção das condições do problema: produção de cada fábrica e limitação da capacidade de armazenagem de cada depósito.

Entre outras análises possíveis, podemos verificar, por exemplo, que cada caminhão que se deseje alocar no referido trajeto (Fábrica 1/Depósito 3) aumenta o custo total em $ 110 (veja reduzido custo).

A coluna *sombra preço* mostra quanto poderia ser reduzido no custo total da empresa, caso ela investisse na ampliação da capacidade de armazenagem dos depósitos. A ampliação mais vantajosa para a empresa seria na capacidade do Depósito 3. Observar que cada caminhão a mais que pudesse ser alocado nesse depósito levaria a uma redução no custo total da empresa de $ 310.

No que se refere às restrições relativas às fábricas, o campo *sombra preço* indica qual seria o aumento no custo total da empresa de cada unidade adicional que viesse a ser produzida, desde que mantida a mesma capacidade de armazenagem dos depósitos.

Exercício proposto

1. Indústrias Barbieri

As Indústrias Barbieri fabricam os Produtos 1 e 2. As empresas conseguem vender todos os produtos.

Cada produto passa por três departamentos e os tempos de fabricação requeridos encontram-se na Tabela 7.6.

Tabela 7.6 *Tempo de fabricação em horas por unidade.*

	Departamento A	Departamento B	Departamento C
Produto 1	2	1	4
Produto 2	2	2	2

Cada departamento, entretanto, tem uma capacidade fixa de homens-hora por mês, como mostra a Tabela 7.7.

Tabela 7.7 *Capacidade produtiva dos departamentos.*

Departamento	Capacidade máxima em homens-hora
A	160
B	120
C	280

A margem de contribuição do Produto 1 é de $ 1,00 por unidade e a do Produto 2 é de $ 1,50 por unidade.

O problema consiste em determinar quanto fabricar de cada produto com o objetivo de maximizar a margem de contribuição total (MCT).

Pede-se:

1. Elaborar o modelo do problema.
2. Resolver o problema utilizando a Ferramenta *Solver* do aplicativo Excel.
3. Analisar os relatórios de respostas, limites e sensibilidade e responder às seguintes questões:
   - 3.1 Qual quantidade dos produtos deve ser produzida na solução ótima? Qual a MCT obtida nessa solução?
   - 3.2 Em que departamentos produtivos existe ociosidade e de quantas horas?
   - 3.3 Considerando a solução ótima, se o Produto 1 passar a ser produzido em seu limite mínimo, qual a margem de contribuição total?
   - 3.4 A partir da solução ótima, qual o reflexo na MCT de cada nova unidade do Produto 2 que a empresa produzir? Isso é válido para que intervalo?
   - 3.5 Considerar que a empresa deseja ampliar a capacidade produtiva do Departamento B.
     - 3.5.1 Determinar qual o impacto na margem de contribuição que seria provocado pelo aumento de cada nova unidade na capacidade total do departamento.
     - 3.5.2 Considerar que o custo com a ampliação da capacidade produtiva de 40 unidades no departamento é de $ 500. Calcular quantos meses seriam necessários para, com o ganho adicional na margem de contribuição da empresa, cobrir os custos decorrentes da ampliação.

BIBLIOGRAFIA

ANDRADE, Eduardo Leopoldino de. *Introdução à pesquisa operacional*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1990.

BELKAOUI, Ahmed. *Quantitative models in accounting*. New York: Quorum Books, 1987.

CHARNES, A.; COOPER, W. W. *Management models and industrial applications of linear programming*. New York: John Wiley, 1961.

GARCIA, Solange; GUERREIRO, Reinaldo; CORRAR, Luiz J. Teoria das restrições e programação linear. In: *Congresso Internacional de Custos*, 5, Acapulco (ME), p. 1205-1227, 1997.

HILLIER, Frederick S.; LIEBERMANN, Gerald J. *Introduction to operations research*. 6. ed. Cingapura: McGraw-Hill, 1995.

LEININGER, Wayne E. *Quantitative methods in accounting*. New York: Litton Educational, 1980.

LEVIN, Richard I. et al. *Quantitative approaches to management*. 7. ed. New York: McGraw-Hill, 1989.

RAGSDALE, Cliff T. *Spreadsheet modeling and decision analysis*. 2. ed. Cincinnati, Ohio: South-Western College Publishing, 1998.

RENDER, Barry; STAIR JR., Ralph M. *Quantitative analysis to management*. 6. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1997.

SHAMBLIM, J. E.; STEVENS JR., G. T. *Pesquisa operacional*: uma abordagem básica. São Paulo: Atlas, 1989.

THEÓPHILO, Carlos Renato; HOLANDA, Victor Branco de; CORRAR, Luiz J. Problemas de custos nas empresas, numa perspectiva interdisciplinar. In: *VI Congresso Brasileiro de Custos*, jul. 1999, FEA/USP, São Paulo.

WAGNER, Harvey M. *Pesquisa operacional*. Tradução de Paulo Antonio Mariotto, superv. Fábio Luiz Mariotto. Rio de Janeiro: Prentice Hall do Brasil, 1996.

WINSTON, Wayne L. *Operations research*: applications and algorithms. 3. ed. ITP-International Thomson Publishing, 1994.

_____; ALBRIGHT, S. Christian. *Practical management science spreadsheet modeling and applications*. International Thomson Publishing, 1997.